BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: ____________________

ABR0252
UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/18/88 R/DT 07/18/88 CC STAT mm E/L 1
010: : |a 07002044
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B48964
035/2: : |a (CaOTULAS)160121579
040: : |a RPB |c RPB |d NIC |d MiU
041:1 : |a ger |h ita
050/1:0 : |a QA567 |b .L87
100:1 : |a Loria, Gino.
240: 0: |a Curve piane speciali algebriche e trascendenti, teoria e storia. |l German
245:00: |a Spezielle algebraische und transscendente ebene kurven. |b Theorie und Geschichte. |c Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe, von Fritz Schütte. Mit 174 Figuren auf 17 lithographierten Tafeln.
260: : |a Leipzig, |b B. G. Teubner, |c 1902.
300/1: : |a xxi, 744 p. |b xvii p. (diagrs.) |c 23 cm.
440/1: 0: |a B.G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. |v Bd. 5
500/1: : |a At head of title: Gino Loria.
650/1: 0: |a Curves, Plane

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: ____________
Camera Operator: ____________

B. G. TEUBNER'S SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.
BAND V.

DR. GINO LORIA
ORD. PROFESSOR DER HÖHEREN GEOMETRIE AN DER UNIVERSITÄT GENUA.

SPEZIELLE ALGEBRAISCHE UND TRANSSCENDENTE EBENE KURVEN.

THEORIE UND GESCHICHTE.

AUTORISIERTE, NACH DEM ITALIENISCHEN MANUSKRIPT BEARBEITETE
DEUTSCHE AUSGABE

VON

FRITZ SCHÜTTE
OBERLEHRER AM KÖNIGLICHEN GYMNASIUM ZU NEUWIED.

MIT 174 FIGUREN AUF 17 LITHOGRAPHIERTEN TAFELN.



LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1902.

DEM ANDENKEN

EUGEN BELTRAMI'S.

Vorwort.

An der Aufstellung der bunten Schar der mannigfaltigen, speziellen algebraischen und transscendenten Kurven haben fast alle Mathematiker, angefangen von der griechischen Epoche bis auf unsere Tage, mitgearbeitet: die einen trieb der Wunsch nach Vermehrung der Zahl interessanter geometrischer Figuren, die anderen der Wunsch, analytische Formeln geometrisch interpretiert zu sehen; wieder andere beseelte die Hoffnung, gewisse, bis dahin unbezwungene geometrische Probleme zu lösen; noch andere führten Anwendungen aus der Mechanik und Physik dazu. Die nachfolgenden Untersuchungen über diese Gebilde sind nicht blofs ihrer äufseren und inneren Natur nach ganz verschiedener Art, sondern sie finden sich auch zerstreut in allerlei ganz verschiedenen Werken, von den gewaltigen Publikationen der grofsen Akademien an bis zu den bescheidenen Abhandlungen, in den für die Studierenden bestimmten Zeitschriften, von den Büchern, die heute zu den klassischen der exakten Wissenschaften zählen, bis zu den kleinen Arbeiten, denen es vom Schicksal bestimmt ist, sich nur einer beschränkten Bekanntheit zu erfreuen, wie die Inauguraldissertationen, die Habilitationsschriften und Programmabhandlungen. Die sehr häufigen Fälle, dafs ein und dieselbe Kurve oftmals entdeckt worden ist, dafs derselbe Satz von verschiedenen Autoren gefunden wurde, dafs dasselbe Problem mehrmals als ein neues behandelt worden ist, liefsen es dringend nötig erscheinen, einer solch beklagenswerten Arbeitsverschwendung ein Ende zu machen, machten dringend das Bedürfnis fühlbar, das bisher vorhandene ungeheuere Material zu ordnen, liefsen den sehnsüchtigen Wunsch hervortreten nach einem Werke, in welchem alle bekannten Kurven nach ihrer Definition und ihren Haupteigenschaften dargelegt seien.

Es ist das Verdienst der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Madrid, zuerst öffentlich diesen Wunsch ausgesprochen und zu seiner Erfüllung dadurch beigetragen zu haben, dafs sie als Thema für die am 31. Dez. 1894 fällige Preisaufgabe stellte die Ausarbeitung „eines geordneten Verzeichnisses aller Kurven jeglicher Art, die einen speziellen Namen erhalten haben, mit kurzen Angaben über ihre Gestalt, ihre Gleichungen, ihre Erfinder“. Da die genannte Akademie die gewünschte Beantwortung nicht erhielt, so wiederholte sie dieselbe Aufgabe für den am 31. Dez. 1897 fälligen Wettbewerb. Inzwischen hatte der berühmte französische Mathematiker Hâton de la Goupillière ein ähnliches Thema im *Intermédiaire des mathématiciens* (Band I, 1894, S. 37) zur Bearbeitung vorgeschlagen. Eben diesen

öffentlichen und von Autoritäten ausgegangenen Aufforderungen, sich methodisch mit den speziellen, bis jetzt vorhandenen Kurven zu beschäftigen, verdankt das vorliegende Werk seine Entstehung. Es fand auch bei der Königl. Akademie zu Madrid die schmeichelhafteste und vollständigste Anerkennung, nachdem es Ende 1897 (in einer von der vorliegenden abweichenden Form) dem erlauchten Urteile jenes hohen Gelehrten-Kollegiums unterbreitet worden war*).

Die Ausführung eines Werkes wie des vorliegenden, dessen Fehlen in der Litteratur von vielen Seiten beklagt worden ist, bietet nicht wenige und nicht geringe Schwierigkeiten. Zuerst mufsten vor allem die Grenzen desselben sorgfältig festgelegt werden, dann mufste mit peinlicher Sorgfalt das Material zur Ausbeute gesammelt werden, schliefslich mufste die Methode ausfindig gemacht werden, um das Material wohl zu ordnen und einzuteilen.

Bezüglich der Frage, welche Kurven zu betrachten seien, habe ich mich entschlossen, auszuschliefsen: 1) Diejenigen Kurven, die aus heterogenen Bogenstücken zusammengesetzt, und daher nicht durch eine einzige Gleichung darzustellen sind, weil sie auch eher der Architektur, der Physik oder angewandten Disziplinen, als der reinen Mathematik angehören. 2) Die Linien doppelter Krümmung, da sie bekanntlich Gebilde von ganz anderer Natur als die ebenen Kurven sind; ihre Behandlung bleibt daher einem Werke über die vergleichende Geometrie des Raumes vorbehalten, analog diesem Versuch einer vergleichenden Geometrie der Ebene. Hingegen habe ich eingeschlossen alle ebenen oder transscendenten Kurven, die schon einen speziellen Namen erhalten haben, ebenso manche andere, die, wenngleich sie namenlos sind, dennoch eine feste Anstellung in der Wissenschaft verdienen.

Was nun das verwendete Material angeht, so habe ich, kann ich wohl sagen, auf die gesamte mathematische Litteratur zurückgegriffen, die mir erreichbar gewesen, weil ich durch die Erfahrung überzeugt wurde, dafs nur in sehr wenigen, vielleicht in keinem Zweige der Mathematik wichtige Forschungen über spezielle Kurven gänzlich fehlen. Aber wenn ich auch nicht von vornherein irgend welche Kategorie mathematischer Arbeiten ausgeschlossen habe, so soll damit nicht gesagt sein, dafs mir kein Gegenstand von Bedeutung entgangen sei, und daher erbitte ich mir für die sowohl unvermeidlichen als auch unbeabsichtigten Mängel meines Werkes schon jetzt die Nachsicht der kompetenten Fachleute, und hege das Vertrauen, dafs diese mir von jedwedem gewährt werde, der auch nur eine annähernde Vorstellung von dem unermefslichen Reichtume der heutigen mathematischen Wissenschaft hat.

---

*) S.: *Annuario de la Real Academia de Ciencias exactas, fisicas y naturales*, 1900 (Madrid) S. 141—153, 299—322, und *El progréso matematico*, 1900, S. 201—225.

Es möge an dieser Stelle auch bemerkt werden, dafs ich mich bei jeder Kurve darauf beschränkt habe, ihrem Ursprunge, soweit dies möglich war, nachzuforschen, und ihre hauptsächlichsten Eigenschaften nachzuweisen und die besten Untersuchungsmethoden, welche auf sie anwendbar sind, anzugeben, ohne jedoch alle Sätze und alle mit ihr zusammenhängenden Arbeiten aufzuzählen. Zu einer derartigen Beschränkung des Stoffes wurde ich bewogen einerseits durch den enormen Umfang, den sonst meine Arbeit angenommen hätte, anderseits durch die Hoffnung, dafs andere sich daran geben möchten, eine vollständige Bibliographie der ebenen Kurven aufzustellen. Die besten Proben in dieser Hinsicht hat Herr Prof. Wölffing gegeben*) und rechtfertigen diese die Ansicht, dafs gerade er der geeignetste Mann für diese verdienstliche Arbeit sei.

Was endlich die Anordnung des Stoffes angeht, so glaubte ich ein zweifaches Prinzip beachten zu müssen. Bei der Teilung des Werkes in Abschnitte habe ich mich durch die Natur der untersuchten Kurven leiten lassen, und behandelte darnach zuerst die algebraischen Kurven von bestimmter Ordnung (Abschn. I—IV), dann die von beliebiger Ordnung (Abschn. V); alsdann ging ich zu den transscendenten Kurven über (Abschn. VI), um schliefslich (Abschn. VII) gewisse, für alle geometrischen Kurven anwendbare Gesetze für die Ableitung einer Kurve aus einer anderen zu behandeln. Hingegen in der Anordnung der Kapitel der einzelnen Abschnitte wählte ich als hauptsächliches Prinzip die historische Reihenfolge; jedoch habe ich mich davon frei gemacht, wenn es galt, die aus der einzelnen Kurve im Laufe der Zeit durch einen der Verallgemeinerungsprozesse hervorgegangenen Kurven zu beschreiben, deren Fruchtbarkeit die heutige Geometrie hauptsächlich ihren Reichtum verdankt. Weitere Einzelheiten über die behandelte Materie und deren Anordnung ersieht der Leser aus dem ausführlichen Inhaltsverzeichnisse.

Die von mir angewendete Form der Darstellung trägt einen wesentlich algebraischen Charakter und wurde von mir vornehmlich deswegen gewählt, um den jüngeren Lesern einen unbestreitbaren Beweis zu liefern von der gewaltigen Hilfskraft, die die analytische Geometrie jedem bietet, der die Kunstgriffe ihres wunderbaren Mechanismus inne hat; ferner auch deswegen, weil die reine Geometrie heute wohl noch nicht eine Grundlage von gleicher Allumfassung und Ausdehnung bieten kann, um daraufhin die mathematischen Wahrheiten zu erforschen. Inwiefern der Verfasser Verbesserung nach Inhalt und Form erreicht hat (insbesondere in Bezug auf die transscendenten Kurven), das Urteil darüber sei dem einsichtigen Leser überlassen; sollte er sich veranlafst fühlen, Anordnung und Auswahl des Stoffes zu tadeln, so

*) Ich erwähne nur den wunderschönen *Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den cyklischen Kurven* (Bibl. math. 3e Reihe, II. Bd. 1901).

möge er auch bedenken, dafs es ist eine „res ardua, vetustis novitatem dare, novis autoritatem, obsoletis nitorem, obscuris lucem, fastidiis gratiam, dubiis fidem, omnibus vero naturam et naturae suae omnia"*).

Dafs ein Werk wie das vorliegende, trotz der grofsen Sorgfalt, die der Verfasser auf dasselbe verwandt hat, die erwünschte Vollkommenheit erreichen könne, ist undenkbar, und ich werde allen denen sehr dankbar sein, die mich auf etwaige Mängel und Lücken aufmerksam machen werden, und mich in den Stand setzen, die einen zu beseitigen, die anderen auszufüllen. Einige derartige Berichtigungen und Zusätze, die sich nachträglich ergaben, finden sich am Schlusse des Werkes aufgezählt (s. Berichtigungen und Zusätze).

Das Gefühl der Dankbarkeit veranlafst mich an dieser Stelle einiger Herren rühmlich zu gedenken, die in verschiedener Weise zu dem guten Ausgange meines Unternehmens, das jetzt in fertiger Form vorliegt, beigetragen haben. Unstreitig an erster Stelle steht Herr H. Brocard, nicht nur wegen seiner wertvollen Kurvenverzeichnisse, die er im *Intermédiaire des mathématiciens* (Bd. IV, 1897, S. 103; V, 1898, S. 33 u. 37; VII, 1900, S. 271) veröffentlicht hat, und der beiden Bände der *Notes de bibliographie des courbes géométriques* (Bar-le-Duc 1897 u. 1899), sondern auch wegen der häufigen und reichhaltigen Aufklärungen, die er mir grofsartiger Weise allemal gegeben hat, wenn ich ihn darum bat. Alsdann folgt Herr Prof. Dr. E. Wölffing, der, indem er es übernommen hatte, an der schwierigen und undankbaren Aufgabe der Revision der Druckbogen sich zu beteiligen, mir in vielen Fällen wertvolle Zusätze zu den von mir gegebenen bibliographischen Notizen lieferte, die ich in allen den Fällen nützlich verwendet habe, wo sie nicht den ursprünglichen Plan meines Werkes veränderten. Ein Wort aufrichtigen Lobes verdient auch Herr Oberlehrer Fritz Schütte, nicht nur wegen seiner fleifsigen Arbeit der Übersetzung, sondern auch für das von ihm fortwährend dem von mir gewählten Thema erwiesene Interesse; und mit dankbarem Herzen erkenne ich es an, dafs seine nicht gewöhnliche Geschicklichkeit in der Erfassung und Zeichnung der Kurvenformen zur Verbesserung mancher Einzelheiten beigetragen hat. Schliefslich kann ich auch dem Hause des Verlegers meine Anerkennung nicht versagen, da es keine Opfer gescheut hat, das gegenwärtige Werk einer gröfseren Vollendung in der Form entgegen zu führen, als ich es hätte erwarten können. Aber was soll ich noch meinen Worten der Anerkennung hinzufügen für ein Haus, das schon durch seine gewaltigen Unternehmungen im Dienste der Wissenschaft sich selber eine bleibende Stelle in der Geschichte der Wissenschaften und den fortwährenden Dank der ganzen Gelehrtenwelt errungen hat?

Genua, im März 1902.

G. Loria.

*) Plinius, Vorrede zu seiner *Historia naturalis*.

Inhalt.

IV. Abschnitt.

Spezielle algebraische Kurven von höherer als der vierten Ordnung.

V. Abschnitt.

Spezielle algebraische Kurven beliebiger Ordnung.

Seite

VI. Abschnitt.

Transscendente Kurven.

Seite

VII. Abschnitt.

Abgeleitete Kurven.

I. Abschnitt.

Ebene und körperliche Örter.

Erstes Kapitel.

Die Gerade.

1. Während, wie wir sehen werden, es möglich ist, anzugeben, wer zuerst den gröfsten Teil derjenigen Linien, die heute zum Erbteile der Geometrie gehören, erdachte, definierte und untersuchte, mufs das historische Problem, anzugeben, wer sich zuerst mit der einfachsten von ihnen, der Geraden beschäftigt hat, als unlöslich bezeichnet werden. Giebt es doch so zahlreiche und auffallende Naturerscheinungen, bei denen diese Linie auftritt (wir erinnern nur an den freien Fall, die Fortpflanzung des Lichtes in einem homogenen Medium) dafs, um auch nur ungefähr ihr erstes Auftreten anzugeben, man nicht nur auf einen Zeitlauf von Tausenden von Jahren zurückgreifen, sondern auch auf das Gebiet der Zoologie übergehen müfste, da alle Umstände zu der Ansicht führen, dafs auch den intelligenteren Tieren die hervorstechendsten Eigenschaften der geraden Linie nicht entgangen sein können. Weil somit der Uranfang der Geraden wohl ewig verborgen bleiben wird, so müssen wir uns darauf beschränken, das Auftreten dieser Linie in den ältesten noch erhaltenen mathematischen Werken anzugeben.

2. Jeder hat eine mehr oder weniger bestimmte Vorstellung von der geraden Linie, aber eine mathematische Definition dieses Gebildes, die alles anführt, was streng nötig ist, und nichts, was überflüssig, ist ein so schwieriges Problem, dafs trotz der Anstrengungen vieler tüchtiger Kräfte eine annehmbare Lösung desselben nach allgemeiner Übereinstimmung noch aussteht. In der That dürfte dieses Problem schon dem Pythagoras sich aufgedrängt haben, als er auf die Notwendigkeit, klare Definitionen für die Fundamente eines jeden wissenschaftlichen Systems, das auf diesen Namen Anspruch machen könnte, aufzustellen aufmerksam machte. Jedoch die Notwendigkeit einer Lösung desselben wird offenkundig geworden sein, als durch Aristoteles die deduktive Logik jene bestimmte Gestalt erhalten hatte, in der sie eine lange Reihe von Jahrhunderten sich erhalten sollte.

Die Definitionen, die mutmaſslich die ersten Bearbeiter der Geometrie angaben — Hippokrates aus Chios, Leon, Teydius von Magnesia — sind nicht auf uns gekommen, am allerwenigsten mit ihrer Fabrikmarke. Was nun diejenige angeht, die Euklides vorschlägt oder annimmt, so kann diese keineswegs als genügend oder brauchbar bezeichnet werden[1]). Dieselbe lautet bekanntlich folgendermaſsen: „Die gerade Linie ist diejenige, die in gleicher Weise in Bezug auf alle ihre Punkte liegt"[2]). Wie könnte wohl jemals einer, der noch keine Kenntnis von der geraden Linie hat, sich aus diesen Worten einen Begriff davon machen, und welcher Mathematiker könnte darauf ein festes Gebäude errichten? —

Diese Unvollkommenheit hat der berühmte Alexandriner zweifellos bemerkt, indem er die Notwendigkeit erkannte, jene Definition zu ergänzen, dadurch, daſs er unter den „allgemeinen Bemerkungen", die im Anfange des ersten Buches der *Elemente* enthalten sind, den Satz aufstellte: „Zwei Geraden können keinen Raum einschlieſsen"; derselbe besagt mit anderen Worten: „Zwischen zwei Punkten giebt es nur eine einzige Gerade." Bekannt und einleuchtend ist die ungemeine Wichtigkeit dieses Zusatzes, der in geeigneter Weise mit dem dualen Satze kombiniert gestattet, zu den höchsten Gipfeln der projektiven Geometrie zu gelangen.

Nichtsdestoweniger kann die Arbeit des Euklides in diesem Punkte nicht als vollkommen erachtet werden, und es würde von hohem Interesse sein, zu wissen, ob und in welchem Sinne Apollonius von Pergae diese modifiziert hat in der Überarbeitung, der er die von seinem Vorgänger verfaſsten „Elemente" im „Museum zu Alexandria" unterwarf; leider fehlen jedoch hierüber die Angaben. — Einem anderen bedeutenden Geometer des goldenen Zeitalters der griechischen Mathematik glaubt man (dem schlechten Beispiele des Proclus folgend, der zuerst fälschlich den Satz des Archimedes als eine Definition ausgab) eine neue Definition der Geraden zuschreiben zu müssen, nämlich dem Archimedes; aber der Satz: „Die Gerade bezeichnet den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten", der von ihm im ersten seiner berühmten Bücher *Über die Kugel und den Cylinder* ausgesprochen wird, gehört unter die Axiome oder wenn man will Postulate. — Wie könnte man übrigens zugeben, daſs einem solch berühmten Geometer es entgangen sein sollte, daſs, so lange die Entfernung noch nicht unabhängig vom Begriffe der Geraden definiert ist, diese angebliche Definition sich in einem Circulus vitiosus bewegt?

Von anderen Versuchen, die von den Alten gemacht sind, die

---

1) „Haec definitio", bemerkt mit Recht Leibniz, „nullius momenti est, neque uspiam ab Euclide in demonstrando adhibetur, neque satis intellegitur. *Leibnizens mathematische Schriften* herausg. v. Gerhardt, Bd. V. Halle 1858. S. 185.

2) *Elemente,* Buch I, Definition 4.

Gerade zu definieren, sind keine Nachrichten auf uns gekommen. Die Versuche, die zu demselben Zwecke vom Mittelalter an gemacht sind, zu beschreiben, wäre dasselbe, als wollte man alle die Wandlungen, welche die elementare Geometrie mitgemacht hat, darstellen; dies Thema „würdig der Dichtung und Geschichte" überschreitet jedoch die dieser Schrift gesteckten Grenzen. Wir beschränken uns somit darauf zu bemerken, wie heute an Stelle des alten Verfahrens, die Gerade mit wenigen Worten zu definieren — was notwendigerweise dem Zwecke nicht genügen kann — man das andere gesetzt hat, jedesmal die Grundeigenschaften anzuführen, die man dem geometrischen Gebilde zuerteilt, das man „gerade Linie" nennt. Wenn man in dieser Weise vorgeht, kommt man allerdings auf eine sehr grofse Schwierigkeit, nämlich anzugeben, welches die geringste Zahl von Eigenschaften der Geraden sei, die man notwendig in die Definition einschliefsen mufs, um daraus mit Folgeschlüssen alle übrigen abzuleiten. Es ist dies eine Schwierigkeit, die man noch nicht als endgültig überwunden bezeichnen kann, und diese zu überwinden bemüht man sich thatsächlich, indem man mit Vorliebe die Methoden der mathematischen Logik als die geeignetsten anwendet.

3. Die Gerade bildet nicht nur einen wichtigen Bestandteil der Geometrie der Lage, sondern auch ebensosehr der des Mafses, da man jeglichen Bogen einer Kurve mit einer geradlinigen Strecke zu vergleichen pflegt, und daher ist die Strecke der Kern unseres ganzen Mafs-Systems für Flächen und Volumina. — Zwei Punkte durch eine Gerade zu verbinden und eine Strecke nach beiden Seiten zu verlängern sind Operationen, die (nach den Vorschlägen des Euklid) dem Geometer zugestanden werden; beide werden praktisch vermittelst eines Instrumentes — des Lineals — ausgeführt, und der Inbegriff der Aufgaben, die mittelst desselben gelöst werden können, bildet einen besonderen Zweig der Geometrie, der im Anfange des vorigen Jahrhunderts viel kultiviert wurde, besonders in Frankreich, wo er mit dem besonderen Namen *Géometrie de la règle* bezeichnet wurde. Es soll bemerkt werden, dafs, wenn in der Ebene ein Kreis gezeichnet vorliegt, man mit alleiniger Hilfe des Lineals alle Aufgaben zweiten Grades lösen kann. Es ist dies eine Bemerkung von Poncelet[1]), welche Steiner meisterhaft entwickelt hat[2]). Liegt dagegen eine Kurve dritter Ordnung gezeichnet vor, so kann man in ähnlicher Weise alle Probleme dritten und vierten Grades lösen[3]). Wahrscheinlich trifft Analoges zu für Probleme höherer Grade.

---

1) *Traité des propriétés projectives des figures* (Paris 1822) Nr. 351—357.

2) *Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises.* (Berlin 1833.)

3) London, *Die geometrischen Constructionen dritter und vierter Ordnung ausgeführt mittels der geraden Linie und einer festen Kurve dritter Ordnung* (Zeitschrift f. Math. XLI, 1896).

Von der Geraden nimmt aufser dem Lineal noch ein anderes sehr gebräuchliches Instrument seinen Ursprung: das Winkelscheit. Alle praktisch mit alleiniger Anwendung des Lineals und Winkelscheits ausführbaren Konstruktionen werden neuerdings einem neuen Zweige der Geometrie zugewiesen, welchem G. de Longchamps eine besondere Arbeit widmete: *Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre* (Paris, 1890), die wir im Folgenden gelegentlich mehrmals zitieren werden[1]). Im Anfange des vorigen Jahrhunderts wuchs die Wichtigkeit der Geraden gewaltig, als man nach Entdeckung des Prinzips der Dualität bemerkte, dafs sie im Stande sei, als erzeugendes Element aller ebenen Figuren zu fungieren. Was soll man noch sagen von der Wichtigkeit, die sie erhielt, als um das Jahr 1865 Plücker sie als das Element des dreidimensionalen Raumes betrachtete und darauf eine *Neue Geometrie des Raumes* gründete?

Alle Geraden des Raumes — die unendlich ferne Gerade der Ebene mit einbegriffen — sind unter sich identisch, lassen daher, an und für sich betrachtet, keine Einteilung in Kategorieen zu. Dennoch trifft man in bestimmten Theorieen auf besondere, bemerkenswerte Geraden, denen man einen speziellen Namen gegeben hat. So in der Theorie der Kegelschnitte die Pascalsche, Steinersche, Plückersche Gerade u. s. w., in der modernen Geometrie des Dreiecks die Eulersche, Simsonsche, Wallacesche Gerade u. s. w.; bei Unterscheidungen dieser Art wollen wir uns aber nicht aufhalten, weder jetzt noch bei künftiger ähnlicher Gelegenheit.

Zweites Kapitel.

Der Kreis.

4. Nicht weniger schwierig, als den Ursprung des Begriffes der Geraden anzugeben, ist die Beurteilung, wem die Entdeckung des Kreises zukommt, weil mit dem Begriffe der Entfernung sich alsbald derjenige der Gesamtheit der Punkte, die von einem festen Punkte gleichen Abstand haben, aufdrängt. Anderseits verlangt — um eine Thatsache anzuführen, die frei von irgend einer hypothetischen Beigabe ist — die Konstruktion der ältesten vorhandenen Bauwerke durchaus den Gebrauch des Zirkels; ferner bringen diese auf ihren Wänden Figuren gezeichnet, welche die Anwendung dieses Instrumentes und die einfachsten geometrischen Kenntnisse, auf welche sie sich gründet, voraussetzen. — Gehen wir von dieser ziemlich unbestimmten allgemeinen Bemerkung zu bestimmten Nachrichten über,

---

1) Ein drittes ähnliches Instrument ist das Lineal mit zwei Parallel-Schienen auf dessen nützliche Anwendung in jüngster Zeit hingewiesen wurde.

so können wir anführen, dafs in dem berühmten *Mathematischen Handbuch*, das in Ägypten nicht weniger als 17 oder vielleicht 20 Jahrhunderte vor Chr. verfafst wurde[1]), man schon eine Auflösung des Problems der Quadratur des Kreises liest, die zu einem genügend angenäherten Werte des Verhältnisses π des Umfanges zum Durchmesser führt, nämlich $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}1064\ldots$ Mit demselben Probleme beschäftigten sich die Griechen, nachdem sie aus ihrer Barbarei kaum sich erhoben hatten; das beweisen die Lösungsversuche, die man dem Hippokrates von Chios, dem Antiphon und Bryson verdankt. Übrigens wer erinnert sich nicht einer Stelle aus den *Vögeln* des Aristophanes[2]), in welcher der berühmte Astronom Methon zum Spott dargestellt wird, wie er über eine Lösung dieses Problems nachsinnt, und wer sähe darin nicht eine sichere Bestätigung der grofsen Berühmtheit, die diese Frage schon im 4. Jahrhundert v. Chr. erlangt hat?

5. Dafs man den Kreis im Altertume auch unabhängig von der Frage nach seinem Inhalte betrachtet hat, geht daraus hervor, dafs man einem der sieben Weisen Griechenlands — dem Thales — die Entdeckung der Eigenschaft zuschreibt, dafs jeder Kreis und seine Peripherie durch jeden beliebigen Durchmesser in zwei gleiche Teile geteilt wird, und dem Pythagoras die Beobachtung, dafs der Kreis die vollkommenste Figur der Ebene ist, wie die Kugel unter den räumlichen Gebilden[3]). Dazu kommt noch, dafs in einem von Hippokrates aus Chios herrührenden Abrifs der Geometrie, den man für das älteste übrig gebliebene Denkmal griechischer Geometrie ansieht, sich nicht wenige teils ausgesprochene, teils bewiesene Sätze finden, die sich auf den Kreis und seine Teile beziehen. Diese Sätze — einige derselben beziehen sich auf die Möndchen des Hippokrates — wurden jedenfalls den ersten Bearbeitungen der Geometrie beigefügt und zugleich mit anderen in den *Elementen* des Euklides veröffentlicht; das dritte Buch derselben behandelt ausschliefslich den Kreis, das vierte hingegen umfafst die regelmäfsigen ein- und umbeschriebenen Vielecke und ein Teil des zwölften das Verhältnis der Flächen zweier Kreise. Andere Eigenschaften des Kreises und der Geraden wurden von Apollonius von Pergae zusammengefafst und zwar in einem leider verloren gegangenen Werke *Über die ebenen Örter*; in demselben wird diese Linie (ebenso die Gerade) betrachtet

1) A. Eisenlohr, *Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter (Papyrus Rhind des British Museum)*. Leipzig; 1. Aufl. 1877, 2. Aufl. 1891.

2) Lebte etwa um 440 oder 380 v. Chr.

3) Pythagoras bewunderte am Kreise und an der Kugel ohne Zweifel die vollendete Regelmäfsigkeit der Gestalt; Montucla (*Histoire des mathematiques* Bd. I 2. Aufl. S. 113) will dagegen in den Worten, mit denen Diogenes Laertius über die von dem Samischen Philosophen gemachte Beobachtung berichtet, einen ersten Hinweis auf die Theorie der Isoperimeter erkennen.

als Ort derjenigen Punkte, die gewissen gemeinsamen Bedingungen genügen; andere ähnliche Sätze findet man bei Durchsicht der bewunderungswürdigen *Mathematischen Sammlung*, die viel später von Pappus von Alexandria geschrieben wurde.

Die angedeutete Zusammenfassung des Kreises mit der Geraden unter dem Begriffe der „ebenen Örter"[1]) ist nicht der einzige Berührungspunkt, den die Alten zwischen diesen beiden Linien aufstellten. Es ist wohl bekannt, dafs Euklides aufser den beiden in Nr. **3** bezeichneten ausführbaren Operationen dem Geometer auch einräumte, um einen gegebenen Mittelpunkt mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben (*Elemente*, Buch I, Postulat 3). Folglich betrachtete man den Gebrauch des Zirkels ebenso wie den des Lineals als zulässig; auch hielt man die Lösung einer geometrischen Aufgabe nur dann für annehmbar, wenn sie mit Hilfe nur dieser beiden Instrumente ausgeführt werden konnte. Da es ferner in der praktischen Ausführung leicht ist, einen Kreis ganz exakt zu zeichnen, es hingegen sehr schwer ist, eine Gerade genau zu zeichnen, so hat es Geometer gegeben, die es für der Mühe wert gehalten haben, ein System geometrischer Konstruktionen aufzustellen, die nur die alleinige Anwendung des Zirkels erfordern; so entstand „die Geometrie des Zirkels", die in Lorenzo Mascheroni[2]) einen hervorragenden Bearbeiter gefunden hat.

6. Die Leichtigkeit des Begriffes und der Zeichnung des Kreises liefs die trügerische Hoffnung erstehen, die Länge desselben, sowie die von ihm umschlossene Fläche messen zu können. Auf den sehr alten Ursprung dieser Frage, die sowohl von theoretischem wie von praktischem Interesse ist, haben wir schon vorhin (Nr. **4**) hingewiesen. Wir fügen nunmehr hinzu, dafs wir die ersten wichtigen Beiträge zur Lösung derselben dem Archimedes verdanken, der nachwies, dafs zwischen ihnen eine so enge Beziehung bestehe, dafs, wenn man eine dieser Gröfsen als fest wählt, es die andere auch ist, und die kindliche Beweisführung des Antiphon und Bryson in eine Methode umwandelte, mit beliebig grofser Annäherung den Wert des Verhältnisses irgend eines Kreisumfanges zu seinem Durchmesser zu berechnen. Andere wichtige Beobachtungen über denselben Gegenstand wurden von dem berühmten niederländischen Mathematiker Huygens, und ferner von dem hervorragenden deutschen Geometer Lambert gemacht. Diesen gelang es, die Irrationalität von π nachzuweisen, und dies wiederum veranlafste Legendre noch tiefer gehende Untersuchungen anzustellen[3]); diese führten ihn zu dem Schlusse, dafs auch π^2 irrational ist. Überdies äufserte der letztere Gelehrte die

1) „Körperliche Örter" sind hingegen die Kegelschnitte und „Lineare Örter" alle anderen Linien.

2) *La geometria del compasso.* (Pavia 1797.)

3) Diese zugleich mit den vorhergehenden der obengenannten Geometer

Vermutung: „Il est même probable que le nombre π n'est pas même compris dans les irrationelles algébriques, c'est-a-dire qu'il ne peut pas être la racine d'une équation algébrique d'un nombre fini de termes dont les coëfficients sont rationels". Dafs diese Vermutung mit der Wahrheit sich deckt, wurde 1882 von F. Lindemann gezeigt[1]), dem das hohe und unbestreitbare Verdienst zukommt, endlich eine Frage gelöst zu haben, die Ströme von Tinte hat fliefsen lassen, die zu langen und lebhaften Polemiken Veranlassung geboten und zum Umsturz von Ansichten geführt hat, die man ganz gefestigt glaubte. Der Lindemannsche Satz gestattet ferner auch ohne vorherige Prüfung jegliche Quadratur oder Rektifikation des Kreises, die durch eine algebraische Kurve ausgeführt wird, speziell solche mit Lineal und Zirkel ausgeführte, als falsch zu erweisen.

7. Die leichte Definition des Kreises, die in so scharfem Kontraste mit der schwierigen Definition der Geraden steht (vgl. 2), liefs die Hoffnung entstehen, die Gerade entstehen zu lassen, indem man vom Kreise ausging. Es ist dies eine geniale Idee, deren Keime sich schon im Anhange eines Briefes finden, den Leibniz am 8. Sept. 1679 an Huygens richtete[2]). Eben diese Idee wurde viel später von Johann Bolyai entwickelt, der daraus das Fundament jenes geometrischen Systems bildete, welches seinen Namen ruhmbekränzt der fernsten Nachwelt überliefern wird.

Vergeblich wäre der Versuch alle Untersuchungen der reinen und angewandten Mathematik aufzuzählen, in denen der Kreis eine Rolle spielt[3]), oder ein möglichst vollkommenes Verzeichnis der an ihm beobachteten Eigenschaften aufzustellen. Nur eine deskriptive und eine Mafseigenschaft wollen wir hervorheben: erstere besteht darin, dafs alle Kreise der Ebene durch die beiden unendlich entfernten imaginären Kreispunkte (oder die cyklischen Punkte) der Ebene gehen; letztere darin, dafs die Kreislinie von allen Linien, welche eine gleichgrofse Fläche umschliefsen, die kleinste ist. Wir schliefsen dieses Kapitel mit der Bemerkung, dafs man neuerdings die Möglichkeit entdeckt hat, den Kreis als Element des Raumes zu benutzen, und so hat man eine „Geometrie des Kreis-Raumes" aufgestellt, die gewissermafsen ein Analogon ist zu der von Plücker auf die Betrachtung der Geraden gegründeten.

---

finden sich zu dem interessanten Werkchen von F. Rudio, *Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre, Vier Abhandlungen über die Kreismessung* (Leipzig 1892).

1) Vgl. F. Klein, *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementarmathematik* (Leipzig 1895).

2) *Leibniz,* herausg. v. Gerhardt, B. II (Berlin 1850) S. 20—25.

3) Poppe, *Ausführliche Geschichte der Anwendung aller krummen Linien in mechanischen Künsten und in der Architektur, seit den ältesten Zeiten bis zu Anfang des 19. Jahrhunderts* (Nürnberg 1802) S. 1—98 und 130—194.

Drittes Kapitel.

Die Kegelschnitte.

8. Die Entdeckung der Kegelschnitte wird von Proklus dem Menächmus zugeschrieben, einem Schüler des Eudoxus von Knidos und vielleicht Mathematiklehrer Alexanders von Makedonien. Daher rührt die in einem antiken Werke vorkommende Bezeichnung „Triade des Menächmus", in dem Sinne „ebene Schnitte eines geraden Kreiskegels". Von der Parabel und Hyperbel kannte Menächmus die Fundamentaleigenschaft, die man in kartesischen Koordinaten durch die Gleichungen ausdrückt

$$y^2 = 2px \quad \text{und} \quad xy = k^2,$$

und wufste diese in geschickter Weise auf zwei verschiedenen und zugleich einfachen und eleganten Wegen zur Lösung des Problems von der Würfelverdoppelung (Delisches Problem) zu benutzen. Es wäre jedoch eine durch nichts gerechtfertigte Kühnheit, zu behaupten, dafs Menächmus auch die charakteristischen Eigenschaften der Asymptoten gekannt hätte. Behauptet wird ferner, dafs er schon die drei Hauptformen, die ein Kegelschnitt darbieten kann, erhalten habe, indem er einen geraden Kegel mit einer Ebene senkrecht zu einer Erzeugenden schnitt; demnach hat die Kurve keinen, einen oder zwei Punkte im Unendlichen, je nachdem die Öffnung des Kegels kleiner, gleich oder gröfser als ein rechter Winkel ist. In welcher Weise er jedoch die Zeichnung der Kegelschnitte ausgeführt hat, die doch unumgänglich notwendig war, um die von ihm erdachte Lösung des Delischen Problems wirklich auszuführen[1]), ist eine ungelöste Frage, und auch heute unlösbar, da von den Werken des Menächmus keine Spur erhalten ist.

Dasselbe Los traf die Schriften Aristaeus des Älteren, eines nur ungenügend bekannten Geometers, der fünf Bücher *Über körperliche Örter* und vielleicht ebensoviele *Über die Schnitte des Kegels* schrieb, und dem man die Namen zuschreibt „Schnitte des spitzwinkligen", „Schnitte des rechtwinkligen" und „Schnitte des stumpfwinkligen Kegels", um diejenigen Kurven zu bezeichnen, die wir heute nach Apollonius bezüglich Ellipse, Parabel und Hyperbel nennen. Wenn das Gerücht wahr ist, so würde aus diesen Schriften des

1) Diese mit Rücksicht auf die zahllosen Anwendungen der Kurve 2. Ordn. praktisch höchst interessante Frage (vgl. Poppe a. O. S. 99—110 und 194—209) hat im Laufe der Zeit viele Lösungen gefunden, die Braunmühl in der lesenswerten Arbeit aufzählt: *Historische Studie über die organische Erzeugung ebener Kurven von den ältesten Zeiten bis zum Ende des 18. Jahrhunderts* (Katalog mathem. u. math.-physikalischer Modelle. München 1892).

Aristäus Euklid bei der Abfassung einer eigenen Bearbeitung der hier behandelten Kurven in reichlichem Maſse geschöpft haben. Sie sind verloren gegangen und waren es auch schon vom 6. Jahrhundert unserer Zeitrechnung an, und es ist sogar zweifelhaft, ob sie zu Zeiten des Pappus noch vorhanden waren; jedenfalls aber bringen uns verschiedene Umstände zu dem Glauben, daſs der bedeutende Alexandriner jeden Kegelschnitt für sich betrachtet hat, indem er ihn vermittelst jener Eigenschaft charakterisierte, die wir durch die bekannte kartesische Gleichung ausdrücken

$$y^2 = 2px + qx^2;$$

daſs er übrigens die Asymptoten derselben kannte und die Anwendung auf das Delische Problem, und daſs er zum wenigsten Forschungen über die Ähnlichkeit der Kegelschnitte und ihrer Segmente anzustellen begonnen hat. — Man hat auch geglaubt, dem Archimedes eine methodische Bearbeitung der Kegelschnitte zuschreiben zu müssen und verstieg sich sogar zu der Behauptung, daſs Apollonius ihn in so unverschämter Weise ausgeplündert habe, daſs er den Beinamen des Plagiators verdiene. Aber wenn auch die tiefen und weitgehenden Kenntnisse des Syrakusaners über die fraglichen Kurven bestätigen, daſs er im stande gewesen wäre, eine solche abzufassen, so berechtigt doch nichts zu der Behauptung, daſs er sie thatsächlich geschrieben habe.

Dennoch verdankt die Theorie der Kegelschnitte dem Archimedes wenigstens zwei bemerkenswerte Fortschritte: der eine, die von ihm auf zweierlei Art ausgeführte Quadratur eines Parabelsegmentes — das erste Beispiel der exakten Berechnung eines Flächenstückes, das nicht bloſs von Geraden oder Kreisbögen begrenzt ist — der andere, die von ihm bemerkte Beziehung zwischen einer Ellipse und dem über ihrer groſsen Axe als Durchmesser beschriebenen Kreise und die Anwendung derselben auf die Quadratur jener Kurve. Daher kann man sagen, daſs es dem Archimedes gelungen ist, all' die Fälle der Quadratur eines Kegelschnittes, die sich algebraisch behandeln lassen, auszuführen, indem die Quadratur der Hyperbel ja Logarithmen verlangt.

9. Alle diese Bearbeiter der Kegelschnitt-Theorie — Archimedes höchstens ausgenommen — gehören der Vorgeschichte dieser Kurven an; die wirkliche Geschichte beginnt mit Apollonius von Pergae, dem wir eine „instauratio ab imis fundamentis“ dieser ganzen Disziplin und eine treffliche Darlegung derselben verdanken, die im Laufe der Jahrhunderte zu den Klassikern der exakten Wissenschaft gerechnet wurde, und die noch heute nach zweitausend Jahren Bewunderung einflöſst und eingehendes Studium verdient. Nach Einigen würden die Neuerungen, die man dem Geometer von Pergae zuschreibt, darin

bestanden haben, dafs er die Existenz aller drei Arten von ebenen Schnitten an jedem geraden Kegel bemerkt habe, aber weil es unzulässig scheint, dafs diese Beobachtung in der That den älteren Geometern gänzlich entgangen sein sollte, so ist es wahrscheinlicher, dafs die von ihm vorgeschlagene Änderung vielmehr aus methodischen Gründen aufgestellt sei, und in der Wahl des Ausgangspunktes von jener allgemeinen Definition eines Kegelschnittes bestanden habe, die zu allen möglichen Gestalten führt. Dies zugegeben, wird es klar, warum er gezwungen wurde, die frühere Nomenklatur des Aristäus aufzugeben (vgl. Nr. 8) und eine neue aufzustellen, die noch heute in Gebrauch ist.

Mit dem Tode des Apollonius beginnt der Verfall der griechischen Mathematik; kein Wunder also, wenn nach ihm die Theorie der Kegelschnitte im Stillstande blieb. Als einzigen Fortschritt kann man eine Stelle der *Mathematischen Sammlung* des Pappus von Alexandrien, welche die Kegelschnitte als Örter derjenigen Punkte betrachtet, deren Abstände von einem festen Punkte und einer festen Geraden in einem konstanten Verhältnisse stehen. Was nun eine bekannte Arbeit des Serenus (von Antissa oder Antinuopolis) betrifft, in welcher bewiesen wird, dafs die von einer Ebene mit einem Cylinder erzeugten Schnitte elliptische seien, so erwähnen wir diese nur als unzweifelhaftes Anzeichen des tiefen geistigen Niveaus jenes Zeitalters, in welchem sie geschrieben wurde.

10. Auch in der darauf folgenden Zeit, dem Mittelalter, verblieb die Theorie, deren Entwickelung wir verfolgen, fast auf demselben Standpunkte, in welchem Apollonius sie verlassen hatte. Später aber waren es zwei Entdeckungen von hervorragender Bedeutung, die ihr neues Leben einflöfsen und sie wieder zur Geltung bringen sollten; nämlich die Entdeckung Keplers, dafs die von den Gestirnen unseres Planetensystems beschriebenen Bahnlinien nichts anderes sind als Ellipsen, welche die Sonne als Brennpunkt haben; dann die Entdeckung der analytischen Geometrie, die zu dem Schlusse führte, dafs in dem kartesischen System alle Kegelschnitte durch Gleichungen zweiten Grades zwischen den Koordinaten ihrer Punkte darstellbar sind, mit Ausnahme der Geraden, die durch eine solche ersten Grades dargestellt werden. Von da ab wurden nun die Kegelschnitte mehr als „Kurven zweiten Grades" betrachtet, denn als „körperliche Örter", ebenso wie die Geraden vorzugsweise als Linien erster Ordnung betrachtet wurden[1]).

---

1) Da die Kegelschnitte Kurven 2ter Ordnung sind, so nannte Bellavitis sie *Dittome,* da sie 2ter Klasse sind, *Diattomene*; analog bezeichnete er mit *n-tome* Kurven von der n^{ten} Ordnung und mit *n-tomene* solche n^{ter} Klasse. Diese Bezeichnung wurde jedoch nicht angenommen und fiel bald in Vergessenheit. Von Cayley hingegen wurden die Kurven dritter Ordnung *Tertians*, die 4ter *Quartians* u. s. w. benannt.

Bekanntlich führte die Erfindung der Koordinaten viele Zeitgenossen und unmittelbaren Nachfolger Descartes und Fermats von Untersuchungen auf dem Gebiete der reinen Geometrie weg, so grofs war die hervorragende Anwendbarkeit und wunderbare Macht des neuen Hilfsmittels. Nichtsdestoweniger fehlte es auch in dieser Epoche der Geometrie, im Sinne der Alten betrieben, nicht an tüchtigen Bearbeitern, durch deren Bemühungen sich an die Theorie der Kegelschnitte bemerkenswerte Fortschritte knüpften. Man erinnere sich nur, dafs Desargues die fruchtbaren Begriffe der Projektion und Involution einführte und dadurch wichtige neue Sätze aufstellte, dafs Pascal die berühmte Beziehung entdeckte, die zwischen 6 beliebigen Punkten eines Kegelschnittes besteht und diese zur Grundlage einer neuen methodischen Bearbeitung der Kurven zweiter Ordnung machte[1]); ferner, dafs La Hire weitgehende Anwendungen von den Begriffen Pol und Polare machte und insbesondere bei der Betrachtung der Polare eines Brennpunktes zum Begriff der Direktrix gelangte. Ungerecht würde es auch sein, die von Newton entdeckte „organische Erzeugung der Kegelschnitte“ zu übergehen, eine mustergültige Frucht derartiger Studien, und die eleganten Konstruktionen, welche dieser grofse Mathematiker angegeben hat für Kegelschnitte, die fünf Bedingungen unterworfen sind.

Erwähnt werden müssen auch die Namen Mydorge und Boscovich, ebenso die Arbeiten des Grafen Fagnano und Eulers über die Rektifikation der Ellipse, die gehörig fortgesetzt und in bekannter Weise erweitert einen neuen Zweig der Analysis hervorgerufen haben, nämlich die Theorie der elliptischen Funktionen. Für uns ist besonders wichtig die Bemerkung, dafs in den Schriften des grofsen italienischen Mathematikers[2]) sich schon die in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten durch die Gleichung $x^2 + 2y^2 = a^2$ darstellbare Kurve erwähnt findet; man bezeichnet diese gewöhnlich mit dem Namen Ellipse des Fagnano.

11. Neue Methoden und neue Lehrsätze für die Theorie, deren Entwickelungstadien wir hier verfolgen, verdanken wir den Geometern aus dem Anfange des 19. Jahrhunderts. Als erster möge Brianchon genannt werden, der seinen Namen mit dem Pascals verknüpfte durch den zum Pascalschen dualen Satze und im Verein mit Poncelet jenen

---

1) Bekanntlich ist die hierauf bezügliche Arbeit Pascals verloren gegangen, nur die von Leibniz kopierte Vorrede ist erhalten und wurde neuerdings veröffentlicht von Gerhardt (*Der Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern,* I. Bd. Berlin 1899). Daselbst wird zur Bezeichnung eines geschlossenen Kegelschnittes (Ellipse u. Kreis) das Wort *Autobole* benutzt.

2) Vgl. besonders den Aufsatz *Metodo per misurare gli archi di quella ellisse conica, il cui asse maggiore è medio proporzionale tra l'asse minore e il doppio del medesimo asse minore* (Produzioni matematiche B. II, Pesaro 1750).

besonderen Kegelschnitt untersuchte, der in Bezug auf die Hyperbel gewissermafsen zu dem auf die Ellipse bezogenen Kreise analog ist, nämlich der „gleichseitigen oder rechtwinkligen Hyperbel"[1]). Übrigens betrachtete Poncelet mit Hülfe der von ihm erfundenen Methoden die Kegelschnitte als zum Kreise homologe Kurven und legte die ganze Fruchtbarkeit des so gewonnenen Begriffes klar.

Kurz darauf brachten J. Steiner in Deutschland und M. Chasles in Frankreich den alten Begriff des Doppelverhältnisses wieder zur Anwendung und zeigten so die Möglichkeit, die Kurven zweiter Ordnung aufzufassen als Erzeugnisse von Grundgebilden erster Stufe in projektivischer Beziehung. Staudt ferner zeigte nicht nur, wie man jene Definition von jeglicher metrischen Zuthat befreien könne, sondern auch, wie man in gleicher Weise die reellen und imaginären Kegelschnitte definieren könne, indem man beide Arten betrachtet als Ordnungs-Kurven ebener Polaritäten.

In der Zwischenzeit wandten die Analytiker auf die „Triade des Menächmus" alle die Koordinatenmethoden an, die nach und nach erfunden wurden, insbesondere die charakteristischen Fortschritte der Geometria intrinseca (Anwendung der natürlichen Koordinaten, Bogenlänge und Winkel der Tangente, Krümmungsradien)[2]); überdies wurde eine Beziehung bemerkt zwischen der Geometrie der Geraden im Raume und der Totalität der Kegelschnitte einer Ebene, die einer gewissen Bedingung genügen[3]). Schliefslich wurden die Grundlagen einer Geometrie des Raumes gelegt, die den Kegelschnitt als eigentliches Grundelement benutzt.

Das sind vielleicht alle neuen Ausblicke, welche die moderne Geometrie der Theorie der Kegelschnitte eröffnet hat, aber wie könnten wir uns einbilden, auch nur eine Idee aller der besonderen Eigenschaften anzugeben — unter denen sich sogar die „sozial properties" finden[4]) — die an dieser berühmten Kurve sich ergeben haben. Eine einfache Sammlung der ausgesprochenen Sätze, die sich darauf be-

1) Es ist die Kurve, die O. Terquem seinen Landsleuten kurz *Hypercle* zu benennen vorschlug (Nouv. Ann. X, 1851, S. 127).

2) E. Cesàro, *Lezioni di geometria intrinseca* (Neapel 1896) S. 38—39; G. Pirondini, *Sur la conique osculatrice des lignes planes* (Jornal di Teixeira, XI, 1894); G. Scheffers, *Einführung in die Theorie der Curven in der Ebene und im Raume* (Leipzig 1901) S. 53—54. Der Leser, der genauere Angaben über den Ursprung, die Entwickelungsstadien und den sonstigen Stand dieser Theorie wünscht, findet diese in einem Aufsatze von E. Wölffing: *Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den natürlichen Koordinaten* (Bibliotheca Mathematica III, Folge I (Leipzig 1900).

3) S. einen Brief von L. Cremona an E. Beltrami in B. VIII des Giornale di Battaglini. 1870.

4) S. die merkwürdige Schrift: *The romance of mathematics*, besprochen in *Nature*. May 8. 1888.

ziehen, würde einen gewichtigen Band füllen[1]. Wir müssen es demnach vermeiden, eine Arbeit zu übernehmen, die, wenn auch hochinteressant, dennoch die vorliegende Schrift von der ihr zugewiesenen Route abbringen würde und das, nachdem sie kaum die Anker gelichtet hat. Überdies sind die analytischen sowohl, als auch die synthetischen Lehrbücher über die Theorie, der dieses Kapitel gewidmet ist, so zahlreich und so wertvoll, dafs es ziemlich leicht ist, sich einen Begriff zu machen von der Höhe, auf welche zwanzig Jahrhunderte fast ununterbrochener Arbeit eine der schönsten Disziplinen, welche die Geometrie aufweist, gebracht haben.

1) Bezügl. der praktischen Anwendungen siehe Poppe a. O. S. 99—110 und 194—209.

II. Abschnitt.

Kurven dritter Ordnung.

Erstes Kapitel.

Klassifikation.

12. Während man daran war, die Theorie der Kegelschnitte zu entwickeln, sammelte sich auch, sozusagen unbewuſst, das Material für die Lehre von den Kurven höherer Ordnung an. Unter diesem nehmen die alten Untersuchungen über einige Kurven dritter und vierter Ordnung, die wir in diesem und im folgenden Abschnitte als Spezialfälle behandeln werden, einen hervorragenden Platz ein. Jedoch die allgemeine Theorie der Kurven einer bestimmten Ordnung, im Speziellen die der Kurven dritter Ordnung, konnte nicht entstehen, und entstand auch nicht eher, als nachdem man zu den Begriffen „Ordnung einer Kurve“ und „allgemeine Kurve ihrer Ordnung“ gelangt war, das ist nach der Erfindung der Kartesischen Methode, nach welcher diese Begriffe naturgemäſs sich ergeben. Es entspricht dieser Umstand der Thatsache, daſs seit dem Geburtsjahre der analytischen Geometrie, 1631[1]), weniger als 30 Jahre verflossen waren, als Newton[2]), indem er eine Klassifikation der ebenen Kurven dritter Ordnung ausführte, den Grund für ein methodisches Studium dieser Kurven legte. Dieses Studium wurde von da an mächtig fortgesetzt und hat inzwischen so viele und bedeutende Resultate gezeitigt, daſs die genannten Kurven zu denjenigen geometrischen Gebilden gezählt werden, deren Kenntnis beinahe eine vollständige ist[3]). Als Grundsteine ihrer Theorie kann man ansehen: 1. Die verschiedenen Methoden, sie geometrisch zu konstruieren.

---

1) Im J. 1637 wurde nämlich die *Geometrie* von Descartes veröffentlicht.

2) Vgl. die wertvolle Abhandlung von W. W. Rouse Ball, *On Newton classification of cubic curves* (Proc. of. the London Math. Soc. XXII 1891), auf welche wir mehrmals im Verlaufe dieses Abschnitts zurückkommen werden.

3) Man sehe auch übrigens die Arbeiten von Plücker, Salmon, Cremona und Clebsch-Lindemann über ebene Kurven im allgemeinen und die beiden Spezialarbeiten: Durège, *Die ebenen Kurven dritter Ordnung* (Leipzig 1871) und Schroeter, *Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung* (Leipzig 1888).

2. Die Sätze, die sich auf die Konfiguration ihrer Wendepunkte beziehen. 3. Den Salmonschen Satz[1]), der aussagt, **dafs das Doppelverhältnis der vier Tangenten, die man von einem beliebigen Punkte der Kurve (die keinen singulären Punkt besitzt) an dieselbe ziehen kann, konstant ist**; der Wert dieses Doppelverhältnisses ist eine Gröfse, die durch projektivische Transformationen der Kurve nicht verändert wird, und ist auch die einzige Invariante, welche die Kurve besitzt.

13. Von den Sätzen aus der zweiten der oben angeführten Gruppen richten wir unser Augenmerk zunächst auf den, der besagt, **dafs eine reelle[2]) Kurve dritter Ordnung wenigstens einen reellen Wendepunkt besitzt.** Infolge dessen können wir diesen reellen Wendepunkt zur Ecke A_3 des Fundamentaldreiecks eines homogenen Koordinatensystems (x_1, x_2, x_3) nehmen, auf welches wir die reelle Kurve dritter Ordnung Γ beziehen, und die entsprechende Tangente als eine der durch A_3 gehenden Seiten, a_2 des genannten Dreiecks. Die Gleichung der Kurve erhält dann folgende Gestalt:

$$x_1^3 = x_2\,[a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{13}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2]$$

oder:

$$a_{33}x_1^3 = x_2[(a_{11}a_{33} - a_{13}^2)x_1^2 + (a_{22}a_{33} - a_{23}^2)x_2^2 + (a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3)^2 + 2(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23})x_1x_2].$$

Machen wir dann eine Koordinatenverschiebung, die durch die Formel

$$x_3' = a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3$$

bestimmt wird, so kann man schreiben

$$x_2x'^2_3 = a_{33}x_1^3 + (a_{13}^2 - a_{11}a_{33})x_1^2x_2 + (a_{23}^2 - a_{22}a_{33})\,x_2^3 + 2(a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33})x_1x_2^2.$$

Wenn wir nun der Einfachheit halber die Bezeichnungen ändern, so sehen wir schliefslich, dafs, wenn wir das System, worauf sie bezogen wird, passend wählen, die Gleichung jeder reellen Kurve dritter Ordnung sich auf folgende Form bringen läfst:

$$x_2x_3^2 = a_0x_1^3 + 3a_1x_1^2x_2 + 3a_2x_1x_2^2 + a_3x_2^3 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Wird nun die Seite a_2 des Fundamentaldreiecks ins Unendliche projiziert, so dafs man $x_1 = x$, $x_2 = 1$, $x_3 = y$ setzen kann, so geht Gleichung (1) über in

$$y^2 = a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

welche Gleichung in kartesischen Koordinaten eine Kurve darstellt, die

---

1) *Théorèmes sur les courbes du troisième degré* (Crelles Journ. XLII, 1851).

2) Wir bezeichnen im allgemeinen eine Kurve als reell, wenn sie durch eine Gleichung mit reellen Koeffizienten dargestellt wird, obwohl sie dann auch nur eine endliche Zahl (Null einbegriffen) reeller Punkte enthalten kann.

man divergente Parabel genannt hat. Projiziert man hingegen die Seite a_3 ins Unendliche und setzt daher $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$, so erhält man die folgende kartesische Gleichung

$$y = a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 y + 3 a_2 x y^2 + a_3 y^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Wir werden im Folgenden auf diese Gleichung zurückkommen, wollen indessen bemerken, dafs Gleichung (2) noch weiterer Umformungen fähig ist. Wählen wir nun in der That die Ecke A_2 in geeigneter Weise, so läfst sich (1) zurückführen auf folgende Gleichung

$$x_2 x_3^2 - x_1 (x_2 - x_1)(k^2 x_2 - x_1) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Die vom Punkte A_3 an die Kurve gezogenen Tangenten haben die Gleichungen:

$$x_2 = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 - x_1 = 0, \quad k^2 x_2 - x_1 = 0,$$

und daher ist ihr Doppelverhältnis k^2; dieses ist also die absolute Invariante der Kurve. Bezeichnen wir nun mit ϱ einen Proportionalitätsfaktor und mit λ einen Parameter, so wird der Gleichung (4) genügt, indem man setzt

$$\varrho x_1 = \lambda, \quad \varrho x_2 = \lambda^3, \quad \text{durch } \varrho x_3 = \sqrt{(1 - \lambda^2)(1 - k^2 \lambda^2)}.$$

Setzt man aber $\lambda = sn\, u$, unter der Annahme, dafs k der Modulus sei, so hat man weiter

$$\varrho x_1 = sn\, u, \quad \varrho x_2 = sn^3 u, \quad \varrho x_3 = cn\, u \cdot dn\, u. \quad . \quad . \quad (5)$$

Diese Gleichungen liefern eine parametrische Darstellung einer Kurve dritter Ordnung vermittels der Jakobischen elliptischen Funktionen[1]), die entsprechende Bedingung der Collinearität[2]) dreier Punkte lautet:

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0.$$

Auf eine analoge Darstellung durch die Weierstrafs'schen elliptischen Funktionen trifft man, wenn man die Gleichung (2) benutzt. Durch eine einfache Verlegung des Koordinatenanfangs verwandelt diese sich in folgende andere:

$$y^2 = a_0 x^3 + 3 a_2 x + a_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Betrachten wir nun eine Funktion $\wp$, die mit einer davon abgeleiteten $\wp'$ verbunden ist durch die Bezeichnung:

$$\wp'^2 z = 4 \wp^3 z + \frac{3 a_2}{\sqrt[3]{\frac{a_0}{4}}} \wp z + a_3,$$

und setzt man

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{a_0}} \cdot \wp z, \quad y = \wp' z, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

---

1) A. Harnack, *Über die Verwertung der elliptischen Funktionen für die Geometrie der Kurven dritten Grades* (Math. Annalen, Bd. IX, 1876).

2) „Collinearität" bedeutet hier und in ähnlichen Fällen das Liegen auf derselben Geraden.

so wird der Gleichung (6) identisch genügt, und somit können die Gleichungen (7) zur parametrischen Darstellung der Kurve (6) dienen. Unterwirft man die letztere einer beliebigen projektivischen Transformation, so ergiebt sich, dafs jede ebene Kurve dritter Ordnung mittels Gleichungen folgender Form dargestellt werden kann

$$\varrho x_i = a_i \wp z + b_i \wp' z + c_i \ldots\ldots (i = 1, 2, 3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Die Bedingung der Kollinearität dreier Punkte ist auch in diesem Falle

$$z_1 + z_2 + z_3 \equiv 0$$ [1]).

14. Die Gleichungen (2) und (3) im Vorhergehenden liefern auch die Antwort auf folgende sehr wichtige Fragen: Trifft es auch für die Kurven dritter Ordnung zu, wie für die zweiter Ordnung, dafs alle aus einer einzigen durch Projektion abgeleitet werden können?, und im verneinenden Falle, welches sind die Fundamentaltypen, aus welchen man durch Projektion die Formen aller übrigen erhalten kann? Zur Beantwortung nehmen wir wieder die Gleichung (2) und schreiben sie, wie folgt:

$$y^2 = a_0 (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

wobei wir a_0 immer positiv nehmen und im übrigen die Bezeichnungen so wählen, dafs, wenn a_1, a_2, a_3 reell sind, $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$. Dann ist klar, dafs Gleichung (2′) ihrer Natur gemäfs und infolge der Gröfse der a_1, a_2, a_3 nur folgende fünf Fälle darbieten kann:

I. a_1, a_2, a_3 sind reell und verschieden. Dann giebt es auf der x-Axe die Punkte A_1, A_2, A_3, die als Abscissen die Werte a_1, a_2, a_3 haben; man sieht, dafs, um reelle Punkte der Kurve zu bekommen, die Voraussetzung nötig ist: $a_1 \leqq x_1 \leqq a_2$, oder auch $x \geqq a_3$; es ist leicht daraus abzuleiten, dafs die Kurve aus einem Ovale besteht, das durch die Punkte A_1 und A_2 geht, und einem unbegrenzten Zweige, der durch A_3 geht; sie wurde von Newton Parabola campaniformis cum ovali genannt[2]), von Cayley Complex[3]).

II. a_1 ist reell, a_2 und a_3 konjugiert imaginär. Schreiben wir Gleichung (2′) für diesen Fall folgendermafsen

$$y^2 = a_0 (x - a_1) [(x - p)^2 + q^2],$$

---

1) Halphen, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications* II, Paris 1888. Cap. XI.

2) *Enumeratio linearum tertii ordinis* (Londini 1706), neugedruckt im I. Bd. von *J. Neutonii opuscula mathematica philosophica et philologica* (Lausoniae et Genevae MDCCXLIV).

3) S. die Schriften *On the inflexions of the cubical divergent parabolas* (Quart. Journ. B. VI, 1864); *On the classification of cubic curves* (Cambridge Trans. XI, Part I, 1866) und *On the cubical divergent parabolas* (Quart. Journ. IX, 1868), neugedruckt in Bd. V u. VI von *The collected papers of A. Cayley* (Cambridge 1892—93).

so sehen wir, dafs wir reelle Punkte der Kurve nur dann erhalten, wenn $x \geqq a_1$; daraus kann man die Folgerung ziehen, dafs die Kurve nur aus einem einzigen unbegrenzten Zweige besteht; es ist die Parabola pura Newtons[1]), die Simplex Cayleys. — Diese Kurve ist ebenso wie die vorige ohne singuläre Punkte. I und II sind auch die typischen Fundamentalformen aller ebenen Kurven dritter Ordnung mit nicht verschwindender Determinante. Ist eine Kurve durch ihre Gleichung in kartesischen oder homogenen Koordinaten gegeben, so genügt es, um zu erkennen, ob sie von der Form I oder II ist, die absolute Invariante zu berechnen; ergiebt sich diese als reell, so ist die Kurve eine Complex, ist sie imaginär, so ist sie eine Simplex. Somit ist eine Complex jede harmonische Kurve dritter Ordnung, eine Simplex jede aequianharmonische[2]). Für die Kurven I und II ist auch in vielen Fällen die Anwendung folgender kanonischer Form der Gleichung sehr nützlich:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6kx_1x_2x_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

die man erhält, wenn man als Fundamentaldreieck dasjenige der Wendepunktsdreiecke nimmt, welches reell ist.

III. $a_1 = a_2$ und a_3 reell. Die Gleichung (2′) wird in diesem Falle

$$y^2 = a_0 (x - a_2)^2 (x - a_3)$$

und zeigt, dafs der Punkt A_2 $(a_2, 0)$ ein isolierter Punkt der Kurve ist; sie enthält ferner unzählig viele reelle Punkte, die den Werten $x \geqq a_3$ entsprechen. Von Newton wurde diese *Parabola punctata*, von Cayley *Acnodal* genannt.

IV. a_1 und $a_2 = a_3$ reell. Aus der Gleichung

$$y^2 = a_0 (x - a_1)(x - a_2)^2$$

geht hervor, dafs A_2 $(a_2, 0)$ ein Doppelpunkt der Kurve ist, von der man alle reellen Punkte erhält durch $x \geqq a$. Es ist die *Parabola nodata* Newtons, die *Crunodal* Cayleys.

V. Wenn schliefslich **die drei Werte a_1, a_2, a_3 unter sich gleich und reell sind,** so kann man Gleichung (2′) schreiben

$$y^2 = a_0 (x - a)^3;$$

die entsprechende Kurve hat eine Spitze, und ist daher von Newton *Parabola cuspidata*, von Cayley *Cuspidal* genannt worden. Aus der oben in kurzen Zügen gegebenen Diskussion ergiebt sich der be-

1) Murdoch (*Neutonii genesis curvarum per umbras,* Londini 1746) unterschied drei Arten der reinen Parabel, die er *ampullata, campaniformis* und *neutralis* nannte.

2) Diese wichtige Bemerkung, welche die Gestalt einer Kurve dritter Ordnung mit dem Werte ihrer absoluten Invariante verknüpft, rührt her von Cremona (s. *Considerazioni sulle curve piane del terz' ordine,* Giorn. di Mat. II 1864).

rühmte von seinem Entdecker, Newton „genesis curvarum per umbras“ betitelte Satz, der die zu Anfang dieser Nr. gestellten Fragen beantwortet, und folgendermaſsen lautet: **Jede ebene Kurve dritter Ordnung kann in eine der fünf divergenten Parabeln projiziert werden.**

Ein Gegenstück zu diesem Satze bildet ein anderer nicht wenig bemerkenswerter, den wir Chasles verdanken[1]). Um diesen aufzustellen, benutzen wir die Gleichung (3) und bemerken, daſs sie eine Kurve darstellt, die den Koordinatenanfang als Mittelpunkt hat, da sie sich nicht ändert, wenn man die Vorzeichen beider Koordinaten umkehrt. Schreiben wir sie nun in der Form

$$y = a_0 (x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y)(x - \alpha_3 y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$

so sieht man, daſs sie eine durchaus analoge Diskussion zuläſst, wie diejenige, die wir bei (2′) gemacht haben, daher werden die entsprechenden Kurven sich ebenfalls in fünf verschiedene Kategorieen einteilen lassen. Somit ergiebt sich hieraus der folgende Satz von Chasles: **Jede ebene Kurve dritter Ordnung kann in eine der fünf mit Centrum versehenen Kurven dritter Ordnung projiziert werden.**

15. Bei der Einteilung aller ebenen Kurven dritter Ordnung in fünf Kategorieen blieb Newton nicht stehen; indem er auch die Art und Weise betrachtete, wie sie sich im Unendlichen verhalten, wies er die Existenz von 72 Arten nach, zu denen noch sechs andere hinzugefügt wurden. Für deren Benennung wandte er eine Nomenklatur an, deren Wesen aus folgenden seinen Worten hervorgeht: „Enumerando curvas horum casuum hyperbolam vocamus Inscriptam, quae tota jacet in assymptotôn angulo ad instar hyperbolae conicae; Circumscriptam, quae asymptotos secat et partes abscissas in sinu suo amplectitur; Ambiguam, quae uno crure infinito inscribitur et altero circumscribitur; Convergentem, cujus crura concavitate sua se invicem respiciunt et in plagam eandem diriguntur; Divergentem cujus crura convexitate sua se invicem respiciunt et in plagas contrarias diriguntur; Cruris contrariis praeditam, cujus crura in partes contrarias convexa sunt, et in plagas contrarias infinita; Conchoidalem quae vertice concava et cruris divergentibus ad asymptoton applicatur; Anguineam, quae flexibus contrariis asymptoton secat, et utrimque in crura contraria producitur; Cruciformem, quae conjugatam decussat; Nodatam, quae se ipsa decussat in orbem redeundo; Cuspidatam, cujus partes duae in angulo contactus concurrunt et ibi terminantur; Punctatam quae conjugatam habet infinite parvam, id est punctum; et Puram, quae per impossibilitatem duarum radicum, ovali, nodo, cuspide et puncto conjugato privatur. Eodem sensu parabolam quoque convergentem, divergentem, cruris contrariis praeditam, cruciformem, nodatam, cuspidatam, punctatam et

1) S. Note XX des *Aperçu historique* (Bruxelles, 1837).

puram nominabimus.“ — Aufserdem nannte Newton den Hyperbolismus einer Kurve diejenige Kurve, die man aus der Gleichung in kartesischen Koordinaten erhält durch die Transformation $x' = x$, $y' = m\frac{y}{x}$[1]). Die Bezeichnung der übrigen von ihm angewendeten Namen ergiebt sich aus der folgenden Tabelle, die seine Klassifikation zusammenfafst. Zu dieser Klassifikation gelangte der grofse Geometer, indem er durch geeignete Transformation der Koordinaten die kartesische Gleichung aller Kurven dritter Ordnung auf vier kanonische Formen zurückführte, die auch in der folgenden Tabelle angeführt sind; in der letzten Spalte ist die Zahl der Spezies jeder Gattung angegeben, wobei die Zahl derjenigen Spezies, die von späteren Kommentatoren hinzugefügt wurden, besonders angeführt ist.

I. $xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$	$a>0$ Hyperbolae redundantes oder Hyperbolicae		adiametrales		9 Species
			monodiametrales		12+2 „
			tridiametrales		2+2 „
			asymptotibus concurrentibus		9 „
	$a<0$ Hyperbolae deficientes oder Ellipsicae		adiametrales		6 „
			monodiametrales		7 „
	$a=0$	$b \gtrless 0$ Hyperbolae parabolicae	adiametrales		7 „
			monodiametrales		4+2 „
		$b=0$ Hyperbolismi conicae	hyperbolismi centrales	$c>0$, hy. hyperbolae	4 „
				$c<0$, „ ellipsae	3 „
				$c=0$, „ parabolae	2 „
II. $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$	Tridens				1 „
III. $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$	Parabola divergens				5 „
IV. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	Parabola cubica von Wallis				1 „

1) Die Bezeichnung *centraler Hyperbolismus* wurde von Cayley eingeführt, um den Hyperbolismus eines Kegelschnittes mit Centrum zu bezeichnen.

16. Die Newton'sche Klassifikation erlitt im Laufe der Zeit Umwandlungen und erfuhr Verbesserungen, jedoch die angewendete Nomenklatur wurde beibehalten, weil man, auch als man ihre Mängel bemerkt hatte, es für unnötig erachtete die Namen zu verändern, da die Gelegenheit sich ihrer zu bedienen so selten ist. Es sind jedoch jetzt dreifsig Jahre her — als ein Landsmann Newtons, F. W. Newman, es für ratsam hielt, einen vollständigen Wandel zu schaffen, indem er Namen einführte, die er der Botanik, der Architektur oder dem gewöhnlichem Leben entlehnte.[1]) Seine Vorschläge wurden jedoch mit Gleichgültigkeit aufgenommen und fielen alsbald der Vergessenheit anheim. Wenn wir sie hier aus dem Grabe, in dem sie ruhen, wieder hervorrufen, so thun wir dies nicht, um ihnen wieder neues Leben einzuflöfsen, sondern gezwungen von der Herrschaft des hier zu behandelnden Stoffes. Wir begnügen uns daher auch, blos die Namen und die zugehörige Gleichung anzuführen.

1.	$ay^3 = x^2$.		The Whip-Snake. Peitschenschnur.
2.	$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$.		The Calyx. Kelch.
3.	$ay^2 = x^3 + cx + d$	$c = d = 0$.	The Lily. Lilie.
4.		$c > 0, d > 0$.	The Tulip. Tulpe.
5.		$c = 0, d > 0$.	The Hyacinth. Hyazinthe.
6.		$c = 0, d < 0$.	The Convolvulus. Winde.
7.	$ay^2 = x^3 - 3b^2x + 2c^3$	$c > 0, c > b$.	The Pink. Nelke.
8.		$c = b$.	Fuchsia, or Fucia or knotted Calyx. Fuchsia od. Knotenkelch.
9.		$c = -b$.	Anti-Fucia or studded Calyx. Umgekehrte Fuchsie od. Nagelkelch.
10.		$c < b$.	Bulbus. Zwiebel.
11.	$xy^2 = a^3$.		The Palmstems. Palmenstamm.
12.	$xy^2 = 3b^2(a - x)$.		The Archer's Bow. Schützenbogen.
13.	$x(y^2 + b^2) = aby$.		The twisted Bow. Geschweifter Bogen.
14.	$x(y^2 - b^2) = aby$.		The Pilaster. Pilaster.

1) S. den Aufsatz: *On curves of the third degree, here called „tertians“.* (Br. Ass. Rep. Exeter 1869).

Nr.	Gleichung	Bedingung	Name
15.	$x(y^2 - b^2) = ab^2$.		The Archway or Tunnel. Schwibbogen od. Tunnel.
16.	$xy^2 = mx^2 + nx + p,\ m > 0$.		The Vas. Vase.
17.	$xy^2 = m[(x+b)^2 + c^2]$	$b > 0$, $c \neq 0$.	The Urn. Urne.
18.		$b > 0$, $c = 0$.	The studdet Goblet. Nagelbecher.
19.		$b < 0$, $c \neq 0$.	The Goblet. Becher.
20.		$b < 0$, $c = 0$.	The knotted Goblet. Knotenbecher.
21.	$\mu^2 xy^2 = (a - x)^3$.		The Pyramid. Pyramide.
22.	$\mu^2 xy^2 = (a - x)(b - x)^2$	$a > b$.	The Festoon or Cirrus. Guirlande od. Ranke.
23.		$a < b$.	The overstudded Hillock. Hügel mit Nagel oben.
24.	$\mu^2 xy^2 = (a - x)(b + x)^2$		The understudded Hillock. Hügel mit Nagel unten.
25.		$a > 8b$.	The Capito (great Head). Dickkopf.
26.		$a = 8b$.	The Cassis (Helmet). Helm.
27.	$\mu^2 xy^2 = -x^3 + 3bx^2 + 3cx + d$	$d > b^3$.	The Tumulus or Mons. Grabhügel od. Berg.
28.		$d = b^3$.	The Tombstone or Cippus. Grabstein od. Säulenstumpf.
29.		$d < b^3$.	The Sphinx. Sphinx.
30.	$\mu^2 xy^2 = (m - x)(n - x)(p - x)$.		Mountain and Moon. Berg und Mond.
31.	$\mu^2 xy^2 = (m - x)(n + x)(p + x)$	$d > b^3$.	Mountain and Tarn. Berg und See.
32.		$d = b^3$.	Bell and Clapper. Glocke und Klöppel.
33.		$d < b^3$.	Clock and Pendulum. Uhr und Pendel.
34.	$\varrho^2 = a^2 \operatorname{tg} \omega \pm b^2$.		The Cornutus. Gehörnte Kurve.
35.	$\varrho^2 \cos 2\omega = a^2 \operatorname{tg} \omega \pm b^2$.		The Butterfly. Schmetterling.
36.	$\mu^2 xy^2 = x(x - a)^2 + b$	$a \neq 0$.	The Trijuga or Triga. Dreigespann.
37.		$a = 0$.	The starry Triga. Gestirntes Dreigespann.
38.	$\mu^2 xy^2 = (x - n)^3$.		The Crane. Kran.

39. $\mu^2 x y^2 = (x - m)^2 (x - n)$. Crane and Sack.
Kran mit Sack.

40. $\mu^2 x y^2 = (x - m)(x - n)(x - p)$. Swing and Chair.
Schaukel und Stuhl.

41. $\mu^2 x y^2 = (x - m)(x + n)(x + p)$. The Trophy.
Trophäe.

42. $\mu^2 x y^2 = (x - m)(x + n)^2$. The knotted Flower-pot.
Blumentopf mit Knoten.

Unter den soeben aufgezählten Kurven befinden sich einige, die einer unbestimmten algebraischen Quadratur unterworfen werden können; einige von diesen sind jene, welche die Nummern 22—26, 39 und 42 haben und im allgemeinen alle diejenigen, die sich durch eine Gleichung von folgendem Typus darstellen lassen:

$$y = \frac{ax}{3m} \sqrt{\frac{x + 3m}{x - m}};$$

solche Kurven sind von Marie — der sie zuerst betrachtet hat — Trèfles genannt[1]).

17. Überlassen wir es dem Leser über die Vorteile und Güte der Newmanschen Nomenklatur sich ein Urteil zu bilden, und bemerken, dafs alle Kurven dritter Ordnung, mit denen wir uns hier zunächst beschäftigen werden, mit Doppelpunkten versehen sind, oder durch die cyklischen Punkte (unendl. fernen imag. Kreispunkte) hindurchgehen, oder auch sich dieser beiden Besonderheiten erfreuen; wir halten es daher für angemessen, in den beiden folgenden Kapiteln die hervorragenderen Eigenschaften der rationalen und der cirkularen Kurven dritter Ordnung auseinanderzusetzen.

Zuvor wollen wir jedoch noch drei besondere Kurven dritter Ordnung erwähnen, welche weder der einen, noch der andern der soeben erwähnten Kategorieen angehören:

Die erste gehört zur Klasse der physikalisch-mathematischen Kurven, indem sie folgendes mechanisches Problem löst: „Gegeben auf einer horizontalen Geraden zwei Punkte A und B; eine Kurve Γ zu finden, derart, dafs, wenn P ein beliebiger Punkt derselben ist, die Zeit des Herabgleitens und Aufsteigens eines schweren Punktes auf den beiden Geraden AP und PB konstant ist.“ Nimmt man als Axen die Gerade AB und die, welche die Strecke $AB = 2a$ senkrecht halbiert, so findet man bald als Gleichung der Kurve folgende

$$\sqrt{\frac{x^2 + (a - y)^2}{gx}} + \sqrt{\frac{x^2 + (a - y)^2}{gx}} = Const.,$$

1) *Réalisation et usage des formes imaginaires en géométrie* (Nouv. Ann. 3, Ser. X, 1890).

oder wenn man die Konstante mit $\sqrt{\frac{4bc}{fg}}$ bezeichnet

$$y^2 = \frac{x(b-x)(c-x)}{f-x}.$$

N. Fuss, der diese Gleichung aufgestellt hat, bemerkt, dafs die dargestellte Kurve in ihrer Form viele Analogieen mit der Konchoide der Alten (Nr. **66** ff.) darbietet[1]).

Die zweite ist der Ort der Punkte, deren Abstände von drei gegebenen Geraden ein konstantes Produkt bilden. Ihre Gleichung lautet daher

$$(x \cos\alpha_1 + y \sin\alpha_1 - p_1)(x \cos\alpha_2 + y \sin\alpha_2 - p_2) \cdot (x \cos\alpha_3 + y \sin\alpha_3 - p_3) = a^3.$$

Die Kurve hat drei reelle Wendepunkte im Unendlichen, und wurde von Korneck, der sich mit ihr beschäftigt hat, kubische Hyperbel genannt[2]); sie ergiebt sich auch als Ort der Mittelpunkte der Kegelschnitte von gegebenem Inhalt, die drei gegebene Geraden berühren. Nebenher wollen wir noch bemerken, dafs der analoge Ort der Mittelpunkte der Kegelschnitte, die durch drei gegebene Punkte gehen, von der sechsten Ordnung ist.

Die dritte hat in kartesischen Koordinaten die Gleichung

$$xy(x+y) = a^3;$$ [3])

sie liegt symmetrisch in Bezug auf die Gerade $x - y = 0$ und hat drei reelle Wendepunkte im Unendlichen; die entsprechenden Tangenten haben die Gleichung $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 0$. Ihre Hessesche Kurve zerfällt in die unendlich ferne Gerade und die beiden komplexkonjugierten Geraden dargestellt durch die Gleichung

$$x^2 + xy + y^2 = 0.$$ [4])

---

1) *De descensu gravium super arcu lemniscatae*, Mem. de Petersbourg IX, 1824).

2) *Eine mathematische Abhandlung über den geometrischen Ort der Mittelpunkte von Kegelschnitten, von denen drei Tangenten oder drei Punkte nebst der Fläche gegeben sind* (Progr. Oels, 1868).

3) J. Alvera, *Die Kurve dritten Grades* $xy(x+y) = a^3$ (Diss. Rostock, 1873).

4) Zu anderen Kurven, die, wie die hier zuletzt betrachtete, drei in einen Punkt zusammen laufende Asymptoten haben, gelangt man, wenn man diejenigen Kurven dritter Ordnung aufsucht, in Bezug auf welche es ∞^1 Punkte giebt, deren erste Polare ein Kreis ist. S. die Abh. von Stuyvaert, *Point remarquable dans le plan d'une cubique* (Nouv. Ann. 3. Serie, XVIII, 1899).

Zweites Kapitel.

Rationale Kurven dritter Ordnung.

18. Von den in Nr. **14** bezeichneten divergenten Parabeln sind drei je mit einem singulären Punkte versehen, schneiden wir diese mit einem Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt der betreffende singuläre Punkt ist, so entsteht eine eindeutige Beziehung zwischen den Punkten der Kurve und den Werten eines Parameters, woraus sich ergiebt, dafs die Kurve rational ist. Projizieren wir eine solche Kurve in beliebiger Weise, so gelangt man zu folgenden Formeln:

$$\varrho x_i = a_{i0}\lambda^3 + a_{i1}\lambda^2 + a_{i2}\lambda + a_{i3} \qquad (i = 1, 2, 3) \quad . \; . \; . \quad (1)$$

wo ϱ ein Proportionalitätsfaktor und λ der Parameter ist. Diese liefern die gemeinsame parametrische Darstellung für alle die ∞^8 rationalen Kurven dritter Ordnung, die es in einer Ebene giebt[1]). Führen wir nun die Bedingung an dafür, dafs die drei Punkte (α), (β), (γ) in gerader Linie liegen[2]), so ist notwendig und hinreichend, dafs das Produkt der beiden Matrizen

$$\begin{Vmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^3 & \beta^2 & \beta & 1 \\ \gamma^3 & \gamma^2 & \gamma & 1 \end{Vmatrix}$$

gleich Null ist; daher wird man haben:

$$\begin{vmatrix} 1 & -(\alpha+\beta+\gamma) & \beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta & -\alpha\beta\gamma \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad (2)$$

oder auch, wenn man mit k_0, k_1, k_2, k_3 die Determinanten bezeichnet, die man aus der Matrix

$$\begin{Vmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$$

erhält, indem man der Reihe nach die erste, zweite, dritte, vierte Vertikale ausstreicht

$$k_0 + k_1(\alpha+\beta+\gamma) + k_2(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta) + k_3\alpha\beta\gamma = 0. \quad . \quad (2')$$

Setzen wir die α, β, γ einander gleich, so verwandelt sich Gleichung

1) S. hierüber Igel, *Über ebene Kurven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt* (Math. Ann. VI, 1873).

2) Wir bezeichnen hier und im folgenden mit (λ) den dem Werte λ des Parameters entsprechenden Punkt.

(2) oder (2′) in eine Gleichung, deren Wurzeln ω die drei Wendepunkte der Kurve bestimmen. Die so sich ergebenden Gleichungen sind:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3\omega & 3\omega^2 & \omega^3 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

oder

$$k_0 + 3\omega k_1 + 3\omega^2 k_2 + \omega^3 k_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$

Mit Hilfe von (2) oder (2′) ist es sehr leicht, aus diesen Gleichungen abzuleiten, dafs die drei Wendepunkte der Kurve in gerader Linie liegen; davon ist einer oder alle drei reell, je nachdem die Diskriminante von (3′)

$$D = (k_0 k_3 - k_1 k_2)^2 - 4(k_1 k_3 - k_0 k_2) \cdot (k_0 k_2 - k_1 k_3) \quad . \quad . \quad (4)$$

positiv oder negativ ist. — Einem Doppelpunkte der Kurve entsprechen zwei Werte des Parameters, $\delta_1 \delta_2$; diese müssen so beschaffen sein, dafs, wenn man irgend einen Punkt (λ) auf der Kurve annimmt, in bezug auf λ der Kollinearitäts-Bedingung der drei Punkte $(\delta_1)(\delta_2)(\lambda)$ identisch genügt wird. Gleichung (2′) ergiebt dann:

$$k_0 + k_1(\delta_1 + \delta_2) + k_2 \delta_1 \delta_2 = 0, \quad k_1 + k_2(\delta_1 + \delta_2) + k_3 \delta_1 \delta_2 = 0.$$

Daraus folgt, dafs δ_1 und δ_2 die Wurzeln der Gleichung sind:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\delta & \delta^2 \\ k_0 & k_1 & k_2 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Die Diskriminante dieser Gleichung ist ebenfalls D, und daher ist der Doppelpunkt der Kurve ein Knotenpunkt oder ein isolierter, je nachdem D positiv oder negativ ist. Dieser Umstand zugleich mit einem oben hervorgehobenen führt zu dem Schlusse: **Eine rationale Kurve dritter Ordnung besitzt einen oder drei reelle Wendepunkte, je nachdem sie einen Knoten- oder isolierten Punkt hat.** Im Falle $D = 0$, wenn die Kurve eine Spitze hat, hat sie einen einzigen, natürlich immer reellen, Wendepunkt.

Aus Gleichung (1) folgt, dafs die Verbindungslinie der beiden Punkte (λ) und (μ) die Gleichung hat:

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ x_2 & a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ x_3 & a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 3 & -(\lambda+\mu) & \lambda\mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -(\lambda+\mu) & 3\lambda\mu \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Setzen wir insbesondere $\mu = \lambda$, so ergiebt sich, dafs die Gleichung der Tangente im Punkte (λ) sich folgendermafsen darstellt:

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ x_2 & a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ x_3 & a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 3 & -2\lambda & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2\lambda & 3\lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Daraus geht hervor, dafs die betrachtete Kurve im allgemeinen vierter Klasse ist.

19. Die gewöhnliche Gleichung der von uns betrachteten Kurve würden wir erhalten, wenn wir aus Gleichung (1) λ eliminierten. Wir wollen diese Rechnung nicht ausführen[1]) und lieber die einfachsten kanonischen Formen, auf welche eine rationale Kurve dritter Ordnung zurückführbar ist, je nachdem sie einen Knoten-, Rückkehr- oder isolierten Punkt hat, aufstellen.

a) Im ersten Falle, wenn wir als Ecke A_3 des Fundamentaldreiecks den singulären Punkt der Kurve wählen, so ist sie durch folgende Gleichung darzustellen:

$$m x_1 x_2 x_3 = c_0 x_1^3 + c_1 x_1^2 x_2 + c_2 x_1 x_2^2 + c_3 x_2^3 \text{ }^{2)} \quad . \quad . \quad (8)$$

Setzen wir $x_2 = \lambda x_1$, so ergiebt sich

$$\varrho x_1 = m\lambda, \quad \varrho x_2 = m\lambda^2, \quad \varrho x_3 = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + c_3\lambda^3,$$

und daher die Bedingung der Kollinearität der drei Punkte (α) (β) (γ)

$$\alpha\beta\gamma = k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

indem wir der Kürze halber $k = -\frac{c_3}{c_0}$ setzen.

Es ist hier der Platz zu bemerken, dafs viele der Kurven dritter Ordnung, mit denen wir uns in den folgenden Kapiteln dieses Abschnittes beschäftigen müssen (nämlich die gerade Cissoide, das Folium Cartesii, die gerade Strophoide und die Trisectrix von Maclaurin) rationale Kurven dritter Ordnung sind, die eine Gleichung von folgender Form haben

$$x(x^2 + ky^2) = ax^2 + by^2.$$

Barisien[3]) hat vorgeschlagen diese cubiques elliptiques, paraboliques oder hyperboliques zu nennen, je nachdem $k \gtreqless 0$.

1) Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie* I. (Leipzig 1876) S. 887.

2) Em. Weyr, *Zur Geometrie der Kurven dritter Ordnung* (Zeitschr. XV, 1870).

3) *Intermédiaire*, VII. 1900, S. 79—80.

b) Wenn hingegen die Kurve eine Spitze hat, ist ihre Gleichung auf folgende Form zu bringen[1])

$$x_1 x_2^2 = x_2^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

also $\varrho x_1 = \lambda^3, \quad \varrho x_2 = \lambda, \quad \varrho x_3 = 1,$

und statt der Gleichung (9) erhält man folgende Kollinearitätsbedingung

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

c) Wenn schließlich die Kurve einen isolierten Punkt hat, so wird man ihre Gleichung schreiben können[2]):

$$(x_1^2 + x_2^2) x_3 = x_1^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

und hat dann folgende parametrische Darstellung

$$\varrho x_1 = 1 + \lambda^2, \quad \varrho x_2 = \lambda(1 + \lambda^2), \quad \varrho x_3 = \lambda^3,$$

und die Kollinearitätsbedingung

$$\alpha + \beta + \gamma - \alpha\beta\gamma = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Setzen wir allgemein $\lambda = \operatorname{tg} l$, so wird diese zu $\operatorname{tg}(a + b + c) = 0$, oder

$$a + b + c \equiv 0 \pmod{\pi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Diese Formeln wenden wir auf die Untersuchung der Steiner'schen Polygone an[3]), die einer rationalen ebenen Kurve dritter Ordnung einbeschrieben werden können. Zu diesem Zwecke nehmen wir als „Fundamentalpunkte des Polygons" die beiden Punkte (τ_1) und (τ_2) der Kurve; wir nehmen auf derselben einen dritten beliebigen Punkt (ξ_1), verbinden diesen mit (τ_1) und bestimmen den dritten Schnittpunkt der Verbindungslinie mit der Kurve (ξ_2); wir verbinden (ξ_2) mit (τ_2) und nennen den Punkt, in welchem diese Gerade die Kurve nochmals trifft (ξ_3) ... So erhalten wir nach $2n$ Operationen auf der Kurve $2n + 3$ Punkte, (τ_1), (τ_2), (ξ_1), (ξ_2), (ξ_3) .... (ξ_{2n}), (ξ_{2n+1}), zwischen deren Parametern eine der folgenden Gruppen von $2n$ Bedingungen bestehen, je nachdem die Kurve einen Knoten-, Rückkehr- oder isolierten Punkt hat:

---

1) Salmon, *Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven*, deutsch v. Fiedler (Leipzig 1873) S. 221.

2) Daselbst S. 226. Vgl. Zahradnik, *Contribution à la théorie des cubiques cuspidales* (Nouv. Ann. 3. Ser. XVIII, 1899).

3) Diese Anwendung findet sich für die Kurve mit Knotenpunkt entwickelt in einer Bemerkung von Em. Weyr, *Über Kurven dritter Ordnung mit einem Mittelpunkt* (Math. Ann. III, 1871); für die übrigen in einem Artikel vom Verf., *I poligoni di Steiner nelle cubiche razionali* (Prager Ber. 1896).

$$\left.\begin{array}{ll} \tau_1 \xi_1 \xi_2 = k, & \tau_2 \xi_2 \xi_3 = k \\ \tau_1 \xi_3 \xi_4 = k, & \tau_2 \xi_3 \xi_4 = k \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \tau_1 \xi_{2n-1} \xi_{2n} = k, & \tau_2 \xi_{2n} \xi_{2n+1} = k \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \tau_1 + \xi_1 + \xi_2 = 0, & \tau_2 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \tau_1 + \xi_3 + \xi_4 = 0, & \tau_2 + \xi_4 + \xi_5 = 0 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \tau_1 + \xi_{2n-1} + \xi_{2n} = 0, & \tau_2 + \xi_{2n} + \xi_{2n-1} = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad (16)$$

$$\left.\begin{array}{ll} t_1 + x_1 + x_2 \equiv 0, & t_2 + x_2 + x_3 \equiv 0 \\ t_1 + x_3 + x_4 \equiv 0, & t_2 + x_4 + x_5 \equiv 0 \\ \dots & \dots \pmod{\pi} \\ \dots & \dots \\ t_1 + x_{2n-1} + x_{2n} \equiv 0, & t_2 + x_{2n+1} + x_{2n} \equiv 0 \end{array}\right\} \quad (17)$$

Sollen nun die angeführten Operationen zu einem geschlossenen polygonalen Linienzuge führen, also zu einem Steiner'schen Polygon, so mufs $\xi_{2n+1} = \xi_1$ sein. Machen wir diese Veränderung in den Beziehungen (15), (16), (17) und multiplizieren dann die n Gleichungen (15) mit einander oder addieren die n Beziehungen (16) oder (17) und zwar diejenigen, die in derselben Vertikalreihe stehen, so ergeben sich aus den resultierenden Gleichungen, wenn man sie in geschickter Weise vergleicht, folgende Beziehungen für die beiden Fundamental-Punkte

$$\tau_1^n = \tau_2^n \quad . \quad . \quad (18) \qquad \tau_1 = \tau_2 \quad . \quad . \quad (19) \qquad n t_1 \equiv n t_2 \pmod{\pi} \quad . \quad . \quad (20)$$

Jede derselben wird zur Bestimmung eines der Punkte (τ_1) (τ_2) dienen können, wenn man den anderen kennt. Wenn nun n ungerade, so ist die einzige reelle Lösung von (18) $\tau_1 = \tau_2$, wenn aber n eine gerade Zahl ist, so kann man auch setzen $\tau_1 = -\tau_2$; dies zeigt: **In einer Kurve dritter Ordnung mit Doppelpunkt giebt es nur solche Steiner'sche Polygone, deren Seitenzahl ein vielfaches von 4 ist; ist nun eine Zahl dieser Art gegeben und auf der Kurve beliebig ein Punkt angenommen, so giebt es nur einen einzigen ihm zugeordneten Punkt der Kurve, der mit ihm ein Paar Fundamentalpunkte bilden kann.** Die Gleichung (19) dagegen wird nur befriedigt durch $\tau_2 = \tau_1$ und also: **Auf einer Kurve mit Spitze giebt es keine Steiner'schen Polygone im eigentlichen Sinne.** Aus (20) endlich ergiebt sich

$$t_2 = t_1 + k\frac{\pi}{n}, \qquad (k = 1, 2, 3, \dots n-1)$$

und demnach: **Auf einer Kurve dritter Ordnung mit isoliertem Punkte giebt es Steiner'sche Vielecke jeder geraden Ordnung $2n$; nimmt man**

einen Punkt der Kurve beliebig an, so giebt es noch $n-1$ weitere, von denen jeder mit diesem ein Paar Fundamentalpunkte eines Steinerschen $2n$-Ecks bildet.

20. Die parametrischen Darstellungen, die mit solcher Leichtigkeit zu diesen Resultaten führten, dienen auch im allgemeinen dazu, in vorzüglicher Weise alle Fragen, die die Geometrie der rationalen Kurve dritter Ordnung betreffen, zu behandeln. Z. B. eignen sie sich zur Untersuchung der Eigenschaften eines Systems von Punkten A_1, A_2, A_3, von denen jeder der Tangentialpunkt des folgenden ist[1]). Mit dieser speziellen Frage wollen wir uns hier nicht aufhalten, wollen jedoch bemerken, dafs man durch Anwendung der Grafsmann'schen Begriffe und Methoden zu einer einfachen Konstruktion jeder Kurve dritter Ordnung mit Knotenpunkt gelangt[2]), ebenso zu ihrer Hesseschen Kurve[3]).

Zum Schlusse wollen wir noch auf das Problem der Rektifikation der rationalen Kurve dritter Ordnung hinweisen. Die Aufgabe hängt im allgemeinen von hyperelliptischen Integralen vom Geschlechte 3 ab, vereinfacht sich jedoch in speziellen Fällen. So werden wir sehen, dafs die gerade Cissoide (Kap. 4) und die Semikubische Parabel (Abschn. V, Kap. 2) elementar rektifizierbar sind; so hat Salmon vor ca. 50 Jahren[4]), und neuerdings Longchamps[5]) bemerkt, dafs die elliptischen Integrale genügen, um alle rationalen cirkularen Kurven dritter Ordnung zu rektifizieren; so fand endlich Darboux[6]), dafs die Krümmungslinien der Enneper'schen Minimalflächen algebraisch rektifizierbare Kurven dritter Ordnung sind[7]). Raffy[8]) stellte sich und löste das Problem der Bestimmung aller rationalen Kurven dritter Ordnung, deren Rektifikation durch Funktionen von niederer als der dritten Art sich ausführen läfst, und durch eine erschöpfende Untersuchung, deren Wiedergabe wir uns hier versagen müssen, gelangte er zu folgendem Satze:

---

1) Durège, *Über fortgesetztes Tangentenziehen an Kurven dritter Ordnung mit einem Doppel- oder Rückkehrpunkte* (Math. Ann. I, 1869).

2) Dingeldey, *Über Kurven dritter Ordnung mit Doppelpunkt* (Math. Ann. XXVII, 1886).

3) Id., *Zur Construction der Hesseschen Curve der rationalen Curven dritter Ordnung* (Math. Ann. XXVIII, 1887).

4) *Higher plane Curves* (Dublin 1852. S. 267).

5) *Sur la rectification de quelques courbes remarquables* (Mathésis VII, 1887).

6) *Leçons sur la théorie générale des surfaces* I. S. 318 (Paris 1887).

7) Jede dieser Kurven ist die Brennlinie einer Parabel für Strahlen senkrecht zur Axe, man kann sie aber auch betrachten als negative Fufspunktkurven der Parabel in Bezug auf einen Punkt der Axe, daher der von Raffy angewendete Name caustique podaire.

8) S. die Denkschrift *Sur la rectification des cubiques planes unicursales* (Ann. Ec. norm. 3. Ser. VI, 1889).

Von den rationalen Kurven dritter Ordnung sind rektifizierbar:

I. Algebraisch: 1) diejenigen, welche in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten, folgender parametrischen Darstellung fähig sind: $x = a\frac{\lambda^3 - 3\lambda}{\lambda - c}$, $y = \frac{3\lambda^2 - 1}{\lambda - c}$; 2) die semikubischen Parabeln; 3) die geraden und schiefen Cissoiden (Kap. 5 dieses Abschnittes).

II. Durch Funktionen vom Geschlecht 1, diejenigen, die eine der folgenden Singularitäten aufweisen: 1) zwei Wendepunkte mit einer isotropischen[1]) Tangente im Endlichen; 2) eine Spitze im Endlichen und Berührung mit der unendlich fernen Geraden; 3) eine Spitze und einen Wendepunkt im Unendlichen; 4) Durchgang durch die cyklischen Punkte.

III. Durch Funktionen vom Geschlecht 2: 1) diejenigen, welche eine Spitze im Endlichen haben oder 2) eine einfache Berührung mit der unendlich fernen Geraden oder auch einen Doppelpunkt im Unendlichen.

Mit Berücksichtigung der Einzelheiten dieses Satzes ist der Leser in den Stand gesetzt, die analytische Natur der Funktionen, von denen die Rektifikation aller in diesem Abschnitte betrachteten Kurven abhängt, zu bestimmen.

Drittes Kapitel.

Cirkulare Kurven dritter Ordnung.[2])

21. Eine cirkulare Kurve[3]) dritter Ordnung oder Kataspirica[4]) ist durch sieben oder sechs Punkte bestimmt, je nachdem sie vom Geschlechte 1 oder 0 ist. Ihre Gleichung, bezogen auf ein

---

1) Man nennt bekanntlich isotropisch eine Gerade, wenn sie durch einen cyklischen Punkt der Ebene geht.

2) Vgl. C. A. Bjerknefs, *Sur une certaine classe de courbes de troisième ordre rapportées à lignes droites, qui dépendent de paramètres donnés* (Journ. f. Math. LV, 1858); J. Casey, *On bicircular quartics* art. 90—115 (Irish Trans. XXIV, 1869); L. A. Strnad, *Über Circularcurven dritten Grades.* Progr. d. Realsch. Königgrätz, 1883 (böhmisch); F. Fricke, *Über ebene Kurven dritter Ordnung, welche durch die imaginären Kreispunkte gehen* (Diss. Jena 1898).

3) Die cirkularen Kurven werden mifsbräuchlich bisweilen cyklische Kurven genannt, wodurch Verwechselungen mit Kreisrollkurven (vgl. Abschn. VI, Kap. 9) herbeigeführt werden.

4) Eine von Laguerre benutzte Bezeichnung in dem Aufsatze *Sur la courbe enveloppée par les axes des coniques qui passent par quatre points donnés* (Nouv. Ann. 2e Serie, XVIII, 1879) um daran zu erinnern, dafs eine cirkulare Kurve dritter Ordnung betrachtet werden kann als eine spirische Linie mit unendlich fernem singulären Brennpunkte. Vgl. Abschn. III, Kap. 4.

rechtwinkliges kartesisches Axensystem, kann immer auf die Form gebracht werden

$$(\alpha x + \beta y)(x^2 + y^2) + ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0. \quad (1)$$

Aufser den cyklischen Punkten besitzt die Kurve im Unendlichen noch einen immer reellen Punkt, nämlich den unendlich fernen Punkt der Geraden $\alpha x + \beta y = 0$; wenn man daher die x-Axe parallel zu dieser Geraden nimmt, so vereinfacht sich Gleichung (1) und wird zu

$$y(x^2 + y^2) + ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \ . \quad (2)$$

In jedem der cyklischen Punkte giebt es eine bestimmte Tangente an die betrachtete Kurve; die beiden so erhaltenen Geraden sind konjugiert imaginär und treffen sich in einem reellen Punkte F, dem aufserordentlichen Brennpunkte oder Centrum der Kurve, dessen Koordinaten

$$x = h, \quad y = \frac{a - b}{2} \text{ sind } \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (3)$$

Nehmen wir diesen Punkt als Koordinatenanfang, indem wir die Richtung der Axen beibehalten, so bekommt Gleichung (2) die Gestalt:

$$(y + a)(x^2 + y^2) + 2gx + 2fy + c = 0 \quad . \ . \ . \quad (4)$$

Von jedem cyklischen Punkte lassen sich vier Gerade ziehen, die anderswo die cirkulare Kurve dritter Ordnung vom Geschlechte 1 berühren; es entstehen so zwei Büschel von je vier Strahlen, die nach dem Salmonschen Satze projektiv sind (s. Nr. **12**). Beachtet man, dafs die Projektivität sich auf vier verschiedene Weisen aufstellen läfst, und dafs ferner jede der Tangenten, die von dem einen Kreispunkte gezogen sind, die von dem anderen gezogenen trifft in Punkten, welche die Brennpunkte der Kurve sind, so sieht man: **Die 16 Brennpunkte einer cirkularen Kurve dritter Ordnung** (von denen jedoch nur 4 reell sind) **liegen zu je vieren auf vier** (durch die cyklischen Punkte gehenden Kegelschnitten, d. i.) **Kreisen**, ein bemerkenswerter Satz, der gewöhnlich „der Hart'sche Satz" genannt wird[1]. Für eine rationale cirkulare Kurve giebt es nur 4 gewöhnliche Brennpunkte, wenn sie einen Knoten- oder isolierten Punkt besitzt, 1 nur, wenn sie eine Spitze hat.

Jegliche Parallele zur x-Axe trifft die Kurve (4) in zwei in endlicher Entfernung belegenen Punkten, deren Abscissen man durch Auflösung der entsprechenden Gleichung nach x erhält; nimmt man jedoch $y = -a$, so wird eine Wurzel der Gleichung (4) unendlich grofs, und daher stellt die Gleichung

$$y + a = 0 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (5)$$

---

1) Salmon-Fiedler, *Ebene Kurven* (Leipzig 1873) S. 177; s. auch M. Disteli, *Die Metrik der cirkularen Kurven dritter Ordnung im Zusammenhang mit geometrischen Lehrsätzen Jacob Steiners* (Zürich. Ges. XXXVIII, 1893).

eine Asymptote der Kurve (4) dar. Diese Asymptote schneidet übrigens die Kurve in einem Punkte A, dessen Koordinaten sind

$$x = \frac{2af - c}{2g}, \quad y = -a \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

und der ein Haupt-Punkt der Kurve heifst. Mediane derselben nennt man die durch den Punkt M, den Mittelpunkt der Strecke FA, parallel zur Asymptote gezogene Gerade; deren Gleichung ist daher

$$y + \frac{a}{2} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Man beachte auch, dafs Gleichung (4) als das Resultat der Elimination von r^2 aus folgenden beiden Gleichungen angesehen werden kann

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad (y + a)(r^2 + 2f) + 2g\left(x - \frac{2af - c}{2g}\right) = 0.$$

Dies in geeigneter Weise interpretiert, liefert folgenden Satz von Czuber[1]): **Jede cirkulare Kurve dritter Ordnung läfst sich erzeugen durch ein Strahlbüschel und ein projektives Büschel konzentrischer Kreise; der Scheitel des Strahlbüschels ist der Hauptpunkt, und das gemeinsame Centrum aller erzeugenden Kreise der aufserordentliche Brennpunkt der Kurve.** Daraus folgt als Corollar folgender Satz von Eckardt[2]): **Jede durch einen Hauptpunkt einer cirkularen Kurve dritter Ordnung gezogene Gerade trifft aufserdem die Kurve in zwei Punkten, die gleichen Abstand vom aufserordentlichen Brennpunkte haben.**

22. Bemerkenswert ist der Fall, dafs die Kurve dritter Ordnung durch ihren aufserordentlichen Brennpunkt geht, oder auch, was dasselbe ist, dafs die beiden Kreispunkte auf ihr „konjugiert“ sind; dieser wurde von Schröter[3]) und Durège[4]) untersucht infolge der Bemerkung von Salmon[5]), dafs eine solche Kurve der Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte einer Schar ist; daher der Name Fokalkurve, den sie in der Geometrie führt; in der Kinematik dagegen, wo sie eine wichtige Rolle spielt, heifst sie Kreispunktkurve[6]). Im vorliegen-

---

1) *Die Kurven dritter und vierter Ordnung, welche durch die unendlich fernen Kreispunkte gehen* (Zeitschr. f. Math. XXXII, 1887.)

2) Vgl. Durège, *Über eine leichte Konstruktion der Kurve dritter Ordnung, welche durch die imaginären Kreispunkte geht* (Zeitschr. f. Math. XIV, 1869; s. auch X, 1865).

3) *Über eine besondere Kurve dritter Ordnung und eine einfache Erzeugungsart der allgemeinen Kurve dritter Ordnung* (Math. Ann. V, 1872).

4) *Über die Kurve dritter Ordnung, welche den geometrischen Ort der Brennpunkte einer Kegelschnittschar bildet* (Math. Ann. V, 1872).

5) *Analytische Geometrie der Kegelschnitte,* deutsch v. Fiedler. 2. Aufl. S. 355 u. 397.

6) Vgl. R. Müller, *Konstruktion der Fokalkurve aus sechs gegebenen Punkten* (Zeitschr. f. Math. XL, 1895).

den Falle müfste man in der vorigen Gleichung $c = 0$ setzen. Die Gleichungen (4) und (5) werden dann

$$y(x^2+y^2+ay+2f)+x(ax+2g)=0 \quad (4'); \qquad x=\frac{af}{g}, \quad y=-a \quad (5')$$

Demnach ergiebt sich (4′) durch Elimination von λ aus den Gleichungen

$$x = \lambda y, \qquad \left(x+\frac{a\lambda}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1+\lambda^2}{4}a^2 - 2g\lambda - 2f,$$

woraus folgt: **Jede cirkulare Kurve dritter Ordnung, welche ihren aufserordentlichen Brennpunkt selbst enthält, läfst sich erzeugen durch ein Strahlenbüschel, welches eben jenen Brennpunkt zum Scheitel hat und ein projektives Kreisbüschel, indem der Mittelpunkt eines jeden Kreises des Büschels auf dem entsprechenden Strahl und auf der Mediane der Kurve liegt.**

Eine andere bemerkenswerte Gruppe von cirkularen Kurven dritter Ordnung ist diejenige, die gebildet wird von solchen, die symmetrisch in Bezug auf eine Axe sind; nehmen wir diese als x-Axe und als Anfang den reellen Punkt, in welchem sie die Kurve schneidet, so kann man als allgemeine Gleichung derselben folgende nehmen:

$$x(x^2+y^2) + ax^2 + by^2 + cx = 0 \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Gehen wir nun zu Polarkoordinaten über, so erhalten wir die andere:

$$\varrho^2 + \varrho \frac{a\cos^2\omega + b\sin^2\omega}{\cos\omega} + c = 0\,.$$

Setzen wir zunächst voraus, dafs $c \neq 0$; nennen wir nun die Wurzeln dieser Gleichung ϱ_1 und ϱ_2, so haben wir $\varrho_1 \cdot \varrho_2 = c$, und daher **wird die Kurve (8) in sich selbst transformiert durch eine Inversion, die zum Centrum den Koordinatenanfang und zur Potenz c hat**[1]). Zwei andere analoge Inversionen giebt es, wenn die Kurve von der Symmetrieaxe in zwei weiteren reellen Punkten geschnitten wird. — Wenn $c = 0$, kann man die Gleichung (8) durch folgende ersetzen:

$$(x-a)(x^2+y^2) + bx^2 = 0;$$

die so dargestellte Kurve wird in Italien[2]) Percissoide genannt, wenn $a > b$, und Ipocissoide, wenn $a < b$; im besonderen Falle, wenn $a = \pm b$, ist sie eine gemeine Cissoide resp. die Begleitkurve derselben (vgl. Nr. 24).

1) Daraus ergiebt sich, dafs die Tangenten an die Kurve in den beiden Punkten, die auf einer Geraden durch den Koordinatenanfang liegen, mit dieser Geraden gleiche Winkel bilden.

2) Man sehe den § 22 der Abhandlung von E. Cavalli, *Le figure reciproche e la trasformazione quadratica nella cinematica.* (Napoli Mem. 2. Serie, IX, 1899).

Eine dritte Gruppe wird gebildet von den cirkularen und rationalen Kurven; nimmt man zwei rechtwinklige Axen, die den Doppelpunkt als Koordinatenanfang haben, so hat man für die Kurve folgende Gleichung:

$$(x^2 + y^2)(\alpha x + \beta y) + ax^2 + 2hxy + by^2 = 0. \quad . \quad . \quad (9)$$

Diese führt zu folgender parametrischen Darstellung

$$x = -\frac{a + 2h\lambda + b\lambda^2}{(1+\lambda^2)(\alpha + \beta\lambda)}, \quad y = -\lambda \frac{a + 2h\lambda + b\lambda^2}{(1+\lambda^2)(\alpha+\beta\lambda)}.$$

Aus dieser folgt, dafs ein beliebiger Kreis, der durch den Koordinatenanfang geht, also durch eine Gleichung von folgendem Typus dargestellt wird:

$$x^2 + y^2 - 2\xi x - 2\eta y = 0,$$

die Kurve noch in zwei Punkten trifft, die durch die Gleichung bestimmt werden:

$$(a + 2\alpha\xi) + 2\lambda(h + \beta\xi + \alpha\eta) + (b + 2b\eta)\lambda^2 = 0;$$

damit nun diese beiden Punkte zusammenfallen, mufs sein

$$(\beta\xi - \alpha\eta)^2 + 2(h\beta - b\alpha)\xi + 2(h\alpha - a\beta)\eta + (h^2 - ab) = 0.$$

Diese Gleichung in ξ und η stellt eine Parabel dar; nennt man nun den Ort der Mittelpunkte derjenigen Kreise, die durch den Doppelpunkt einer rationalen cirkularen Kurve dritter Ordnung gehen und sie anderswo berühren, Nebenevolute, so folgt: **Die Nebenevolute einer rationalen cirkularen Kurve dritter Ordnung ist eine Parabel**[1]).

Zu dieser Gruppe gehört auch die Kurve mit der Gleichung

$$x^3 - 6px^2 + xy^2 + p^2x - 4p^3 = 0,$$

deren Konstruktion durch zwei Hyperbeln Varignon angegeben hat[2]) und welche er zur Untersuchung der Wendepunkte Rolle vorlegte im Verlaufe der bekannten Disputation, die zwischen diesen berühmten Mathematikern über den Wert der Infinitesimal-Methode statt fand. Varignon nannte sie Conchoide, weil sie eine Ähnlichkeit in der Gestalt mit der Konchoide des Nikomedes (s. Abschn. III, Kap. 5) aufweist.

---

1) Dieser Satz für den Spezialfall der Cissoide findet sich in M. Simon, *Analytische Geometrie* (Leipzig, Göschen 1900) S. 283.

2) S. den an Leibniz gerichteten Brief v. 23. Mai 1702, veröffentlicht in *Leibniz* von Gerhardt, IV (Halle 1859) S. 101.

Viertes Kapitel.

Die Cissoide des Diokles.

23. Die Probleme der Quadratur des Kreises, der Verdoppelung des Würfels und der Teilung des Winkels in gleiche Teile bildeten viele Jahrhunderte lang das Ziel der Anstrengungen aller hervorragenden Geometer; viele derselben versuchten, da sie einsahen, dafs die „ebenen und körperlichen Örter“ nicht im stande seien sie zu lösen, die Schwierigkeiten, die sich der Erlangung einer Lösung entgegenstellten, dadurch zu überwinden, dafs sie andere Kurven von komplizierterer Erzeugung anwandten; so entstanden zahlreiche Arten von Kurven, die man bezüglich Quadratrix, Duplikatrix, Sektrix nannte. Unter der zweiten Art finden wir aufser den Kegelschnitten auch die bemerkenswerte Kurve, von der dieses Kapitel handelt. Erdacht wurde sie von Diokles, einem nur wenig bekannten Geometer, der sicherlich später als Archimedes gelebt hat, wahrscheinlich zwischen 250 und 100 v. Chr.[1]) In welcher Weise er sich derselben zur Verdoppelung eines Würfels bedient hat, erfahren wir aus dem Kommentar des Eutokius von Askalon zum zweiten der Bücher des Archimedes *Über die Kugel und den Cylinder*[2]).

Um die Entstehung der Diokleischen Linie klar zu machen, betrachten wir einen Kreis Γ mit dem Mittelpunkte O und zwei zu einander senkrechten Durchmessern AB und CD (Taf. I, Fig. 1); wir nehmen auf der Peripherie des Kreises zwei untereinander gleiche Bogen AE und AG, ziehen durch G die Parallele zu AB, diese schneidet CE in einem Punkte M der Diokleischen Kurve. Dafs der Ort der Punkte M, welcher von Eutokius mit keinem besonderen Namen bezeichnet wurde, derselbe ist, den Proklus und Pappus Cissoide nennen (*κισσοειδὴς γραμμή* von *ἡ κίσσος*, der Epheu), ist aufserordentlich wahrscheinlich, wenn auch nicht mathematisch sicher, da keine ältere Schrift existiert, in welcher sich der Name Cissoide mit dem Namen des Diokles verknüpft findet. Nichtsdestoweniger wird der Ort der Punkte M allgemein die Cissoide des Diokles genannt.

Bemerken wir noch, dafs, wenn CE die in D an den Kreis gelegte Tangente d in F schneidet, sich die beiden Strecken CE und MF als gleich und gleich gerichtet ergeben, so läfst sich die Cissoide einfacher auf folgende Weise konstruieren. Man trage auf jedem von C ausgehenden Strahle CF ein Stück FM gleich und entgegengesetzt gerichtet mit CE ab. Wenn man dagegen FM' gleich und in gleichem Sinne mit CE abträgt, so würde man eine

1) G. Loria, *Le scienze esatte nell' antica Grecia* Lib. II, n. 73.
2) *Archimedes*, herausg. von Heiberg III (Leipzig 1880) S. 81 ff.

neue Kurve erhalten, welche die Begleitkurve der Cissoide heifst[1]).

Die Cissoide des Diokles ist augenscheinlich symmetrisch in Bezug auf den Durchmesser CD des Erzeugungskreises und enthält die Endpunkte A und B des dazu senkrechten Durchmessers. Obwohl sie sich ins Unendliche erstreckt, so betrachteten die Alten nur die beiden Bogenstücke innerhalb des Kreises Γ, die von C bis zu den Punkten A und B gehen. Diese Bogen begrenzen zugleich mit dem Halbkreise ADB ein Gebiet, dessen Gestalt an die Blätter des Epheu erinnert; damit ergiebt sich die Erklärung des Namens Cissoide. Die Existenz der unendlichen Zweige scheint erst um die Mitte des 17. Jahrhunderts bemerkt zu sein; thatsächlich bemerkte Roberval in einem an Fermat gerichteten Briefe vom 4. August 1640, als er von Cissoiden spricht[2]), dafs „ces deux lignes courbes sont infinies de leur nature et ont des asymptotes parallèles entre elles, ce qu'on m'a assuré avoir été déjà démonstré par un auteur dont on ne m'a pas pu dire le nom"[3]).

Unabhängig von diesem wurden die unendlichen Zweige der Cissoide von R. de Sluse bezeichnet; daher schlug Huygens vor[4]), die ganze Kurve die Slusianische Cissoide zu benennen; aber, obwohl dieser Name die Billigung des Hauptinteressenten gefunden hatte[5]), so wurde er doch nicht adoptiert, und man fuhr fort, den Ort aller vorhin definierten Punkte M Cissoide des Diokles zu nennen; in diesem Sinne genommen, hat dann die Kurve die Gerade d als Wendeasymptote.

24. Nehmen wir nun C als Pol und CD als Axe eines Polarkoordinaten-Systems ϱ, ω und bezeichnen den Radius des gegebenen Kreises mit r, so erhalten wir:

$$\varrho = CM = EF = CF - CE = \frac{2r}{\cos\omega} - 2r\cos\omega,$$

und daher ist die Polargleichung der Cissoide:

$$\varrho = \frac{2r \cdot \sin^2\omega}{\cos\omega} \quad \text{. . . . . (1)}$$

Gehen wir zu kartesischen Koordinaten über, so erhalten wir

$$x(x^2 + y^2) = 2ry^2 \quad \text{. . . . . (2)}$$

woraus hervorgeht, dafs die Cissoide eine cirkulare Kurve dritter Ord-

1) G. Bellacchi (*Introduzione storica alla teoria delle funzioni ellittiche*, Florenz 1874, S. 136) nennt sie la conjugata della cissoide.

2) Um den folgenden Passus zu verstehen, ist nötig zu wissen, dafs Roberval, zusammen mit der Cissoide die in Bezug auf die Spitze symmetrische Kurve betrachtete.

3) *Oeuvres de Fermat* II, S. 201.

4) S. den Brief an R. de Sluse v. 5. April 1658 in *Oeuvres de Huygens* II, S. 164.

5) S. die Antwort Sluses v. 17. Apr. 1658, ebendaselbst S. 168.

nung mit C als Spitze und CD als entsprechender Spitzentangente ist. Schreiben wir Gleichung (2) folgendermaſsen

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x},$$

so tritt deutlich hervor, daſs die Gerade d eine Wendeasymptote ist.

Betrachten wir hingegen die Begleitkurve der Cissoide, so werden wir haben

$$\varrho = CM' = CF + FM' = CF + CE = \frac{2r}{\cos\omega} + 2r \cdot \cos\omega$$

Die Polar- und die kartesische Gleichung sind daher

$$\varrho = \frac{2r(1 + \cos^2\omega)}{\cos\omega}, \qquad y^2 = \frac{x^3 - 4rx^2}{2r - x};$$

diese Kurve ist also auch eine cirkulare Kurve dritter Ordnung.

Die angegebene Erzeugungsweise gestattet uns nicht, die Kurve in einem kontinuierlichen Zuge zu zeichnen; einer solchen aber bedurfte Newton, um zu erreichen, daſs die Cissoide ebenso wie die Gerade und der Kreis (s. Nr. 5) zu denjenigen Kurven gerechnet würde, die man zur Lösung irgend eines Problems anwenden könne. Er entdeckte nun eine solche höchst bemerkenswerte, die man aus folgendem Satze erkennt[1]): „Ein rechter Winkel FGH (Taf. I, Fig. 2), dessen einer Schenkel GF eine bestimmte Länge hat, bewege sich mit dem Punkte F auf einer festen Geraden r, während der andere Schenkel GH fortwährend durch einen festen Punkt E, dessen Abstand von F gleich GF ist, geht: dann beschreibt der Mittelpunkt M von FG eine Cissoide.“[2]) Beweis: Es sei O der Fuſspunkt des von E auf r gefällten Lotes und D die Mitte von EO. Dann sind die Dreiecke EFG und EFO, die eine gemeinsame Hypotenuse und die gleichen Katheten EO und FG haben, kongruent, daher ist $\sphericalangle FEO = EFG$. Wenn sich nun EO und FG in L schneiden, so ist Dreieck LEF gleichschenklig, und da $ED\ (= \frac{1}{2}EO) = FM\ (= \frac{1}{2}FG)$, so ist DM parallel zu EF. Ist K der Schnitt von DM mit der zu EO durch F gezogenen Parallelen, und beschreibt man um O mit OD als Radius den Kreis Γ und zieht an diesen durch den D diametral gegenüber liegenden Punkt D' die Tangente t, so ist klar, daſs der Punkt K sich auf t befinden wird. Zeichnen wir auch den Schnittpunkt N der Geraden DMK mit der Peripherie des Kreises Γ und den Radius ON, so sind die beiden Dreiecke DON und MFK gleichschenklig und kongruent, also ist $DN = MK$ und daher $DM = NK$; dies beweist, daſs der Ort der Punkte M eine Cissoide ist, die man erhält aus dem Kreise Γ und der Tangente t. q. e. d.

---

1) *Arithmétique universelle,* übers. v. Beaudeux (Paris 1802) S. 83.

2) Ein analytischer Beweis dieses Satzes findet sich in Magnus, *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie* (Berlin 1833) S. 279.

Wichtiger als die Newton'sche organische Erzeugung der Cissoide sind vom theoretischen Standpunkte einige Ableitungsarten derselben aus der Parabel, auf die wir jetzt hinweisen wollen.

Wir betrachten die Parabel $y^2 = 2px$; die allgemeine Gleichung ihrer Tangente lautet: $px - \eta y + \frac{\eta^2}{2} = 0$. Das Lot, welches vom Koordinatenanfang auf die so dargestellte Gerade herabgelassen wird, hat als Gleichung $\eta x + py = 0$; der Ort der Fufspunkte aller derartigen Lote hat als Gleichung das Resultat der Elimination von η aus den beiden letzten Gleichungen, d. i.

$$x(x^2 + y^2) + \tfrac{1}{2} py^2 = 0.$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit (2), so folgt: **Die Fufspunkt-Kurve des Scheitels einer Parabel ist eine Cissoide des Diokles.** Beachten wir ferner, dafs der zum Koordinatenanfang in Bezug auf die Gerade $px - \eta y + \frac{\eta^2}{2} = 0$ symmetrische Punkt die Koordinaten hat

$$x = \frac{p\eta^2}{p^2 + \eta^2}, \qquad y = -\frac{\eta^3}{p^2 + \eta^2},$$

und eliminieren wir daraus η, so findet man:

$$x(x^2 + y^2) + py^2 = 0.$$

Folglich: **Der Ort der zum Scheitel einer Parabel in Bezug auf die Tangenten symmetrischen Punkte ist eine Cissoide des Diokles.**[1]) Da ferner der zum Scheitel der gegebenen Parabel in Bezug auf die Tangente symmetrische Punkt der Scheitel einer zur gegebenen kongruenten Parabel ist, welche auf dieser rollt, so folgt: **Wenn eine Parabel auf einer anderen rollt, sie immer von aufsen berührend, so beschreibt der Scheitel eine Cissoide**[2]). Wenn man auf die Parabel $y^2 = 2px$ die Transformation durch reziproke Radien vectoren vom Centrum O und der Potenz k^2 anwendet, so kommt man zur Cissoide mit der Gleichung $x(x^2 + y^2) = \frac{k^2}{2p} y^2$. Dieselbe Transformation ausgeführt für zwei Kegelschnitte mit Centrum, die durch die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x}{a} \pm \frac{y^2}{b^2} = 0$ dargestellt werden, liefert die beiden Kurven dritter Ordnung:

$$k^2(b^2x^2 \pm a^2y^2) = 2ab^2(x^2 + y^2)x,$$

die beide cirkular und symmetrisch in Bezug auf Ox; die von der Ellipse hergeleitete hat im Koordinatenanfang einen isolierten Punkt, die von der Hyperbel abgeleitete einen Knotenpunkt daselbst. Adoptieren wir die Nomenklatur von Neuberg[3]), so heifst die erstere Hypercissoide oder acnodale Cissoide, die andere Hypocissoide oder connodale Cissoide; der Name cuspidale Cissoide wäre demnach synonym mit der Cissoide des Diokles.

---

1) Mirman, *Sur la cissoide de Dioklès* (Nouv. ann. 3e Série, IV, 1885).

2) Hendricks, *Demonstration of a proposition* (Analyst, IV, 1877).

3) *Sur quelques systèmes de lignes articulées* (Liège 1886) S. 33.

25. Da die Cissoide eine rationale Kurve ist, so wird man die kartesischen Koordinaten ihrer Punkte durch rationale Funktionen eines Parameters darstellen können. In der That, kombiniert man (2) mit der Gleichung $x = \lambda y$, so erhält man

$$x = \frac{2r}{1+\lambda^2}, \qquad y = \frac{2r}{\lambda(1+\lambda^2)}. \text{[1]} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Daraus folgt als Bedingung der Kollinearität für die 3 Punkte $(\alpha), (\beta), (\gamma)$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

und als Bedingung der Koncyklität (des auf einem Kreise Liegens) für die vier Punkte $(\alpha), (\beta), (\gamma), (\delta)$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Die Sehne $(\alpha)(\beta)$ hat demnach die Gleichung

$$(1 + \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)x - \alpha\beta(\alpha + \beta)y - 2r = 0 \quad \ldots \quad (6)$$

im speziellen Falle, für die Tangente im Punkte (α) ist die Gleichung

$$(1 + 3\alpha^2)x - 2\alpha^3 y - 2r = 0 \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Folglich ist die Gleichung der entsprechenden Normalen

$$2\alpha^4 x + (1 - 3\alpha^2)\alpha y - 2r(1 + \alpha^2) = 0 \quad \ldots \quad (8)$$

Aus (7) kann man eine Konstruktion der Tangente an die Cissoide ableiten; sie liefert nämlich als Ausdruck für die Subtangente

$$\frac{4\alpha^2 r}{(1+\alpha^2)(1+3\alpha^2)} = \frac{x(2r-x)}{3r-x},$$

und daher kann man die Subtangente selbst durch Konstruktion einer vierten Proportionale erhalten[2]. Sucht man hingegen die Umhüllungskurve der durch (8) dargestellten Geraden, so findet man folgende Gleichung (in welcher $a = 2r$)

$$y^4 + \frac{32}{3}a^2 y^2 + \frac{512}{27}a^3 x = 0,$$

welche die Evolute der Cissoide darstellt[3]. Schließlich, sucht man den Pol der Geraden (7) in Bezug auf den Kreis $x^2 + y^2 = R^2$, so findet man den Punkt mit den Koordinaten

$$x = \frac{R^2}{2r}(1 + 3\alpha^2), \qquad y = -\frac{R^2}{r}\alpha^3,$$

---

1) K. Zahradnik, *Theorie der Cissoide auf Grundlage eines rationalen Parameters* (Prager Ber. 1873).

2) Diese Methode wurde im Grunde von Fermat angegeben als Anwendung seiner Methode der Maxima und Minima (*Oeuvres de Fermat* I S. 159 und III S. 141); ein anderes Verfahren rührt von Roberval her, s. *Observations sur la composition des mouvements et sur les touchantes des lignes courbes* (Mém. de l'Ac. des Sciences VI, Paris 1730); ein drittes werden wir in Nr. 29 kennen lernen.

3) *Educ. Times,* question 2415 (gelöst von Watson und Dale, IX, 1868); vgl. Salmon-Fiedler, *Ebene Kurven* S. 92.

dessen Ort zur Gleichung hat:

$$\left(x - \frac{R^2}{2r}\right)^3 = \frac{27 R^2}{8r} y^2.$$

Der Ort selbst ist somit eine semikubische Parabel (s. Abschn. V, Kap. 2); man sieht also: **Die polarreciproke Figur einer Cissoide in Bezug auf einen Kreis mit dem Centrum in der Spitze ist eine semikubische Parabel**[1]).

Als letzte Anwendung der Gleichung (3) suchen wir die Hüllkurve aller Sehnen, welche die Cissoide mit ihren Krümmungskreisen gemeinsam hat. Beachten wir, dafs Gleichung (5) uns zeigt, dafs der Schmiegungskreis an die Cissoide im Punkte (α) sie ferner im Punkte (-3α) schneidet, so hat die Verbindungslinie der beiden Punkte die Gleichung

$$(1 + 7\alpha^2)x - 6\alpha^3 y - 2r = 0,$$

differenziiert man nach α, so erhält man $\alpha = \frac{7x}{9y}$, und daher durch Elimination von α die Gleichung:

$$y^2 = \frac{7^3}{3^5} \frac{x^2}{2r - x},$$

die folgenden Satz beweist: **Die Hüllkurve der Sehnen, die eine Cissoide mit ihren Krümmungskreisen gemeinsam hat, ist eine der gegebenen affine Cissoide**[2]).

26. Zu einer anderen, nicht weniger nützlichen parametrischen Darstellung gelangt man, wenn man die Polargleichung (1) der Kurve mit denjenigen kombiniert, welche die kartesischen mit den Polarkoordinaten verknüpfen. Man erhält so folgende neuen Gleichungen

$$x = 2r \cdot \sin^2 \omega, \qquad y = 2r \frac{\cos^3 \omega}{\sin \omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Hiervon wollen wir einige Anwendungen machen. Bezeichnen wir mit S den Inhalt des gemischtlinigen Dreiecks, welches von dem Durchmesser CD (Taf. I, Fig. 1) der halben Asymptote und der Hälfte der Cissoide begrenzt ist, so ist klar, dafs

$$S = \int_{x=0}^{x=2r} y \cdot dx = 8r^2 \int_{\omega=0}^{\omega=2\pi} \sin^4 \omega \cdot d\omega = 8r^2 \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} 3\pi r^2.$$

Da nun S die Hälfte der zwischen der Cissoide und ihrer Asymptote liegenden Fläche ist, so kann man folgern: **Der Flächeninhalt des von der Cissoide und ihrer Asymptote begrenzten Teiles der Ebene ist dreimal so grofs als der erzeugende Kreis**[3]).

---

1) Eine von Juel gemachte Bemerkung in Tidskrift 3. Ser. III, 1873.

2) K. Zahradnik, *Beiträge zur Theorie der Cissoide* (Archiv LVI, 1876).

3) Dieser schöne Satz wurde von Fermat (Dezember 1661?) dem Carcavi mitgeteilt (s. *Oeuvres de Fermat* II, S. 454), dieser übersandte ihn am 1. Januar 1662 an Huygens (*Oeuvres de Huygens* IV, S. 2—6) zugleich mit einem Blatte, welches den von Fermat selbst gelieferten Beweis enthielt (*Oeuvres de Fermat*

Betrachten wir noch das gemischtlinige Dreieck, welches die Radien OA und OC des Grundkreises Γ, sowie den Cissoidenbogen AMC als Seiten hat, so ist dessen Inhalt gleich

$$8r^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4\omega\cdot d\omega;$$

durch Integrieren (in Teilen) erhalten wir der Reihe nach

$$\int \sin^4\omega\cdot d\omega = -\frac{\sin^3\omega\cdot\cos\omega}{4} + \frac{3}{4}\int\sin^2\omega\cdot d\omega$$

$$= -\frac{\sin^3\omega\cdot\cos\omega}{4} - \frac{3\sin\omega\cdot\cos\omega}{8} + \frac{3\omega}{8} = \frac{3\omega}{8} - \frac{3\sin 2\omega}{16} - \frac{\sin^2\omega\cdot\sin 2\omega}{8};$$

folglich ist die Fläche

$$COAMC = \frac{3\pi r^2}{4} - 2r^2.$$

Um dieses Resultat zu interpretieren, ziehen wir die Tangente in A und C an den erzeugenden Kreis und bezeichnen deren Schnitt mit N; infolge der vorigen Relation haben wir dann für die Fläche

$$CMANC = r^2 - \left(\frac{3\pi r^2}{4} - 2r^2\right) = 3\left(r^2 - \frac{\pi r^2}{4}\right);$$

$r^2 - \frac{\pi r^2}{4}$ giebt aber den Flächeninhalt des gemischtlinigen Dreiecks $CZANC$ (wo Z ein beliebiger Punkt des Kreisbogens AC) und demnach

$$\text{Fläche } CMANC = 3\cdot\text{Fläche } CZANC.$$

eine elegante Beziehung, die von Huygens entdeckt wurde[1]).

Betrachten wir, was noch allgemeiner, das von dem Cissoidenbogen CM und den Koordinaten seines Endpunktes CH und HM gebildete Dreieck, so zeigt die vorhin angestellte Berechnung, dafs sein Flächeninhalt gegeben wird durch

$$3\left(r^2\omega - \tfrac{1}{2}r^2\sin 2\omega\right) - r^2\sin^2\omega\cdot\sin 2\omega.$$

Zieht man nun noch die Gerade CG, so erkennt man, dafs die in der Klammer stehende Gröfse nichts anderes ist als der Flächeninhalt des Kreissegmentes $CZGC$, während die Gröfse $r^2\sin^2\omega\cdot\sin 2\omega$ den Inhalt des Dreiecks CHM angiebt; wir schliefsen daher

$$\text{Fläche } CHMC = 3\cdot\text{Segment } CZGC - \text{Dreieck } CHM,$$

I S. 285 und III 238); unten auf diesem Blatte setzte Huygens folgende Anmerkung hinzu: „J'ai demonstré cette proposition 4 (ans) auparavant". Erwiesen ist diese Behauptung durch einen Briefentwurf, geschrieben von dem grofsen holländischen Geometer im April 1658 (*Oeuvres de Huygens* II, S. 170—73). Der wesentliche Inhalt desselben wurde im folgenden Jahre von Wallis in *Tractatus duo* etc. (Oxoniae 1659) veröffentlicht. Die Priorität von Huygens über Fermat scheint hiernach unbestreitbar.

1) Brief an Wallis v. 6. Sept. 1658 (*Oeuvres de Huygens* II, S. 212).

eine Beziehung von bemerkenswerter Allgemeinheit, die von Johann Bernoulli entdeckt ist[1]).

Indem wir bekannte Formeln anwenden und der Kürze wegen statt $2r$ a schreiben, erhalten wir folgenden Ausdruck für das Volumen V, das erzeugt wird durch Rotation der Fläche zwischen Cissoide und ihrer Asymptote um die Tangente CN

$$\frac{1}{2}V = \pi \cdot \int_{y=0}^{y=\infty} (a^2 - x^2)\,dy = \pi a^3 \int_{\omega=0}^{\omega=\frac{\pi}{2}} (3\sin^2\omega + \sin^4\omega - 2\sin^6\omega)\,d\omega$$

$$= \pi a^3 \left[3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\pi}{2} - 2\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{\pi}{2}\right] = \pi a^3 \cdot \frac{5\pi}{8},$$

oder auch, wenn wir wieder für a, $2r$ schreiben

$$V = 2 \cdot 5\pi^2 r^3.$$

Wenn wir anderseits das durch Rotation des gegebenen Kreises um dieselbe Tangente CN entstandene Volumen mit $\overline{V}$ bezeichnen, so haben wir

$$\overline{V} = \pi r^2 \cdot 2\pi r = 2\pi^2 \cdot r^3;$$

und also

$$V = 5\overline{V},$$

eine von Huygens mitgeteilte Gleichheit[2]), die sich leicht in Worte kleiden läſst. Sei nun x_g die Abscisse des Schwerpunktes der betreffenden Cissoide, so hat man nach der Pappus-Guldinschen Regel $2\pi x_g \cdot 2S = V$. Setzen wir die Werte für S und V ein, so ergiebt sich

$$3x_g = 5r, \text{ oder auch } \frac{x_g}{2r - x_g} = \frac{5}{1};$$

damit ist bewiesen: **Der Schwerpunkt der Cissoidenfläche teilt die Strecke der Symmetrieaxe, zwischen Spitze und Asymptote in zwei Teile, von denen der zur Spitze hin gelegene fünfmal so groſs ist als der andere.**

Bezeichnen wir in ähnlicher Weise mit U das Volumen, das durch Rotation der Cissoide um ihre Asymptote entsteht, und benutzen die vorigen Formeln, so finden wir:

$$U = 2S \cdot 2\pi(2r - x_g) = 3\pi r^2 \cdot 2\pi\left(2r - \frac{5r}{3}\right) = 2\pi^2 r^3 = 2\pi r \cdot \pi r^2,$$

und demnach: **Das durch Rotation der Cissoide um ihre Asymptote erzeugte Volumen ist gleich dem des Ringes, der durch entsprechende**

---

1) *Remarques sur le livre intitulé Analyse des infiniment petites par M. Stone* in *Joh. Bernoullis opera* IV, S. 175—76. Eine andere Interpretation der allgemeinen Formeln derselben Kurve findet sich in der o. a. *Analytischen Geometrie* von M. Simon, S. 286.

2) S. den Brief an R. de Sluse v. 5. April 1658 und an Wallis v. 6. Sept. 1658 (*Oeuvres de Huygens* II, S. 163 u. 212).

Rotation des gegebenen Kreises erzeugt wird. Es ist dies ein schöner Satz von R. de Sluse, der neuerdings die Aufmerksamkeit einiger Geometer auf sich gezogen hat[1]).

27. Andere ähnliche Volumina wurden von Côtes berechnet[2]), der sich auch mit der Berechnung der Fläche beschäftigt hat, die durch Rotation der Cissoide um ihre Spitzentangente entsteht; seinem Beispiele folgte Johann Bernoulli[3]); wir wollen dies jedoch unterlassen und dieses Kapitel beschliefsen, indem wir das letzte, die Cissoide betreffende metrische Fundamentalproblem behandeln, nämlich ihre Rektifikation.

Aus (2) ergiebt sich für den Bogen s der Cissoide gerechnet von der Spitze an folgender Ausdruck:

$$s = r \int_0^x \frac{1}{2r - x} \sqrt{\frac{8r - 3x}{2r - x}} \cdot dx;$$

Um diese Integration auszuführen, setzen wir

$$2r = a, \qquad z^2 = \frac{4a - x}{a - x} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

und erhalten:

$$s = a \int_2^z \left(1 + \frac{3}{z^2 - 3}\right) \cdot dr = a \int_2^z \left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{z - \sqrt{3}} - \frac{1}{z + \sqrt{3}}\right)\right] dz$$

oder

$$s = a(z - 2) + \frac{a\sqrt{3}}{2} \log \frac{(z - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{(z + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

Newton hat eine geometrische Konstruktion von s angegeben, wir wollen uns dabei nicht aufhalten, sondern die Gleichung (11) anwenden, um einen bemerkenswerten Satz, den wir Paul Fufs verdanken, zu beweisen[4]). Kombinieren wir zu dem Zwecke Gleichung (2) mit (10), so findet man:

$$y = a \frac{(z^2 - 4)^{\frac{3}{2}}}{z^2 - 3},$$

daher liefert (11):

$$\frac{s - y}{a} = z - 2 - \frac{(z^2 - 4)^{\frac{3}{2}}}{z^2 - 3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \log \frac{(z - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{(z + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})};$$

---

1) S. die Aufsätze v. P. Gilbert, Massau und C. Le Paige in *Mathésis* VI, 1886.

2) *Harmonia mensurarum* (Cantabridge 1722) S. 90—92.

3) S. die 18 erwähnten *Remarques* S. 178—179.

4) S. die letzte dieser Fragen behandelt in der Abhandlung: *Quantum differat longitudo arcus curvae ab asymptota utraque in infinitum usque protensa inquiritur* (Mem. de Petersbourg, 5e Série, IX, 1824).

Entwickelt man nun in eine Reihe, so findet man

$$z-2-\frac{(z^2-4)^{\frac{3}{2}}}{z^2-3}=z-2-\left(z^3-6z+\frac{6}{z}+\cdots\cdots\right)\left(\frac{1}{z^2}+\frac{3}{z^4}+\cdots\cdots\right)$$
$$=-2+\text{Glieder mit negativen Potenzen von } z;$$

daher

$$\frac{s-y}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\log\frac{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{z}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{z}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}-2+\text{Glieder mit negativen Pot. von } z;$$

läfst man nun x bis ∞ wachsen, so wächst auch z bis ∞, und man hat

$$\lim_{y=\infty}(s-y)=a\sqrt{3}\log(2+\sqrt{3})-2a;$$

folglich **ist die Differenz zwischen der Gesamtlänge der Cissoide und der Asymptote eine endliche Gröfse**, nämlich das Doppelte von

$$a\sqrt{3}\cdot\log(2+\sqrt{3})-2a.$$

Fünftes Kapitel.

Verallgemeinerungen der Cissoide.

28. Die Erzeugung der Cissoide bietet vielfache Verallgemeinerungen dar, von denen einige nicht ohne Interesse sind.

Vorerst kann man annehmen, dafs die Punkte C und D nicht die Endpunkte eines Durchmessers, sondern ebensogut die einer Sehne seien (Taf. I, Fig. 3). Behalten wir alle Bezeichnungen der vorigen Kapitel bei, sowie dafs DF Tangente des Kreises bleibt und bezeichnen mit α den Winkel der Sehne CD mit dem Radius CO, nehmen C als Pol und CD als Polarachse, so finden wir

$$\varrho=CM=EF=CF-CE=\frac{2r\cos^2\omega}{\cos(\omega+\alpha)}=2r\cos(\omega-\alpha)$$

oder reduziert

$$\varrho=\frac{2r\sin^2\omega}{\cos(\omega+\alpha)}.$$

Die durch diese Gleichung dargestellte ist allgemeiner als die durch (1) in Nr. **24** dargestellte und geht auf diese zurück, wenn $\alpha=0$; sie heifst schiefe Cissoide zum Unterschiede von der Diokleischen, welche öfters auch die gerade Cissoide genannt wird. — Gehen wir zu kartesischen Koordinaten über, so verwandelt sich (1) in folgende

$$(x^2+y^2)(x\cos\alpha-y\sin\alpha)=2ry^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

aus der man leicht ableitet, dafs die entsprechende Kurve C zur Spitze hat, mit CD als Spitzentangente; ferner geht auch sie durch

cyklischen Punkte der Ebene. Die schiefe Cissoide hat geringere Wichtigkeit als die des Diokles; nichtsdestoweniger trifft man auf sie bei einigen Gelegenheiten; als Beispiel möge folgendes dienen: $v^2 = 2pu$ sei die Gleichung einer Parabel, bezogen auf ein schiefwinkliges Axensystem mit dem Axenwinkel α; setzt man

$$x = u + v \cdot \cos\alpha, \quad y = v \cdot \sin\alpha, \quad \text{demnach } u = x - y \cot y\alpha, \quad v = \frac{y}{\sin\alpha},$$

so wird man erhalten

$$y^2 = 2p \sin\alpha\,(x \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha)$$

als Gleichung der betrachteten Parabel in rechtwinkligen Koordinaten. Macht man die durch folgende Formeln bestimmte Transformation durch reziproke Radien

$$x = \frac{k^2 x'}{x'^2 + y'^2}, \qquad y = \frac{k^2 y'}{x'^2 + y'^2},$$

so bekommt man die durch folgende Gleichung dargestellte Kurve

$$(x'^2 + y'^2)(x' \cos\alpha - y' \sin\alpha) = \frac{k^2}{2p \sin\alpha} y'^2,$$

welche mit (2) verglichen auf folgenden Satz schliefsen läfst: **Bei einer beliebigen Inversion, deren Centrum auf einer Parabel liegt, verwandelt sich diese Kurve in eine schiefe Cissoide** (vgl. Nr. 24).

29. Mit noch gröfserer Allgemeinheit kann man auf folgende Weise die Konstruktion der Diokleischen Kurve erweitern: „Gegeben sei ein Kegelschnitt Γ, auf ihm ein Punkt C und eine Gerade d in seiner Ebene; man ziehe durch C eine beliebige Gerade r, die Γ zum zweitenmal in E und die Gerade d in F schneidet; man trage auf r die Strecke CM gleich und im gleichen Sinne wie EF ab“: der Ort der Punkte M ist eine Cissoidalkurve[1]). Es ist leicht einzusehen, dafs die so entstandenen Kurven dritter Ordnung sind und den festen Punkt zum Doppelpunkt haben; auch ist die Thatsache bemerkenswert, dafs alle rationalen Kurven dritter Ordnung sich durch dieses Verfahren konstruieren lassen, mit Ausnahme derjenigen, welche die unendlich ferne Gerade zur Wendepunktslinie haben[2]). Hierin besitzt man also eine nützliche Methode, um die Eigenschaften aller rationalen Kurven dritter Ordnung, mit Ausnahme der eben angegebenen, zu untersuchen[3]).

Führt man den Verallgemeinerungsprozefs noch weiter aus, so gelangt man zu folgender sehr ausgedehnten Gruppe von Kurven: „Es seien in einer Ebene zwei Kurven Γ_1 und Γ_2 gegeben und ein fester Punkt O; durch diesen ziehe man einen beliebigen Strahl, der

---

1) K. Zahradnik, *Cissoidalkurven* (Archiv LVI, 1874).

2) G. de Longchamps, *Sur les cubiques unicursales* (Nouvelle correspondance mathématique IV, 1878 oder Progreso I, 1891).

3) G. Stiner, *Metrische Eigenschaften der Kurve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte* (Monatshefte IV, 1893).

die Kurven bezüglich in den Punkten P_1 und P_2 trifft, auf dem Strahle bestimme man den Punkt P so, dafs $OP = OP_1 \pm OP_2$ sei. Der Ort Γ der Punkte P ist eine allgemeine Cissoide"[1]). Wenn man die Polargleichungen der beiden Kurven Γ_1 und Γ_2, $\varrho_1 = f_1(\omega)$, $\varrho_2 = f_2(\omega)$ kennt, so findet man alsbald die von Γ als $\varrho = f_1(\omega) \pm f_2(\omega)$. Nennen wir nun die polaren Subnormalen von $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ bezüglich s_n, s_{n_1}, s_{n_2}, so hat man $s_n = \frac{d\varrho}{d\omega}$, $s_{n_1} = \frac{d\varrho_1}{d\omega}$, $s_{n_2} = \frac{d\varrho_2}{d\omega}$ und daher $s_n = s_{n_1} \pm s_{n_2}$. Daraus folgt, wenn man die Tangenten an die Kurven Γ_1 und Γ_2 konstruieren kann, man alsbald s_{n_1} und s_{n_2} hat, und also auch s_n, dafs man dann auch im stande ist die Tangente in allen Punkten der Kurve Γ zu konstruieren[2]). — Durch Anwendung dieser Idee ist man nicht nur im stande, die Tangente an die Cissoide des Diokles auf eine von der durch Fermat (s. Nr. **25**) mitgeteilten verschiedenen Weise zu ziehen, sondern man kann auch an die schiefe Cissoide und alle Cissoidalkurven die Tangente ziehen.

Es soll noch bemerkt werden, dafs in der dargelegten Konstruktion der allgemeinen Cissoiden die Kurven Γ_1 und Γ_2 auch zusammenfallen können; es entsteht dann folgende Konstruktion: Gegeben eine Kurve Δ und ein Punkt O ihrer Ebene, nennen wir P_1 und P_2 zwei der Schnittpunkte der Kurve mit einem durch O gezogenen Strahle r, und nimmt auf der Transversalen einen Punkt P, so dafs $OP = OP_1 \pm OP_2$, so ist der Ort der Punkte P eine Cissoide. Z. B. ist Δ ein Kreis mit dem Radius a und hat der Punkt O vom Mittelpunkte C die Entfernung b, so hat die Cissoide (für O als Pol und OC als Axe) die Polargleichung:

$$\varrho = 2\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \omega}.$$

Die Kurve ist, wie wir später sehen werden, eine Lemniskate von Booth (Abschn. III, Kap. 4), und wenn $b = a\sqrt{b}$ eine Bernoullische Lemniskate.

Unter den zuletzt allgemein definierten Cissoiden findet sich eine cirkulare symmetrische Kurve dritter Ordnung, die auf den ersten Blick nicht in diese Kategorie zu gehören scheint[3]). Ihre Entstehungsweise ist folgende (vgl. Taf. I, Fig. 4): „Gegeben ist ein Kreis mit dem Mittelpunkte O und dem Radius r, sowie eine feste Tangente desselben a; man betrachte nun eine bewegliche Tangente b deren Berührungspunkt B, und deren Schnitt mit a C sei; der Ort der

---

1) Schulz von Strafsnitzky, *Über die Cissoide der Kurven* (Baumgartners Zeitschr. für Phys. und Math., VIII, 1830); Peano, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (Turin 1887) S. 85—86.

2) Peano, a. a. O.

3) Jerabek, *Sur une cubique circulaire* (Mathésis 2. Serie, VIII, 1898).

Mittelpunkte M der Strecke BC ist dann die fragliche Kurve.“ Nehmen wir O als Koordinatenanfang und das von O auf a gefällte Lot OA zur x-Axe, so können wir als Koordinaten von B nehmen bezüglich $r \cdot \cos \omega$, $r \cdot \sin \omega$; die Gleichung der Tangente b ist daher

$$x \cdot \cos \omega + y \cdot \sin \omega - r = 0.$$

Die Koordinaten von C sind $x = r$, $y = r \frac{1 - \cos \omega}{\sin \omega}$, daher werden die Koordinaten von M ausgedrückt durch

$$x = \frac{r}{2}(1 + \cos \omega), \qquad y = \frac{r}{2}\left(\sin \omega + \frac{1 - \cos \omega}{\sin \omega}\right) . \quad . \quad . \quad (3)$$

Diese parametrische Darstellung beweist inzwischen die Rationalität der fraglichen Kurve. Eliminieren wir ω, so ergiebt sich

$$4x(x^2 + y^2) = r^2(r + 3x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Die Kurve selbst ist also eine cirkulare symmetrische Kurve dritter Ordnung, die den Punkt $R\left(-\frac{r}{2}, 0\right)$ als isolierten Punkt, O als Brennpunkt und die y-Axe als Wendeasymptote hat. Um zu zeigen, dafs sie eine Cissoide ist, bezeichnen wir den A diametral gegenüberliegenden Punkt mit D und die entsprechende Tangente mit d. Ziehen wir DB und OC, so sind diese parallel, indem beide zugleich senkrecht auf AB stehen. Wir ziehen durch M die Parallele zu beiden, diese trifft die Radien OB und OD in ihren Mittelpunkten E bezw. R und schneidet d in F. Die rechtwinkligen Dreiecke DFR und BME sind kongruent, also $RF = ME$, und daher $RM = EF$. Folglich ist der Ort der Punkte M eine Cissoide, die entsteht, wenn man R als den festen Punkt und die Gerade d und den Kreis um O mit $\frac{r}{2}$ beschrieben als Fundamentalkurven nimmt. — Wir wollen noch bemerken, ohne dies weiter zu beweisen, dafs man die soeben gekennzeichnete Kurve auch erhält, wenn man einen Kreis einer geeigneten quadratischen Transformation unterzieht.[1])

30. Zu einer anderen Kurve dritter Ordnung, die auch eine wirkliche Verallgemeinerung der Cissoide ist, gelangt man durch folgende Konstruktion (Taf. I, Fig. 5): „Gegeben ein rechter Winkel OBC, auf dessen Schenkeln die Punkte O und C festliegen, man ziehe durch C einen beliebigen Strahl, der BO in D trifft; durch D ziehe man die Senkrechte zu DC und projiziere auf diese den Punkt O in M. Der Ort der Punkte M ist eine Kurve, die wegen ihrer Schlingen-Form Ophiuride (ὄφις, Schlange, und οὐρά, Schwanz) genannt ist[2]).“

---

1) Retali, *Sur une cubique circulaire* (Mathésis 2e Serie, VIII, 1898).

2) Uhlhorn, *Entdeckungen in der höheren Geometrie* (Oldenburg, 1809, S. 12). Vgl. auch Blasel, *Die Cissoide und eine ihr verwandte Kurve* (Progr. Neifse 1881).

Nehmen wir O als Pol, die zum Schenkel BO Senkrechte als Polaraxe, setzen $OB = a$, $BC = c$, so haben wir

$$BD = c \cdot \operatorname{tg} \omega, \qquad OD = b - c \cdot \operatorname{tg} \omega, \qquad OM = OD \cdot \sin \omega.$$

Die Polargleichung der Ophiuride ist daher:

$$\varrho = b \cdot \sin \omega - c \frac{\sin^2 \omega}{\cos \omega}, \quad \dots \dots \quad (5)$$

und ihre kartesische Gleichung

$$x(x^2 + y^2) = y(ax - cy) \quad \dots \dots \quad (6)$$

Die Ophiuride ist also eine cirkulare Kurve dritter Ordnung, die O zum Doppelpunkt hat; die bezüglichen Tangenten sind die Gerade OC und die Parallele durch O zu BC. Lassen wir in (6) $a = 0$ werden, so erhalten wir wieder die Cissoide des Diokles; damit ist erwiesen, dafs die Ophiuride eine Erweiterung derselben ist. Zu demselben Schlusse gelangen wir auch, wenn wir beachten, dafs die durch Gleichung (6) dargestellte Kurve die Fufspunktkurve der Parabel $y^2 = 2cx$ in Bezug auf den Punkt $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ ist; demnach: **Die Fufspunktkurve einer Parabel, in Bezug auf einen Punkt der Scheiteltangente, ist im allgemeinen eine Ophiuride, im speziellen (Nr. 24) eine Cissoide, wenn der Punkt der Scheitel selbst ist**[2]. Aus Gleichung (6) ergiebt sich folgende Darstellung:

$$x = \frac{a\lambda - c\lambda^2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{a\lambda^2 - c\lambda^3}{1 + \lambda^2}.$$

Die Parameter der drei Wendepunkte, von denen nur einer reell ist, sind die Wurzeln der Gleichung

$$ac\omega^3 + 3c^2\omega^2 - 3ac\omega + a^2 = 0,$$

die Wendepunkte selbst liegen auf der Geraden

$$3cx + ay + a^2 = 0.$$

u. s. w. u. s. w.

---

1) Von diesem Gesichtspunkte aus wurde die Ophiuride betrachtet von Matthiesen (*Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen*, Leipzig 1878, S. 940—41) im Verlaufe einer Beleuchtung der Platonischen Methode (s. Loria, *Le scienze esatte* u. s. w. Lib. I, n. 62) zur Lösung des Delischen Problems.

Sechstes Kapitel.

Die Cartesische Parabel.

31. Um ein allgemeines Beispiel einer Kurve anzuführen, auf welche die von ihm entdeckten Methoden angewandt werden können, betrachtete Descartes die auf folgende Weise erzeugten Linien[1]): „In einer Ebene sei eine Kurve Γ und ein mit ihr unveränderlich verbundener Punkt A gegeben, ferner ein fester Punkt F; man denke sich die Kurve translatorisch bewegt und bestimme für jede Lage den Schnittpunkt mit der jeweilig zugehörigen Geraden FA; der Ort der so erhaltenen Punkte ist eine Cartesische Kurve.“ Die Konstruktion ist eine spezielle Art der Transformation ebener Figuren. Um sie in Formeln zu kleiden, nehmen wir die vom Punkte A während der gedachten Bewegung beschriebene Gerade zur x-Axe, und das vom Punkte F auf sie gefällte Lot zur y-Axe. Wenn nun $y = f(x)$ die Gleichung der Kurve in ihrer Anfangslage ist, y_0 die Ordinate von F und l die Abscisse von A in der Anfangslage, so werden

$$y = f(x + a), \qquad \frac{x}{a + l} + \frac{y}{y_0} = 1$$

die Gleichungen von Γ und der Geraden FA in einer beliebigen Lage der Bewegung sein. Durch Elimination von a erhält man

$$y = f\left(x - l + \frac{x y_0}{y_0 - y}\right)$$

als Gleichung der Cartesischen Kurve.

Ist Γ eine Gerade, so kann man erkennen, daſs die erhaltene Kurve erzeugt wird durch die Schnitte entsprechender Elemente eines Strahlenbüschels und eines projektiven Büschels paralleler Strahlen, sie ist eine Hyperbel. Ist Γ ein Kreis, so ist die erzeugte Kurve eine Konchoide des Nikomedes (Abschn. III, Kap. 5). Wenn schlieſslich Γ eine Parabel ist, so entsteht eine Kurve, die von Descartes besonders bezeichnet wurde[2]) und daher Parabola cartesiana genannt wird[3]). Andere nannten sie Trident des Cartesius[4]), andere, um hervorzuheben, daſs die Kurve aus zwei getrennten Zügen bestehe,

---

1) *La géométrie de René Descartes,* Nouv. édition. Paris 1886. S. 18.

2) Ebendas. S. 19.

3) Dieser Name findet sich schon in der *Enumeratio linearum tertii ordinis* von Newton.

4) Bellavitis *Sulla classificazione delle curve del terz' ordine* (Mem. della Soc. Ital. delle Scienze XXV, Teil II, S. 24. 1851); Bellacchi, *Lezioni ed esercizi di algebra complementare* Bd. I (Florenz 1898), S. 43, wo noch allgemeinere Kurven betrachtet sind.

nannten die Teile parabolische Conchoiden[1]) oder jeden Begleitkurve der Paraboloide des Cartesius[2]).

Sei nun $y^2 = 2px$ die Gleichung der erzeugenden Parabel, so entsteht die der Cartesischen Parabel durch Elimination von a aus den Gleichungen:
$$y^2 = 2p(x + a), \qquad \frac{x}{a+l} + \frac{y}{y_0} = 1,$$
lautet also
$$\frac{y^2(y - y_0)}{2p} - (x - l)(y - y_0) + xy_0 = 0.$$

Die Cartesische Parabel ist also eine Kurve dritter Ordnung, die durch den festen Punkt F geht; sie hat den unendlich fernen Punkt der x-Axe als Doppelpunkt, die entsprechenden Tangenten sind diese Axe und die unendlich ferne Gerade; die Kurve besitzt aufserdem einen Wendepunkt, u. s. w. Roberval hat gelehrt, die Tangente zu finden[2]). Die Cartesische Parabel steht unter den speziellen Kurven dritter Ordnung in Bezug auf ihr Alter nur der Cissoide des Diokles nach, sie ist aber viel weniger wichtig und weniger bekannt als diese.

Siebentes Kapitel.

Das Folium Cartesii.

32. Eine der unmittelbarsten und wichtigsten Dienstleistungen der Definition der Koordinaten und des Begriffes der Gleichung eines geometrischen Ortes ist die Möglichkeit Kurven, deren Punktkonstruktion oder Entstehung durch kontinuierliche Bewegung man nicht kennt, dennoch in die Geometrie einzuführen. Eine solche unter den älteren Linien — alt, sofern es die analytische Geometrie ist — wird durch folgende Eigenschaft charakterisiert: „Für jeden Punkt der fraglichen Linie ist die Summe der Kuben seiner rechtwinkligen kartesischen Koordinaten gleich dem rechtwinkligen Parallelipipedon, das als Kanten eben diese Koordinaten und eine gegebene Länge hat. Die Kurve, um die es sich handelt, hat, wenn man diese Länge mit $3a$ bezeichnet, die Gleichung
$$x^3 + y^3 = 3axy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
Die Diskussion ergiebt leicht, dafs sie im Koordinatenanfang einen Knotenpunkt hat mit den Koordinataxen als zugehörigen Tangenten;

---

1) Agnesi, *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù* (Mailand 1748) I, S. 209; Montucla, *Histoire des mathématiques,* Nouv. éd. II, S. 144.

2) Agnesi op. cit. II, S. 506.

3) *Observations sur la composition des mouvements* (Mém. de l'Academie Royale des Sciences, VI, Paris 1730); dort findet sich der Name: Parabole de M. des Cartes.

in dem von den positiven Richtungen dieser Geraden gebildeten Winkel hat die Kurve das Aussehen eines zum Winkelhalbierer dieser Geraden symmetrischen Blattes. Die Länge des Blattes ist $\frac{3a}{\sqrt{2}}$. In den beiden anliegenden Winkelräumen besitzt die Kurve zwei unendliche Zweige, die zu einander symmetrisch sind in Bezug auf jenen Winkelhalbierer und sich asymptotisch der Geraden $x + y + a = 0$ nähern, jenseits welcher sich keine reellen Punkte der Kurve befinden.

Zu diesen Schlüssen konnten die ersten Bearbeiter der analytischen Geometrie nicht gelangen, weil sie noch nicht die fundamentalen Bestimmungen über die Vorzeichen der Koordinaten getroffen hatten und aus Scheu vor dem Unendlichen, nicht-endliche Werte der Koordinaten ausschlossen. Infolgedessen entging ihnen die Existenz der beiden unendlichen Zweige der Kurve (1), dafür fügten sie zur Ergänzung des Blattes, welches nur einen Teil der Kurve bildet, diejenigen, die symmetrisch zu den Axen und zum Koordinatenanfang liegen, hinzu. So entstand eine Gruppe von vier Blättern, die ein gewisses Analogon zum Blütenkelche des Jasmin bildet, oder auch eine Gruppe von vier Schleifen, deren Gesamtheit an den Knoten einer Halsbinde erinnert; so erklärt sich der Name Fleur de Jasmin und Galante, mit welchem Roberval die betrachtete Kurve bezeichnete, und den andere in der Folge annahmen. Jedoch aus erklärlichen Gründen geniefst weder der eine noch der andere von diesen beiden Namen heute den Vorzug: man nennt die Kurve Cartesisches Blatt (Folium Cartesii) zum Andenken an den Geometer, der sie zuerst erwähnt hat.

Wer hat wohl zuerst diese Benennung angewandt? Diese Frage wurde zweimal[1]) und in verschiedener Form von P. Tannery aufgeworfen, ohne jedoch eine genügende Antwort zu erhalten[2]). Um diese, den Leser jedenfalls überraschende Thatsache zu erklären, bemerken wir zunächst, dafs der älteste Hinweis auf die Kurve (1) sich in einem Briefe findet, den Descartes am 18. Januar 1638 an P. Mersenne richtete, damit er ihn dem Fermat mitteile[3]); daselbst findet sich die Definition in Worten, wie wir sie zu Anfang dieses Kapitels mitgeteilt haben, als auf eine Kurve sich beziehend, auf welche die Tangentenkonstruktion des berühmten Senators von Toulouse nicht anwendbar sei. Die Kurve wird mit einem Namen nicht bezeichnet und die Definition wird mit einer Figur begleitet, die beweist, dafs die Gestalt der Kurve Descartes unbekannt war. Sieben Monate später (am 18. August 1638) machte dieser grofse Geometer die Konstruktion der zur Symmetrieaxe parallelen Tangente bekannt,

1) *Intermédiaire* III, 1896, S. 85 und IV, 1897, S. 125.
2) Daselbst IV, 1897, S. 19 u. 237; V, 1898, S. 128.
3) *Oeuvres de Descartes,* ed. Cousin VII (Paris 1824) S. 11.

indem er „la plus grande largeur de la feuille“ ableitet[1]). „Soit *ACKFA*“, beginnt er[2]), „l’une des feuilles de cette courbe dont l’essieu est *AH* et le plus grand diamètre de la feuille est *AK*“; und diese Worte — bei denen sich zum erstenmal das Wort „feuille“ findet — beweisen, daſs, obwohl Descartes hochmütig versicherte, daſs die Gestalt der Kurve „se voit à l’œil sans aucun esprit ni science“[3]) die Gestalt selbst ihm in der That völlig unbekannt war; eine bemerkenswerte Thatsache, wenn man bedenkt, daſs die *Géometrie* ein Jahr bevor diese Worte geschrieben wurden, veröffentlicht worden war. Der Name „Blatt des Cartesius“ findet sich nicht bei Roberval, der in einem Briefe an Fermat vom 1. Juni 1638[4]) den Ausdruck „sa (d. i. Descartes) figure qui est une espèce d’ovale“ anwendet; jedoch in einem Briefe von Huygens an Leibniz vom 17. September 1693 findet sich die Bezeichnung „la feuille de Mr. des Cartes ou de Roberval“[5]), jedoch an diese Nomenklatur hielt sich der berühmte Niederländer nicht, da er in einem viel älteren Briefe vom 12. Januar 1693, der auch an Leibniz gerichtet war, folgende Umschreibung anwendet: „La courbe dont l’équation est $x^3 + y^3 = nxy$ que M. Descartes reporte dans sa lettre 65e du 3e vol. et qu’il a consideré aussi bien, que M. Hudde“[6]), anderswo zieht er es vor, ihr überhaupt keinen Namen zu geben[7]). Dagegen wurde der für die Kurve von ihrer angeblichen Ähnlichkeit mit einer Bandschleife hergenommene Name von Descartes[8]), Fermat[9]), Leibniz[10]) und von Barrow[11]) angewendet. Ohne ihr einen Namen beizulegen, betrachteten sie: Schooten — der im V. Buche seiner *Exercitationum mathematicarum* (Leyden 1657)[12]) eine Konstruktion derselben, die er Hudde verdankt, an einer Figur darlegt, in welcher die Kurve als aus einem einzigen Blatte gebildet dargestellt wird —, der Marquis de l’Hôpital, in seiner *Analyse des infiniment petites* (Paris 1696)[13]),

1) *Oeuvres de Descartes* ed. Cousin VII, 1824, S. 97. 2) Daselbst S. 94.

3) Das. S. 98. Derselbe Gedanke findet sich in einem Briefe an P. Mersenne vom 27. Juli 1638 in anderer Form wieder, wo es heiſst: „Et M. Roberval me semble aussi vain avec son galanth qu’une femme qui attache un ruban à ses cheveux affin de paroitre plus belle; car il n’a en besoin d’aucune industrie pour trouver la figure de cette ligne dont je lui avais envoyé la définition. Das. S. 127—28. 4) *Oeuvres de Fermat* II, S. 150—51.

5) *Leibniz* ed. Gerhardt II (Berlin 1850) S. 161. 6) Das. S. 153.

7) *Oeuvres de Huygens* IV, S. 283, 312, 315. 8) Das. S. 33.

9) *Oeuvres de Fermat* II, S. 169.

10) Brief an Huygens v. 10.(20.) März 1693, wo es heiſst: „la galande de Mr. de Roberval“. *Leibniz* ed. Gerhardt II, S. 158.

11) *Lectiones geometricae* (London 1670).

12) Daher der v. Fermat u. anderen angewandte Namen curva Schootenii.

13) Ich habe die zu Avignon 1768 hergestellte Ausgabe im Auge; vom Folium ist die Rede auf S. 9, 59 u. 243; auf S. 59 ist es bezeichnet mit dem Namen „Paraboloide de M. Descartes“.

und Johann Bernoulli in den *Lectiones mathematicae*, die er in den Jahren 1691—92 hielt[1]). Die Bezeichnung „Blatt“ findet sich im 18. Jahrhundert; so in der *Histoire de l'Académie des Sciences* 1706, wo sich S. 94 folgende Bemerkung findet, die sich wahrscheinlich auf die Kurve, um die es sich hier handelt, bezieht: „Monsieur Carré a donné en trois manières différentes la quadrature d'une courbe appelé Folium ou feuille a cause de son contour“; so nannte Moivre die Kurve (1) „the Foliate“[2]), und später bemerkten Bragelogne[3]) und Cramer[4]), dafs „la partie finie d'une courbe, qui renferme un espace, s'appelle feuille“. Schliefslich hat D'Alembert, indem er dem „folium de Descartes“ einen besonderen Artikel in der *Encyclopédie méthodique* widmete, ohne Zweifel dazu beigetragen, den Gebrauch dieses Namens, dessen Anfänge sich zweifellos in den vorhin angeführten Briefen von Descartes (18. Aug. 1638) und Huygens (12. Sept. 1693) finden, in der ganzen civilisierten Welt zu verbreiten.

Zu den schon erwähnten wollen wir noch den Namen ligne inclinée hinzufügen, mit welchem das Blatt in einem von P. Tannery untersuchten Manuskripte des 17. Jahrhundert bezeichnet wird. Aus der folgenden Zeit, in welcher die Gestalt der Kurve genau bestimmt wurde, sollen zwei Punkte erwähnt werden: Erstens, dafs Huygens und dann der Marquis de l'Hôpital die unendlichen Zweige derselben betrachteten und auch die Asymptote bestimmten. Zweitens, dafs sowohl die erwähnte Schrift von Moivre als auch die *Lectiones* von Bernoulli mit exakten Zeichnungen der Kurve versehen sind Daher ist das Jahr 1691, oder wenn man nur das Jahr der Veröffentlichung rechnen will, 1715 eine obere Grenze für die Entdeckung der richtigen Gestalt des Foliums.

33. Der von Descartes am 23. August 1638 geschriebene Brief enthält noch einen weiteren, sehr bemerkenswerten Passus, nämlich folgenden: „Au reste, puis que je vois qu'il (Roberval) a pris plaisir à considerer la figure de cette ligne laquelle il nomme une galanth ou une fleur de jasmin, je lui en veux ici donner une autre, qui ne merite pas moins que celle-là les mêmes noms et qui est néamoins beaucoup plus aisée à décrire, en ce que l'invention de tous ses points ne dépend d'aucune équation cubique. Celle-ci est donc telle qu'ayant pris AK pour l'essieu de l'une de ces feuilles et en AK le point N à discrétion, il faut seulement faire que le carré de l'ordonné LN soit au carré du segment AN, comme l'autre segment NK est à l'aggregat de tout AK et du triple de AN et ainsi on aura le point L,

1) *Joh. Bernoulli opera* III, S. 403.

2) *A ready description and quadrature of a curve of the third order resembling that commonly called the Foliate* (Phil. trans. Nr. 345).

3) *Mém. de l'Acad. des Sciences,* Paris 1730, S. 165.

4) *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Genève 1750) S. 9.

c'est à dire tous ceux de la courbe, puisque le point N se prend à discrétion. Je pourrais lui donner une infinité d'autres lignes, qui ne seroient pas d'une nature plus composée que celle-la et toutefois qui representoiraient des fleurs et des galanths beaucoup plus doubles et plus beaux; etc."[1]) Bringen wir diese Definition in Formeln, so ersieht man, dafs die neue Kurve die Gleichung hat.

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{l - x}{l + 3x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Nun beachten wir, dafs, wenn wir als Koordinataxen die Winkelhalbierer zwischen den alten Axen nehmen, die Transformierungsgleichungen

$$x = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{\xi - \eta}{\sqrt{2}},$$

sind. Infolgedessen geht (2) über in

$$\xi^3 + \eta^3 = l\sqrt{2}\,\xi\eta.$$

Da diese von derselben Gestalt ist, wie Gleichung (1), so ist die Kurve Descartes' nicht verschieden von dem Folium. Dafs dies dem Verfasser des *Discours de la méthode* bekannt gewesen, wird durch einen späteren Brief von Descartes[2]) an Mersenne bewiesen, worin sich folgender Satz findet: „J'oubliois à vous dire que la nouvelle ligne que je proposa au sieur R.(oberval) à la fin de la quatrième page de cette lettre est tout la même que l'autre, ce que je fais pour me rire de lui s'il ne reconnoît pas à cause qu'il dit la connaître comme le cercle." Wenn demnach Descartes die Identität der durch die Gleichungen (1) und (2) dargestellten Kurven erkannt hat, so ist diese Thatsache von grofser Bedeutung, indem sie beweist, dafs er im stande war, wenigstens in besonderen Fällen, eine Transformation der Koordinaten auszuführen.

Die Transformation der Gleichung (1) in (2) ist nicht blofs von historischem Interesse, sondern kann auch benutzt werden, um die Kurve zu konstruieren. Es seien (s. Taf. I, Fig. 6) M und M_1 zwei Punkte der Kurve (2) symmetrisch zur x-Axe gelegen; dann ist MM_1 parallel zu OY und schneidet OX in einem Punkte N. Beschreiben wir nun einen Kreis, der durch O geht und dessen Centrum auf OX liegt, und projizieren von O aus auf diesen die Punkte M und M_1 in M' und M_1', so wird auch $M'M_1'$, senkrecht zu OX sein und ein paralleles Strahlenbüschel projektiv zu dem ähnlich entstandenen der Geraden MM_1 beschreiben. Umgekehrt: Es sei eine Projektivität zwischen den Punkten N und N' auf OX gegeben; man ziehe durch N' die Parallele zu OY und bestimme deren Schnitte mit dem Kreise

1) *Oeuvres de Descartes* ed. Cousin, VII, S. 92.

2) Ich sage „späteren", da er später gedruckt wurde (Vol. cit. S. 178—80) und die Worte enthält „Nous sommes au 23 d'août 1638", während Cousin als Datum desselben „den 31. März 1638" angiebt.

$M'M_1'$; projiziert man diese von O aus auf die durch N zu OY gezogene Parallele, so erhält man zwei Punkte M und M_1, deren Ort, wenigstens in speziellen Fällen, ein Folium Cartesii ist. Um dies zu zeigen, nehmen wir an, es sei R der Radius des Hülfskreises und

$$\alpha x x' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0$$

die Gleichung der Projektivität zwischen N und N', so hat man (wenn y, y' die Ordinaten von M und M' sind):

$$x'(2R - x') = y'^2, \qquad \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}.$$

Wenn man nun $x'y'$ eliminiert, erhält man als Gleichung des Ortes der Punkte M, M_1

$$\frac{2Rx^2}{x^2+y^2} + \frac{\beta x + \delta}{\alpha x + \gamma} = 0$$

oder auch $\quad (2R+\beta)x^3 + \beta x y^2 + (R\gamma + \delta)x^2 + dy^2. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$

Diese Gleichung ist allgemeiner als (2), stimmt aber mit ihr überein, wenn man setzt:

$$2R\alpha + \beta = \frac{\beta}{3} = \frac{2R\gamma + \delta}{l} = \frac{\delta}{l}.$$

Infolgedessen wird die projektive Beziehung zwischen den Punkten N, N' durch die Gleichung dargestellt:

$$x' = R\frac{3x + l}{x + l};$$

sie kann daher durch die Bestimmung erhalten werden, dafs den Werten $x = 0, -l, \infty$ die Werte entsprechen $x' = R, \infty, 3R$.

Aufser dieser direkten Konstruktion des Foliums, wurde noch eine andere von G. de Longchamps[1]) angegeben, während noch andere sich als auf besonderen geometrischen Transformationen beruhend erweisen[2]); auf einige derselben werden wir im Folgenden noch zurückkommen (s. Nr. 47).

34. Aus Gleichung (1) ergiebt sich folgende Polargleichung der Kurve:

$$\varrho = \frac{3a \sin\omega \cdot \cos\omega}{\sin^3\omega + \cos^3\omega},$$

die in vielen Fällen höchst nützlich ist, z. B. um die Fläche der Kurve zu berechnen[3]); so wird man im Speziellen finden, dafs $\frac{3a^2}{2}$ sowohl den Flächeninhalt der Schleife als auch den zwischen der Asymptote und den beiden unendlichen Zweigen belegenen Teiles ausdrückt[4]).

---

1) *Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre,* S. 104—5.

2) *Intermédiaire* V, 1898, S. 102—4.

3) Die Einzelheiten der Berechnung finden sich in Serret, *Calcul différential* (Paris 1880) S. 235.

4) Andere verwandte elegante Sätze finden sich in P. Mansion, *Sur certaines courbes carrables algébriquement* (Nouvelle Correspondance math. I, 1878).

Die Rektifikation der Kurve läfst sich hingegen nicht elementar bewirken, sondern erfordert elliptische Integrale (vgl. Nr. **20**).

Aus derselben Gleichung (1) ergiebt sich folgende parametrische Darstellung:

$$x = \frac{3a\lambda}{1+\lambda^3}, \qquad y = \frac{3a\lambda^2}{1+\lambda^3},$$

und daraus die Bedingung für die Kollinearität der drei Punkte $(\alpha)\,(\beta)\,(\gamma)$

$$\alpha\beta\gamma + 1 = 0.$$

Die drei Wendepunkte der Kurve befinden sich also alle im Unendlichen, und nur einer ist reell. Die Gleichung der Tangente im Punkte λ ist

$$(\lambda^4 - 2\lambda)x - (2\lambda^3 - 1)y + 3a\lambda^2 = 0.$$

Die der Asymptote erhalten wir, wenn wir $\lambda = -1$ machen, daher ist sie

$$x + y + a = 0.$$

Weiter wollen wir uns nicht mit dem Cartesischen Folium befassen, da es eine Kurve von geringem Interesse ist, indem sie sich bei keinem geometrischen Problem zeigt. Bellavitis glaubte, dafs die Kurve die Inverse der gleichseitigen Hyperbel sei, den Scheitel als Pol genommen[1]); es läfst sich jedoch leicht einsehen, dafs dies nicht der Fall ist[2]).

Bemerken wollen wir nur noch, dafs man als Verallgemeinerungen der Kurve ansehen kann sowohl alle diejenigen, die durch Gleichung (3) dargestellt werden, deren Erzeugung wir erörtert haben, als auch diejenigen, die durch folgende Gleichung dargestellt werden:

$$ay^3 + bx^3 = abxy + c^3(x + y).$$ [3])

Noch weiter gehend und wichtiger ist die Verallgemeinerung, die aus der Betrachtung der Kurven von folgender Gleichung hervorgeht:

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} = (2n+1)\,ax^ny^n.$$ [4])

Giebt man dem n einen beliebigen ganzzahligen Wert, so erhält man dementsprechend eine rationale Kurve von der Ordnung $2n+1$, die im Koordinatenanfang einen $2n$-fachen Punkt, und als Asymptote die Gerade $x + y = (-1)^n \cdot a$ hat; jenachdem n gerade oder ungerade, ist das Verhalten der Kurve im Anfangspunkt verschieden.

---

1) *Sulla classificazione delle curve di terz' ordine* (Mem. de la Soc. Ital. delle Scienze XXV, Teil 2, 1851) S. 23.

2) Diese ist vielmehr eine Strophoide (Michel, *Démonstration élémentaire d'une théorème connu*, Journ. de Math. spéc. 4. Serie, IV, 1895).

3) Reichenbach, *Diskuss. der durch d. Gleich.* $ax^3 + by^3 = abx + c^3(x+y)$ *dargestellten krummen Linie* (Münster 1872)

4) Von diesen Kurven ist die Rede in den Questions 7772 u. 7840 der *Educ. Times* (XLIV, 1886, S. 88—90), jedoch ihre Haupteigenschaften, sowohl wie die Quadratur finden sich in den *Elementi di calcolo infinitesimale* von E. Cesàro (Neapel 1899, S. 180 u. 325).

Achtes Kapitel.

Die Fokale von Quetelet oder schiefe Strophoide, die Logocyklika von Booth oder gerade Strophoide.

35. Wir betrachten einen Rotationskegel mit der Spitze V (vgl. Taf. I, Fig. 7). Sei g' eine Erzeugende und t eine Tangente senkrecht zu g'. Jede Ebene π durch t geführt, schneidet den Kegel in einem Kegelschnitt Γ, dessen Brennpunkte M_1 und M_2 seien; der Ort derselben, wenn sich π um t dreht, ist eine gewisse Kurve Φ. Da M_1 und M_2 sich auf der Senkrechten zu t, die durch den Berührungspunkt A geht, befinden, so liegt die Kurve auf einer durch A gehenden zu t senkrechten Ebene, d. h. auf einer von A durch die Axe des Kegels gehenden Ebene σ. Beachten wir nun, dafs infolge eines bekannten Satzes von Dandelin und Quetelet es genügt, die Berührungspunkte der in den Kegel eingeschriebenen Kugeln, die π berühren, zu bestimmen, um M_1 und M_2 zu finden; die beiden Kugeln werden von σ in zwei gröfsten Kreisen geschnitten, und daher läfst sich die Kurve Φ konstruieren, ohne dafs man aus der Ebene σ herausgeht, durch folgendes Verfahren. Man zeichne die beiden Erzeugenden g' und g'' des gegebenen Kegels, die in die Ebene σ fallen, ebenso den Spurpunkt A der Tangente t; von A ziehe man eine beliebige Transversale, die g'' in B schneide, dann zeichne man die beiden Kreise, welche g', g'' und AB berühren; ihre Berührungspunkte mit der letzteren sind die Punkte der Kurve Φ. Diese Konstruktion kann in bemerkenswerter Weise vereinfacht werden. Man zeichne den Mittelpunkt P von $M_1 M_2$ bezw. AB; die analogen Punkte P liegen dann alle auf einer Parallelen p zu g''. Diese Gerade p wird dann durch die Mittelpunkte H und D der Strecken AV und AK gehen, wenn K einen Punkt von g'' bedeutet, derart, dafs $VK = VA$, also VKA ein gleichschenkliges Dreieck ist. Setzen wir nun der Kürze wegen $VA = a$, $VB = b$, $AB = c$, so ist bekanntlich

$$AM_1 = \frac{a-b+c}{2}, \qquad BM_1 = \frac{-a+b+c}{2}$$

und da $AP = \frac{c}{2}$, so ist $PM_1 = PM_2 = \frac{a-b}{2}$,

aber $$PD = \frac{1}{2} BK = \frac{a-b}{2},$$

und also $$PM_1 = PM_2 = PD.$$

Nennen wir nun die Gerade AK q, so ergiebt sich: Die Kurve Φ kann auch auf folgende Weise erzeugt werden: Gegeben ein

Winkel pq und ein Punkt A auf seinem Schenkel q; man ziehe durch A eine beliebige Gerade r, welche p in P schneidet. Diejenigen Punkte M_1, M_2 von r, die denselben Abstand von P haben wie D von P, gehören der Kurve Φ an.

Betrachten wir dagegen statt des Kegels einen geraden Cylinder und verfahren wie vorhin, so sehen wir, dafs der Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte, die auf ihm von den durch eine zu einer Erzeugenden g' senkrechten Tangente t gehenden Ebenen π erzeugt werden, eine Kurve ist, die ganz in der Ebene σ liegt, die durch die Axe des Cylinders und den Berührungspunkt A von t geht. (Vgl. Taf. I, Fig. 8.) Man erkennt überdies, dafs die besprochene Kurve sich auf folgende Weise in der Ebene σ konstruieren läfst: Gegeben zwei Parallele g' und g'' und auf der ersteren ein Punkt A; man ziehe die Transversale AB und bestimme auf AB die Berührungspunkte M_1 und M_2 derjenigen beiden Kreise, die aufserdem die Geraden g' und g'' berühren, diese gehören jener Kurve an. Nennen wir den Mittelpunkt von M_1M_2 P, so wird der Ort der Punkte P die Halbierungslinie p des Streifens $g'g''$ sein. Ziehen wir durch A die Gerade q senkrecht zu g', g'', seien D und K die Schnitte mit p und g'' und schliefslich O_1 und O_2 die Mittelpunkte der genannten Kreise, so sind offenbar die Dreiecke PM_1O_1 und PM_2O_2 einander als auch dem Dreiecke PDA kongruent und daraus ergiebt sich insbesondere, dafs

$$PM_1 = PM_2 = PD.$$

Im vorliegenden Falle läfst sich also die Kurve Φ auf dieselbe Weise wie im allgemeinen Falle zeichnen, indem man sich als Fundamentalelemente des Punktes A und des rechten Winkels der Geraden p und q bedient. Es ist klar, dafs dieselbe Konstruktion sich auch so ausdrücken läfst: Gegeben ein System von sich in einem Punkte berührenden Kreisen und ein Punkt A auf ihrer gemeinsamen Tangente; der Ort der Endpunkte derjenigen Durchmesser dieser Kreise, die durch A gehen, ist eine Kurve Φ in Bezug auf einen Cylinder[1]).

36. Es war gegen die Mitte des 18. Jahrhunderts, als die Kurve Φ ihren Einzug in die mathematische Litteratur hielt; schon im Jahre 1757 wurde sie im IV. Bande der *Instituti Bononiensis Commentarii* veröffentlicht; diese enthielten zwei Denkschriften von Gregor Casali, betitelt *De conicarum sectionum focis,* die gänzlich den Kurven Φ gewidmet waren. Ihr Ursprung geht jedoch noch ungefähr ein Jahrhundert zurück; dies bezeugt in der That Casali; sie wurden früher schon von Guido Grandi in einer nicht herausgegebenen Abhandlung und von Evangelista Torricelli behandelt; so erklärt sich der von Casali zur Bezeichnung der Kurve Φ angewendete Name

1) Balitrand, *Note sur la strophoide* (Journ. de math. spéc. 3. Serie, III, 1889).

Pteroides torricellanea[1]). Demnach hätte es den Anschein, dafs man die Erfindung der betreffenden Kurve auf den berühmten Schüler Galileis zurückführen müfste, wenn nur nicht zwei Briefe existierten, die im Jahre 1645 an ihn gerichtet waren, und in denen eine planimetrische Definition der Kurve Φ in Bezug auf einen Cylinder zu lesen ist und sogar der von Casali angewendete Name. Die bezüglichen Briefe[2]) wurden von Rom aus an Torricelli von F. de Verdus geschrieben, jenem „gentilhome bourdelois" und Herausgeber der berühmten *Observations sur la composition des mouvements et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes* von Roberval; von diesen Briefen ist der eine vom 19. Mai 1645 datiert, der andere ist unbekannten Datums, ist jedoch früher als der vorige und später als ein dritter vom 15. März 1645. Der wesentliche Inhalt derselben ist übereinstimmend, indem sie beide „die Beschreibung einer Linie, die in Frankreich Ala oder Pteroide genannt wird", enthalten, die de Verdus „an einem der letzten Tage" bekommen hatte, und die Anwendung der Methode der Tangenten, die unter dem Namen Roberval geht, auf dieselbe. Daraus geht dann hervor, dafs die Erfindung der betrachteten Kurve sicherlich nicht Torricelli gebührt, sondern einem französischen Mathematiker, der vielleicht Roberval gewesen ist.

Die auf einen Cylinder bezüglichen Kurven Φ scheinen nicht sobald untersucht zu sein, weder in Frankreich, wo sie das Licht erblickten, noch in Italien, wohin sie verpflanzt waren, noch anderswo; indem A. de Moivre im Jahre 1755 ihre Konstruktion in der Ebene fand[3]), bemerkte er die Ähnlichkeit der Gestalt mit dem Folium Cartesii, und gab auch die Quadratur an. Wir glauben nicht irre zu gehen, wenn wir behaupten, dafs es diese Arbeit des berühmten englischen Mathematikers ist, der man das Eindringen derartiger Kurven in die sonst verbreiteten Lehrbücher verdankt; wie z. B. die *Institutioni analitiche ad uso della gioventù italiana* von D[na] Maria Gaetana Agnesi (I, Mailand 1748, S. 378—80 und 391—92), die *Analyse des lignes courbes algébriques* von Cramer (Genf 1750, S. 411) und die *Institutiones analyticae* von V. Ricati und G. Saladini (Bononiae 1765, I, S. 328).

Die stereometrische Definition der Kurve Φ, die Casali mit so grofser Gelehrsamkeit bearbeitet hatte, blieb unbekannt und begraben in den Abhandlungen der Akademie zu Bologna, bis Tortolini im Jahre 1860 es für nötig erachtete, die Aufmerksamkeit der Gelehrten wieder

1) Von τὸ πτερόν, der Flügel.

2) Veröffentlicht zugleich mit anderen von B. Boncompagni im *Bullettino di Bibliografia* VIII, 1875.

3) S. die schon citierte Abh. *A ready description and quadrature of a curve of the third order resembling that commonly called the foliath* (Phil. trans. Nr. 345).

auf die Arbeit des hervorragenden Italieners zu lenken[1]), veranlaſst hierzu durch den Umstand, daſs von A. Quetelet im Jahre 1819 diese selbe Definition wieder gefunden war; sie ist in der That der Kern der *Dissertatio de quibusdam locis geometricis* (Gent.), wo die Kurven Φ Fokalen[2]) oder reguläre Fokalen genannt werden, jenachdem sie sich auf einen Kegel oder Cylinder beziehen. Die Quetelet'sche Inaugural-Dissertation wurde der Ausgangspunkt der Dandelinschen Untersuchungen (*Mémoire sur quelques propriétés remarquables de la focale parabolique,* Mém. de Belgique II, 1822), der von E. Külp (*De curva focali regulari,* Mannheim 1823) und von M. Chasles (*Aperçu historique* Note IV) während die unzähligen in Frankreich über die Kurve Φ gemachten Untersuchungen gröſstenteils ihren Ursprung in einer im Jahre 1840 den Lyceen als Preisaufgabe gestellten Frage haben, die 1861 im Examen für die Zulassung zur École normale in Paris wieder vorgelegt wurde[3]). Es ist nicht unsere Absicht, vollständige Angaben hierüber zu machen, bemerken müssen wir jedoch, daſs die ältesten derselben in der Note von Midy, *Sur le folium de Descartes* (Nouv. Ann. III, 1849) enthalten sind[4]), und daſs die erste Arbeit, in welcher sich der heute allgemeine Name Strophoide findet (von στρόφος, Wendung, Drehung), der für die Kurve Φ angenommen ist[5]), die mit dem Titel *La strophoide* in den Nouv. Ann. V, 1846 ist, die man Montucci verdankt und die irrtümlicher Weise G. Ritt zugeschrieben wird. — Ferner wurde die reguläre Fokale oder gerade Strophoide (so genannt zum Unterschiede von der allgemeineren schiefen Strophoide) neuerdings von anderen erforscht und zwar von Lehmus, der sie ihrer Gestalt wegen Kukumaeide nannte[6]), von Booth, der wegen ihrer Beziehungen zu den Logarithmen und zum Kreise sie mit dem Namen Logocyklika belegte[7]), und von

---

1) S. die bibliographische Revue *Sulla curva logociclica* (Ann. di Mat. III).

2) Andere gebrauchen den Namen Focales à noeud.

3) Der Wortlaut derselben ist: Gegeben eine unendliche Mannigfaltigkeit homofocaler Kegelschnitte und ein Punkt ihrer Ebene; gefragt wird 1) welches ist der geometrische Ort der Berührungspunkte der von diesem Punkte an die genannten Kurven gezogenen Tangenten; 2) welches ist der geometrische Ort der Fuſspunkte der von dem gegebenen Punkte zu den Kurven gezogenen Normalen; 3) welches ist der Ort der Fuſspunkte der Senkrechten, die von dem gegebenen Punkte auf seine Polaren in Bezug auf die gegebenen Kegelschnitte gefällt werden.

4) Daselbst ist die Kurve durch die Gleichung $y = x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ definiert, ähnlich der Gleichung $y = x\sqrt{\frac{a-x}{a+3x}}$ für das Folium Cartesii.

5) S. *Intermédiaire* IV, 1897, S. 87.

6) *Aufgaben aus der höheren Mathematik,* Berlin 1842, S. 120. Der Name Kukumaeide war aber bereits von Uhlhorn (*Entdeckungen in der höheren Geometrie,* Oldenburg, 1809, S. 57) an die Kurve $[(x+a)^2+y^2]x^2 = a^2y^2$ vergeben worden.

7) *On the logocyclic curve and the geometrical origine of logarithmes* (Quart. Journ. II, 1858). Vgl. *A treatise on some new geometrical methods* I (London 1877).

Rummer, der an ihr viele Eigenschaften entdeckte, die mit dem Begriffe der harmonischen Gruppe zusammenhängen und sie deswegen als harmonische Kurve bezeichnete[1]).

37. Die Gleichung der schiefen oder geraden Strophoide wird leicht abgeleitet, wenn man sich der zuletzt in Nr. **35** dargelegten Definition bedient. Bezeichnet man den Winkel pq mit α, nimmt A als Pol, q als Polar-Axe, so ergiebt sich aus dem Dreiecke APD, wenn $AD = a$ gesetzt wird

$$\frac{a}{\sin(\omega+\alpha)} = \frac{AP}{\sin\alpha} = \frac{DP}{\sin\omega},$$

daher
$$AP = \frac{a\cdot\sin\alpha}{\sin(\omega+\alpha)}, \qquad DP = \frac{a\cdot\sin\omega}{\sin(\omega+\alpha)};$$

und da nach der Konstruktion die Radien vectoren der Punkte M_1 und M_2 gleich $AP \pm DP$ sind, so folgt, dafs

$$\varrho = a\frac{\sin\alpha \pm \sin\omega}{\sin(\omega+\alpha)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

die Polargleichung der schiefen Strophoide ist[2]). Wenn $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so wird diese zu

$$\varrho = a\frac{1\pm\sin\omega}{\cos\omega}, \text{ oder auch } \varrho = a\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\pm\frac{\omega}{2}\right) . \quad . \quad . \quad (2)$$

welche Gleichungen die gerade Strophoide darstellen. Gehen wir zu kartesischen Koordinaten über, so verwandelt sich (1) in eine Gleichung vierten Grades in x und y, aus welcher sich jedoch der Faktor $x\cdot\sin\alpha - y\cdot\cos\alpha$ abscheidet. Nach Wegschaffung desselben bleibt

$$(x^2+y^2)(x\sin\alpha + y\cos\alpha - 2a\sin\alpha) + a^2(x\sin\alpha - y\cos\alpha) = 0 \quad (3)$$

als Gleichung der schiefen Strophoide, und demnach

$$(x^2+y^2)(x-2a) + a^2x = 0, \text{ oder } y = \pm(x-a)\sqrt{\frac{x}{2a-x}} \quad (4)$$

als Gleichung der geraden Strophoide, deren Asymptote die Gerade $x = 2a$ ist. In beiden Fällen **ist die Strophoide eine cirkulare Kurve dritter Ordnung, die durch den Punkt A geht,** und wenn gerade, symmetrisch in Bezug auf die Gerade q. Verlegen wir den Anfang nach dem Punkte D, setzen also $x - a = x'$ und zur Abkürzung $\operatorname{cotg}\alpha = \gamma$, so werden (3) und (4) in die folgenden übergehen:

$$(x'+\gamma y)(x'^2+y^2) + a(x'^2 - 2\gamma x'y - y^2) = 0 \quad . \quad . \quad (5)$$

$$x'(x'^2+y^2) + a(x'^2-y^2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Diese Gleichungen zeigen, **dafs die Strophoide, die gerade sowie die**

---

1) *Neue Sätze über eine krumme Linie mit vorzugsweise geometrischer Ableitung* (Heidelberg 1868).

schiefe, D zum Doppelpunkt hat, und dafs die zugehörigen Tangenten zu einander senkrecht stehen. Nehmen wir diese als neue Axen, so nimmt die Kurvengleichung folgende Gestalt an:

$$(ax + by)(x^2 + y^2) - cxy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Setzt man dagegen in (6) $x' = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{\xi - \eta}{\sqrt{2}}$, so erhält man

$$2\sqrt{2} a \xi \eta = \frac{\xi^4 - \eta^4}{\xi - \eta}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

welche Gleichung von De Moivre wegen ihrer Analogie mit der des Folium Cartesii (vgl. Nr. **33**) hervorgehoben wurde. Mit Benutzung von (5) erkennt man, dafs die Koordinaten des singulären Brennpunktes der Strophoide (Schnittpunkt der Tangenten in den Kreispunkten) sind

$$x' = -a\frac{1-\gamma}{1+\gamma^2}, \qquad y = a\frac{\gamma(1-\gamma)}{1+\gamma^2}.$$

Kombinieren wir dagegen die Gleichung (7) mit $y = \lambda x$, so finden wir

$$x = \frac{c\lambda}{(a + b\lambda)(1 + \lambda^2)}, \qquad y = \frac{c\lambda^2}{(a + b\lambda)(1 + \lambda^2)} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

als parametrische Darstellung der Kurve, die für viele Fälle sehr nützlich ist, und von welcher wir alsbald eine Anwendung machen werden. Aus (9) ergiebt sich als Bedingung für die Kollinearität der drei Punkte (α), (β), (γ)

$$a + b \cdot \alpha\beta\gamma = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

während die Bedingung der Koncyklität der vier Punkte (α), (β), (γ), (δ) ist

$$a^2 - b^2 \cdot \alpha\beta\gamma\delta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Daraus ergiebt sich, dafs, wenn der Krümmungskreis im Punkte (α) die Kurve in (α_1) schneidet, sein wird

$$a^2 - b^2 \cdot \alpha^3 \alpha_1 = 0.$$

Ist daher α_2 gegeben, so bleiben die drei Punkte (α'), (α''), (α''') bestimmt durch

$$\alpha' = \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2\alpha_1}}, \quad \alpha'' = \varepsilon\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2\alpha_1}}, \quad \alpha''' = \varepsilon^2\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2\alpha_1}},$$

wo ε eine imaginäre dritte Wurzel von 1 ist; da nun hieraus folgt, dafs

$$b^2 \cdot \alpha\alpha'\alpha''\alpha''' - a^2 = 0,$$

so erhalten wir schliefslich folgenden Lehrsatz: **Durch jeden Punkt der Strophoide gehen drei Kreise, die sie anderswo oskulieren; die Oskulationspunkte derselben liegen auf einem Kreise, der durch jenen**

---

1) Unter den schiefen Strophoiden ist wegen der Anwendung auf die Kreisteilung diejenige besonders bemerkenswert, bei welcher $\alpha = \frac{\pi}{3}$; vgl. den Artikel *Freeths Nephroid* (Proc. of the L. M. S. X, 1879).

Punkt geht. Nennen wir nun „den einem Punkte (α) korrespondierenden Oskulationspunkt der Strophoide" den Schnittpunkt (α_1) derselben mit dem Kreise, welcher sie in (α) oskuliert, und betrachten wir vier koncyklische Punkte $(\alpha), (\beta), (\gamma), (\delta)$ und die korrespondierenden Oskulationspunkte $(\alpha_1), (\beta_1), (\gamma_1), (\delta_1)$, so bestehen die Gleichungen:

$$a^2 = b^2 \alpha\beta\gamma\delta, \quad a^2 = b^2 \alpha^3 \alpha_1, \quad a^2 = b^2 \beta^3 \beta_1, \quad a^2 = b^2 \gamma^3 \gamma_1, \quad a^2 = b^2 \delta^3 \delta_1,$$

woraus durch Elimination von $\alpha\beta\gamma\delta$ sich ergiebt.

$$a^2 = b^2 \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1,$$

welche Gleichung folgenden Satz ausdrückt: **Wenn vier Punkte einer Strophoide einem Kreise angehören, so trifft dasselbe zu für die korrespondierenden Oskulationspunkte.**

38. Will man die Untersuchung auf die gerade Strophoide beschränken, so bedient man sich zweckmäfsig der Gleichung (2). Diese liefert als Ausdruck für die Radien vectoren zweier konjugierter (d. h. auf derselben von A ausgehenden Geraden gelegener) Punkte

$$AM_1 = a\frac{1 - \sin\omega}{\cos\omega}, \qquad AM_2 = a\frac{1 + \sin\omega}{\cos\omega},$$

daraus folgt:
$$AM_1 \cdot AM_2 = a^2,$$

und demnach: **Die gerade Strophoide wird vermittelst Transformation durch reziproke Radien mit A als Pol und a^2 als Potenz in sich selbst verwandelt.** Beachtet man ferner, dafs $OP = \frac{a}{\cos\omega}$, so erkennt man, dafs folgende elegante Beziehung besteht:

$$\frac{1}{AM_1} + \frac{1}{AM_2} = \frac{2}{AP}.$$

Seien nun s_t und s_n die polare Subtangente und Subnormale der Logocyclica, so hat man

$$s_t = a(1 \pm \sin\omega), \qquad s_n = a\frac{1 \pm \sin\omega}{\cos^2\omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Der erste dieser beiden Ausdrücke zeigt, dafs die Gleichung des Ortes der Endpunkte der polaren Subtangenten lautet

$$\varrho = a(1 \pm \sin\omega),$$

und dieser ist daher eine Kardioide (vgl. Abschn. III, Kap. 7); hingegen der Ort der Endpunkte der polaren Subnormalen hat die Gleichung

$$\varrho = a\frac{1 \pm \sin\omega}{\cos^2\omega}, \qquad \text{oder} \quad \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{2y}{a} = 1,$$

und besteht daher aus zwei Parabeln. Bezeichnet man nun mit s_t', s_t'' die polaren Subtangenten in zwei konjugierten Punkten, und mit s_n', s_n'' die entsprechenden Subnormalen, so hat man wegen (12)

$$s_t' + s_t'' = 2a, \qquad \frac{1}{s_n'} + \frac{1}{s_n''} = \frac{2}{a},$$

durch Einfachheit und Eleganz bemerkenswerte Beziehungen. Gleichung (2) führt zu folgender neuen parametrischen Darstellung:

$$x = a(1 \pm \cos\omega), \qquad y = a\frac{\sin\omega\,(1 \pm \cos\omega)}{\cos\omega} \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

die man dadurch vereinfachen kann, dafs man die doppelten Vorzeichen unterdrückt, indem man z. B. nur die unteren beibehält; dann ist die allgemeine Gleichung der Tangente:

$$[1 - (1 + \cos^2\omega)\sin\omega]\,x + \cos^3\omega \cdot y - a(1 - \sin\omega)^2 = 0\,.$$ [1])

Die Tangenten in zwei konjugierten Punkten schneiden sich im Punkte

$$x = a(1 + \sin^2\omega), \qquad y = a\frac{\sin^3\omega}{\cos\omega};$$

der Ort der Schnittpunkte hat die Gleichung:

$$y^2(2a - x) = (x - a)^3$$

und ist daher eine Cissoide des Diokles. Hingegen ist der Ort der Schnittpunkte der Normalen in zwei konjugierten Punkten eine Parabel. Aus der Gleichung der Tangente ergiebt sich, wenn man mit t_1, t_2 die Längen der Tangenten in zwei konjugierten Punkten bis zur Asymptote, und mit h_1, h_2 die Abstände der Tangenten selbst von A bezeichnet, dafs

$$t_1 = t_2 = a\frac{\sqrt{1 + \cos^2\omega}}{\cos\omega}, \qquad h_1 h_2 = a^2\frac{\cos^2\omega}{1 + \cos^2\omega},$$

und daher $$t_1 t_2 \cdot h_1 h_2 = a^4.$$

Führen wir die hyperbolischen Funktionen ein, indem wir setzen

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \operatorname{\mathfrak{Tg}}\frac{u}{2}, \quad \text{oder} \quad \operatorname{\mathfrak{Cos}} u = \sec\omega, \quad \operatorname{\mathfrak{Sin}} u = \operatorname{tg}\omega,$$

so verwandelt sich (2) in folgende Gleichung

$$\varrho = a(\operatorname{\mathfrak{Cos}} u \pm \operatorname{\mathfrak{Sin}} u), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

die sich in hervorragender Weise dazu eignet, durch ein gleichförmiges und elegantes Rechnungs-Verfahren alle Eigenschaften der betrachteten Kurve aufzustellen [2]).

39. Die Quadratur der geraden Strophoide kann leicht mit Hilfe der Gl. (4) ausgeführt werden; man findet so, dafs die Fläche der Schleife gleich $a^2 - \frac{1}{4}\pi a^2$ ist, während die Fläche zwischen den unendlichen Zweigen und der Asymptote gleich $a^2 + \frac{\pi a^2}{4}$ ist. Nicht schwieriger ist die Bestimmung des Schwerpunktes des durch Rotation der Schleife

---

1) Betreffs Konstruktion der Tangente nach der Methode von Roberval s. A. Saint-Germain, *Recueil d'exercises sur la mécanique rationelle* (2. Aufl. Paris 1889) S. 166.

2) S. Kap. III des Werkchens von S. Günther, *Parabolische Logarithmen und parabolische Trigonometrie* (Leipzig 1882).

um ihre Symmetrieaxe erzeugten Körpers[1]). Die Rektifikation der Strophoide hingegen erfordert elliptische Integrale (vgl. Nr. **20**), und Booth hat gezeigt, dafs jeder beliebige Bogen der Logocyklika gleich der Summe eines Bogens der gleichseitigen Hyperbel und dem einer Lemniskate ist, oder auch gleich der Summe eines Ellipsenbogens, eines Hyperbelbogens und einer Geraden ist[2]). Sehr zahlreich sind die geometrischen Fragen, bei denen die Strophoide auftritt, z. B. ist sie die Fufspunktkurve einer Parabel in Bezug auf den Schnittpunkt der Direktrix mit der Axe[3]); zwei Briefe von G. A. Kinner und Chr. Huygens vom 18. Juli und 9. Aug. 1653 zeigen, dafs sie eine Duplikatrix- und eine Sektrix-Kurve ist[4]); des weiteren bildet diese Kurve die Lösung eines Problems aus der geometrischen Optik[5]), schliefslich trifft man auf sie in Fragen der deskriptiven Geometrie[6]).

Zahlreich sind ferner die Methoden, die zu ihrer Erzeugung angegeben sind. Wir führen z. B. diejenige an, auf Grund deren die gerade Strophoide sich als eine Cissoide (s. Nr. **29**) abgeleitet aus einer Geraden und einem Kreise darstellt[7]); wir erinnern an jene Stelle, wo die gerade Strophoide als Hüllkurve von Kreisen erscheint, deren Mittelpunkte C auf der Parabel $y^2 = 4a(a - x)$ liegen und deren Radien ausgedrückt werden durch $\sqrt{CO^2 - a^2}$, und verweilen schliefslich nur kurz bei einer, die mit dem Namen zweier bedeutender Geometer verknüpft ist.

L. J. Magnus hat in seiner *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie* (Berlin 1833) S. 265 folgende Aufgabe behandelt: „Gegeben drei Punkte A, B, C, man suche den Ort der Punkte P derart, dafs die Winkel APB, APC einander gleich sind.“ Magnus fand die Gleichung dieses Ortes und zeichnete

1) S. Saint Germain (op. cit. Note 14), S. 49.

2) S. auch S. Günther, *Note sur la logocyclique ou strophoïde* (Mathésis I, 1881); P. Mansion, *Longueur de la bouche de la logocyclique ou strophoïde* (Das. VI, 1886); E. Cesàro, *Elementi di calcolo infinitesimale* (Neapel 1899) S. 317.

3) Wir überlassen es dem jungen Leser, diesen Satz zu beweisen.

4) *Oeuvres de Huygens* I, S. 236; vgl. G. Loria, *La strophoïde est une sectrice et une duplicatrice* (Mathesis II, Ser. VIII, 1898).

5) „Gegeben in einer Ebene ein leuchtender Punkt A und ein beobachtendes Auge in B; ein geradliniger Spiegel rotiert in dieser Ebene um den Punkt A; für jede seiner Lagen giebt es einen von A ausgehenden Strahl, welcher durch Reflexion an diesem durch den Punkt B hindurchgeht; welches ist der Ort der Incidenzpunkte?“ E. Sang, *On the curves produced by reflexion from a polished revolving straihgt wire* (Edinburgh Trans. XXVIII, Teil I, 1877); G. Loria, *Identité de la strophoïde avec la focale à noeud, son application à l'optique géométrique* (Nouv. Ann. 3. Ser. XVI, 1897).

6) La Gournerie, *Traité de géométrie descriptive.* 2. Aufl. III. Teil. Paris 1885. S. 149—50.

7) Bellacchi, *Lezioni ed esercizi di algebra complementare,* B. I (Florenz 1898). S. 44.

die Figur; jene beweist und diese bestätigt uns, dafs derselbe eine im allgemeinen schiefe Strophoide ist. Diese Thatsache wurde nur zufällig ein halbes Jahrhundert später bekannt, als O. Hermes der ausführlicheren Untersuchung der Magnusschen Kurve eine Abhandlung widmete[1]); P. H. Schoute[2]) hob dann kurz darauf hervor, dafs sie eine Strophoide sei und ferner machte er die Bemerkung, dafs der von Magnus untersuchte Ort ein Spezialfall eines von Steiner mit folgenden Worten definierten sei: „Sind in einer Ebene zwei begrenzte Geraden AB und CD in beliebiger fester Lage gegeben, so besteht der Ort desjenigen Punktes, aus welchem dieselben unter gleichen (oder auch unter Winkeln, die zwei Rechte betragen) gesehen werden, aus zwei Kurven dritten Grades. Beide Kurven gehen durch die vier Endpunkte der gegebenen Geraden sowie durch ihren gegenseitigen Schnittpunkt. Ferner haben die Kurven diejenigen zwei Punkte gemein, aus welchen beide Geraden unter rechten Winkeln erscheinen. Die zwei übrigen gemeinschaftlichen Punkte der Kurven sind imaginär und liegen auf der unendlich entfernten Geraden"[3]). Es möge noch angeführt werden, dafs dieselbe Erzeugungsart der Strophoide, welche die Magnussche Aufgabe in sich schliefst, von Cazamian[4]) im Jahre 1893 wieder aufgefunden wurde, der sie auch bemerkenswerten Umformungen unterzog.

Neuntes Kapitel.

Verallgemeinerungen der Strophoide.

40. Einige Eigenschaften der geraden Strophoide, die wir in Nr. **38** teils bewiesen, teils ausgesprochen haben, kommen viel allgemeineren Kurven zu, die unabhängig von einander von drei Autoren, nämlich Bretschneider[5]), Rosenstock[6]) und Andreasi[7]) untersucht wurden. Wir wollen sie der Kürze halber Panstrophoiden nennen und zunächst folgende Definition von ihnen geben: „Wir betrachten (Taf. II, Fig. 9) ein Kreisbüschel mit den Grundpunkten B und C, die reell oder konjugiert imaginär sein können, und ein Strahlenbüschel, das

1) *Über eine gewisse Kurve des dritten Grades* (Crelles Journ. XCVII, 1884).

2) *Bemerkung anläfslich des Aufsatzes von Herrn O. Hermes* (Das. XCIX, 1886).

3) Crelles Journ. XLV; ebenfalls Steiners Werke II. (Berlin 1884) S. 487.

4) *Sur un lieu géométrique et ses applications* (Nouv. ann. 3e Serie, XII, 1893). Vgl. auch die Bemerkungen von Valdés, *Sur la strophoïde* (Das. XIII, 1894).

5) *Die harmonischen Polarkurven* (Archiv L, 1869).

6) *Über eine Gruppe ebener Kurven dritter Ordnung* (Programm Gotha, 1886).

7) *Studio analitico delle tre cubiche cicliche* (Giorn. di Mat. XXX, 1892).

zum Scheitelpunkt einen Punkt A der Geraden hat, die der Ort der Mittelpunkte der Kreise des Büschels ist; der Ort der Punkte, in welchen die Geraden des Büschels von den Kreisen des Büschels berührt werden, ist eine Panstrophoide." Indem jeder von A ausgehende Strahl r von zwei durch B und C gehenden Kreisen berührt wird, giebt es auf jeder von A ausgehenden Geraden zwei Punkte der Panstrophoide M_1 und M_2; sie heifsen korrespondierende Punkte der Kurve. Sei L der Schnittpunkt der Geraden r mit BC; es ist klar, dafs in dem Spezialfalle, wenn B und C zusammenfallen, die Strecken LM_1 und LM_2 beide gleich LB werden, und dann haben wir wieder die gewöhnliche Definition der geraden Strophoide.[1])

Um die Gleichung der Panstrophoiden zu finden, nehmen wir die Gerade BC (die immer reell ist) als y-Axe, und als x-Axe den Ort der Mittelpunkte der Kreise des Büschels. Wenn $-g$ die Abscisse des Punktes A ist und k (eine reelle oder rein imaginäre Gröfse) der absolute Wert von $\frac{1}{2}BC$ ist, so lauten die Gleichungen eines Kreises und einer Geraden der betrachteten Büschel

$$x^2 - 2cx + y^2 - k^2 = 0 \quad . \quad . \quad (1) \qquad y = \lambda(x+g) \quad . \quad . \quad (2)$$

Da nun die Bedingung der Berührung zwischen den so dargestellten Linien lautet

$$c^2 + k^2 = \lambda^2(g^2 + 2cg - k^2), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

so ist die Gleichung der betreffenden Panstrophoide das Resultat der Elimination von c und λ aus den Gleichungen (1), (2), (3), und demnach

$$x(x^2 + y^2) + g(x^2 - y^2) + k^2(x + y) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Die Form dieser Gleichung zeigt, dafs die Panstrophoiden cirkulare Kurven dritter Ordnung und symmetrisch in Bezug auf eine Axe sind; sie beweist ferner, dafs eine solche Kurve durch die Punkte A, B und C geht, ebenso auch durch die Punkte der Abscissenaxe, die die Abscissen $\pm ik$ haben (reell, wenn B und C imaginär sind und umgekehrt). Schreiben wir Gleichung (4) wie folgt

$$y = \sqrt{\frac{(x+y)(x^2+k^2)}{g-x}},$$

so sieht man, dafs die Gerade $x = g$ eine Wendeasymptote ist. Wenn $k^2 > 0$, so besteht die Panstrophoide aus einem Schlangenzuge (s. die Figur), wenn $k^2 = 0$, ist der Anfangspunkt ein Doppelpunkt, wenn endlich $k^2 < 0$, besteht sie aus einem Oval und einem Schlangenzuge. Auch zwei Grenzfälle wollen wir anführen: wenn $g = 0$, so zerfällt die Kurve in die Gerade $x = 0$ und den Kreis $x^2 + y^2 + k^2 = 0$; wenn aber $g = \infty$, so besteht sie aus der unendlich fernen Geraden und der Hyperbel $x^2 - y^2 + k^2 = 0$.

---

1) Bretschneider nannte sie harmonische Schlinge.

Verlegen wir den Koordinatenanfang nach A, so wird Gleichung (4)

$$y^2(2g-x)=x(k^2+g^2+x^2-2gx)$$

und, wenn wir zu Polarkoordinaten übergehen:

$$\varrho^2\cdot\cos\omega-2g\varrho+(g^2+k^2)\cos\omega=0.$$

Nennen wir die Radien zweier korrespondierenden Punkte M_1 und M_2, ϱ_1 und ϱ_2, und L den Schnitt von M_1M_2 mit BC, so haben wir

$$AM_1=\varrho_1=\frac{g-\sqrt{g^2\sin^2\omega-k^2\cos^2\omega}}{\cos\omega},$$

$$AM_2=\varrho_2=\frac{g+\sqrt{g^2\sin^2\omega-k^2\cos^2\omega}}{\cos\omega},$$

$$AL=\frac{g}{\cos\omega}, \text{ und daher}$$

$$LM_2=AM_2-AL=\frac{\sqrt{g^2\sin^2\omega-k^2\cos^2\omega}}{\cos\omega}=AL-AM_1.$$

L ist aber der Mittelpunkt von M_1M_2; **die Gerade BC ist somit der Ort der Mittelpunkte der Sehnen, die durch ein Paar korrespondierender Punkte begrenzt werden.** Dieser Satz kann übrigens leicht geometrisch bewiesen werden.

Bemerken wir noch, ohne es zu beweisen, dafs die Normalen in zwei beliebigen korrespondierenden Punkten sich in einem Punkte treffen, deren geometrischer Ort die Parabel $y^2+4gx=0$ ist, dafs die absolute Invariante der Kurve (s. Nr. **12**) gleich $\frac{g-k}{g+k}$ ist, und dafs die Kurve in endlicher Entfernung acht Wendepunkte hat, die zu je zweien auf vier Parallelen zur y-Axe liegen, deren Abscissen ein aequianharmonisches Verhältnis bilden.

41. Andere Verallgemeinerungen der geraden Strophoide sind die Kurven mit der allgemeinen Gleichung[1]):

$$(x+y)(x^2-2kxy+y^2)=2(1+k)axy; \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

setzen wir darin $k=0$, so erhalten wir die Gleichung der Logocyklika, für $k=\frac{1}{2}$ dagegen erhalten wir die des Folium Cartesii.

Mehr geometrisch ist folgende Verallgemeinerung[2]): Gegeben in einer Ebene zwei Punkte O und A, sowie eine Gerade r; M sei ein beliebiger Punkt derselben. Man ziehe die Gerade OM und nehme auf dieser zwei Punkte P, P' so, dafs $MP=MP'=MA$ ist. Der Ort der Punkte PP' ist immer eine Kurve dritter Ordnung, die durch ihren eigenen singulären Brennpunkt hindurch geht; sie ist eine (gerade oder schiefe) Strophoide, wenn die Gerade r durch A geht, andernfalls eine strophoidale Kurve dritter Ordnung, welche auf

1) Cesàro, *Elementi di calcolo infinitesimale* (Neapel 1899) S. 171.

2) Lagrange, *Sur les cubiques strophoidales* (Nouv. Ann. de Mathém. 3. Ser. XIX, 1900).

unendlich viele Weisen als der Ort der Brennpunkte einer Kegelschnittschar betrachtet werden kann.

Von ganz anderer Natur ist die von Picquet[1]) in folgendem Orts-Problem angegebene Verallgemeinerung: „Gegeben ein Kegelschnitt Γ und eine feste Tangente a desselben mit den Punkten M und N, ferner ein dritter fester Punkt O auf Γ (s. Taf. II, Fig. 10). Man betrachte eine beliebige Tangente t der Kurve und nenne u die Gerade, welche den Punkt O mit dem harmonisch konjugierten C' des Punktes $C \equiv at$ in Bezug auf das Paar MN verbindet; man finde den Ort des Punktes $tu \equiv P$." Es ist klar, daſs dieser Ort durch eine Projektivität erzeugt wird, die zwischen dem Strahlenbüschel mit dem Scheitel O und dem Büschel der Tangenten des Kegelschnitts Γ besteht. Der Ort selbst ist demnach eine Kurve dritter Ordnung, die O als Doppelpunkt hat. Picquet hat bemerkt, daſs sie die Projektion der Fuſspunktkurve einer Parabel in Bezug auf einen Punkt der Leitlinie ist.

Noch weiter gehen zwei Verallgemeinerungen, die wir hier anführen wollen. Die eine wurde von Barbarin in der *Revue de mathématiques spéciales,* 1894 angegeben und ist im Grunde genommen eine Methode, aus einer Kurve unzählige andere abzuleiten. Er nimmt eine beliebige Kurve Γ als gegeben und zwei Punkte O' und O'' in deren Ebene. Man greife einen beliebigen Punkt M von Γ heraus, verbinde ihn mit O' und schneide die Verbindungslinie mit dem Kreise, dessen Centrum M ist und dessen Radius MO''. Der Ort der Schnittpunktepaare ist eine Kurve, welche die Strophoidale von Γ heiſst[2]). De Longchamps zeigte, wie man die Tangente derselben konstruieren kann[3]).

Die andere rührt von W. W. Johnson her[4]). Er betrachtete den Ort der Punkte P, in denen sich zwei Gerade schneiden, die um zwei feste Punkte A und B sich drehen in der Art, daſs, wenn φ und ψ die von PA und PB mit AB gebildeten Winkel sind und α ein gegebener Winkel, man beständig hat

$$n\psi \pm m\varphi = \alpha. \quad \quad (7)$$

Die Gröſsen n und m kann man als beliebig annehmen, will man jedoch eine algebraische Kurve erhalten, so muſs man sie als kommensurabel annehmen; demnach kann man sie ganzzahlig und relativ prim annehmen. Unter dieser Voraussetzung wollen wir den Ort der Punkte P als allgemeine Strophoide bezeichnen. Um ihre Glei-

1) *Géométrie analytique* (Paris) S. 552.

2) Wenn Γ eine Gerade ist, so erhält man wiederum die Lagrangesche Erzeugung der strophoidalen Kurven (s. oben).

3) *Sur les strophoidales* (Mathésis 2. Serie, IV, 1894).

4) *The strophoides* (Am. Journ. III, 1881). Vgl. auch *A note on the strophoides* (J. Hopkins University Circulars II, 1883), wo E. Barnes auf die Kurven Johnsons die Quaternionen anwendet.

chung zu erhalten, nehmen wir A als Anfangspunkt, AB als x-Axe eines rechtwinkligen Koordinatensystems und setzen ferner

$$AB = a; \quad (x + iy)^n = X_n + i\,Y_n, \quad (\overline{a - x} + iy)^m = X'_m + i\,Y'_m$$
$$x + iy = \sigma e^{i\psi}, \qquad \overline{a - x} + iy = \varrho e^{i\varphi};$$

dann haben wir

$$X_n + i\,Y_n = \sigma^n \cdot e^{in\psi}, \quad X'_m + i\,Y'_m = \varrho^m \cdot e^{\pm mi\varphi},$$
$$(X_n + i\,Y_n)(X'_m \pm i\,Y'_m) = \varrho^m \sigma^n \cdot e^{i(n\psi \pm m\varphi)},$$

oder mit der Benutzung der Gleichung (7)

$$(X_n + i\,Y_n)(X'_m \pm i\,Y'_m) = \varrho^m \sigma^n \cdot e^{i\alpha}$$

oder auch

$$(X_n X'_m \mp Y_n Y'_m) + i(Y_n X'_m \pm X_n Y'_m) = \varrho^m \sigma^n (\cos\alpha + i \sin\alpha).$$

Diese Gleichung zerfällt in die zwei

$$X_n X'_m \pm Y_n Y'_m = \varrho^m \sigma^n \cdot \cos\alpha; \qquad Y_n X'_m \pm X_n Y'_m = \varrho^m \sigma^n \sin\alpha.$$

Eliminiert man aus diesen $\varrho^m \sigma^n$, so erhält man schliefslich

$$(X_n X'_m \pm Y_n Y'_m) - \cot\alpha\,(Y_n X'_m \pm X_n Y'_m) = 0. \quad . \quad . \quad (8)$$

Diese Gleichung vom Grade $(m + n)$ ist die der allgemeinen Strophoiden. Für $m = 1$, $n = 2$, und wenn man das Minus-Zeichen nimmt, erhält man die schiefe Strophoide, die also die bemerkenswerte Eigenschaft besitzt, die durch die Beziehung $2\psi - \varphi = \alpha$ ausgedrückt wird. Zum Schlusse sei bemerkt, dafs auch die stereometrische Urdefinition der Strophoide verallgemeinert wurde und zu zwei speziellen Kurven vierter Ordnung führte[1]).

Zehntes Kapitel.

Die Slusesche Konchoide.

42. Unter den speziellen cirkularen Kurven dritter Ordnung giebt es eine, die der Aufmerksamkeit der modernen Geometer verborgen blieb, bis zu dem Zeitpunkte, in welchem der Briefwechsel zwischen R. de Sluse und C. Huygens veröffentlicht wurde[2]). Wir wollen sie die Slusesche Konchoide nennen und folgendermafsen definieren: „Es sei gegeben ein Punkt O (s. Taf. II, Fig. 11), eine Gerade r und eine Konstante k^2, man ziehe durch O einen beliebigen

1) H. B. Newson, *A pair of curves of the fourth degree and their application in the theory of quadrics* (Am. Journ. XIV, 1892).

2) C. Le Paige, *Correspondance de R. de Sluse* etc. (Bullettino di Bibliografia ecc. XVII, 1884). Vgl. G. Loria, *Une courbe oubliée* (Mathésis 2. Ser. VII, 1897).

Strahl, der r in M schneidet und trage auf OM von M aus nach der entgegengesetzten Seite als wo O liegt eine Strecke MP ab, derart, daſs $OM \cdot MP = k^2$; der Ort von P ist dann eine Slusesche Konchoide"[2]). Nehmen wir O als Pol, das von O auf r gefällte Lot als Polaraxe und bezeichnen wir den Abstand des Punktes O von r mit a, so haben wir

$$OP = \varrho, \quad OM = \frac{a}{\cos \omega}, \quad MP = \varrho - \frac{a}{\cos \omega}$$

und somit lautet die Polargleichung der Kurve

$$a(\varrho \cos \omega - a) = k^2 \cos^2 \omega \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Die kartesische Gleichung hingegen ist

$$a(x - a)(x^2 + y^2) = k^2 x^2 \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Wenn man die Strecke $\frac{k^2}{OM}$ von M aus nach der anderen Seite abtragen würde, nach O hin als MP', so würde man die Kurve erhalten haben

$$a(x - a)(x^2 + y^2) = -k^2 x^2 \quad \ldots \ldots \quad (2')$$

die nicht mehr muschelähnliche Gestalt hat, die wir aber dennoch — wegen der Ähnlichkeit der Gleichungen — Slusesche Konchoide nennen wollen; mit anderen Worten: wir wollen die Möglichkeit zulassen, daſs in Gleichung (2) k^2 negativ sei.

Um eine bequemere Konstruktion unserer Kurve zu erhalten, betrachten wir den Ort der Punkte N derart, daſs $OM \cdot ON = k^2$, wo O, M, N in gerader Linie liegen sollen. Dieser Ort ist der Kreis **K**, der durch den Anfangspunkt geht und als Mittelpunkt den Punkt $C\left(\frac{k^2}{2a}, 0\right)$ hat; wir haben dann $ON = MP = P'M$; also: „Gegeben ein Kreis **K**, ein Punkt O seiner Peripherie und eine Gerade r, die parallel läuft zur Tangente in O; man ziehe eine beliebige Gerade, die **K** in N und r in M schneidet, auf dieser Geraden trage man von M aus nach O hin (oder auch nach der entgegengesetzten Seite) die Strecke MP (oder MP') gleich ON ab; der Ort der Punkte P (oder P'), die man so erhält, ist eine Slusesche Konchoide."

O ist ein Doppelpunkt dieser Kurve; die zugehörigen Tangenten werden zusammen dargestellt durch die Gleichung

$$(a^2 + k^2)x^2 + a^2 y^2 = 0,$$

der Punkt ist daher ein Knoten, eine Spitze oder isolierter Punkt, jenachdem $k^2 \lesseqgtr -a^2$.

---

1) Brief vom 6. Oktober 1662 in *Oeuvres de Huygens* IV, S. 247. Der oben definierten Kurve wird Erwähnung gethan vom Marquis de l'Hôpital in seiner *Analyse des infiniment petits* (S. 95 der Ausg. von Avignon 1765).

43. Kombinieren wir die Gleichung (2) mit $y = \lambda x$, so erhalten wir folgende parametrische Darstellung:

$$x = a + \frac{k^2}{a(1+\lambda^2)}, \qquad y = a\lambda + \frac{k^2\lambda}{a(1+\lambda^2)} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Daraus leitet man leicht folgende Bedingung für die Kollinearität der drei Punkte $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ ab:

$$\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = \frac{a^2 + k^2}{3a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Infolgedessen hat die Kurve (abgesehen von einem unendlich fernen Wendepunkt) noch zwei Wendepunkte in endlicher Entfernung[1]), deren Parameter gleich $\pm \frac{\sqrt{a^2+k^2}}{3a}$ und deren Koordinaten

$$x = \frac{4a(a^2+k^2)}{4a^2+k^2}, \qquad y = \pm \frac{4(a^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}(4a^2+k^2)} \text{ sind.}$$

Durch Elimination von k erhalten wir die Gleichung

$$x(x^2 + y^2) = 4ay^2,$$

welche eine Cissoide darstellt; wir erhalten daher folgenden von Sluse entdeckten Satz[2]): **Der Ort der Wendepunkte aller Sluseschen Konchoiden, die denselben Doppelpunkt und dieselbe Asymptote haben, ist eine Cissoide des Diokles, die jenen Punkt als Spitze und ihre Asymptote parallel jener, aber in einem vierfachen Abstande von dem singulären Punkte hat.**

Die Gleichungen (3) liefern uns:

$$a^2(\beta\gamma\delta + \alpha\gamma\delta + \alpha\beta\delta + \alpha\beta\gamma) - (a^2+k^2)(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = 0 \quad (5)$$

als Bedingung der Koncyklität der vier Punkte $(\alpha), (\beta), (\gamma), (\delta)$. Überlassen wir es dem Leser, daraus abzuleiten, dafs durch jeden Punkt der Konchoide drei Kreise gehen, die sie anderswo oskulieren; die drei Oskulationspunkte gehören immer einem Kreise an, der durch den Anfangspunkt geht; dagegen giebt es in jedem Punkte der Kurve zwei Kreise, die die Kurve hier berühren und noch in einem anderen Punkte u. s. w.

Wir schliefsen mit dem Beweise einer Bemerkung von Neuberg[3]), dafs die Sluseschen Konchoide die Fufspunktkurve einer Parabel in Bezug auf einen Punkt der Axe ist. In der That hat die Fufspunktkurve der Parabel $y^2 = 2px$ in Bezug auf den Punkt $(\alpha, 0)$ die Gleichung

$$2x(x-\alpha)^2 + 2(x-\alpha)y^2 + py^2 = 0;$$

---

1) Die Bestimmung derselben ist in einem Briefe von Sluse vom 12. Jan. 1663 (vol. cit. S. 292) angegeben als von Huygens ausgeführt.

2) S. den zuerst citierten Brief von Sluse.

3) S. eine Bemerkung in dem angeführten Artikel *Une courbe oubliée.*

setzen wir nun $x - \alpha = x'$, so wird diese zu

$$\left(x' + \frac{p}{2}\right)\left(x'^2 + y^2\right) = \left(\frac{p}{2} - \alpha\right)x'^2;$$

und da diese von der Form der Gleichung (2) ist, so ist die behauptete Eigenschaft bewiesen.

Elftes Kapitel.

Rationale Kurven dritter Ordnung, die die unendlich ferne Gerade berühren, insbesondere die Kurve von Rolle.

43. Eine rationale Kurve dritter Ordnung, welche die unendlich ferne Gerade berührt, kann immer durch eine Gleichung von der Form $u_1 v_1^2 + u_2 = 0$ dargestellt werden, wo u_1 und v_1 lineare und u_2 eine quadratische Form in x und y ist. Um dies zu erhalten, genügt es den singulären Punkt, den die Kurve besitzt, als Anfangspunkt zu nehmen. Über derartige Kurven giebt es folgenden

Satz: Gegeben eine Parabel, ein Punkt O derselben und eine Gerade r in ihrer Ebene, man ziehe von O einen beliebigen Strahl, der die Parabel in O' und die Gerade in P schneidet und bestimme auf dieser einen Punkt P' derart, dafs die beiden Strecken OO', PP' denselben Punkt als Mittelpunkt haben[1]). Der Ort von P' ist eine Kurve dritter Ordnung, die O als Doppelpunkt und die unendlich ferne Gerade als Tangente hat.

Beweis: Die gegebene Parabel werde durch die Gleichungen $x = \frac{\lambda^2}{2p}$, $y = \lambda$ dargestellt; die Gerade r sei die Verbindungslinie der Punkte (α), (β), sie hat also die Gleichung $2px - (\alpha + \beta)y + \alpha\beta = 0$. Der Punkt O' habe den Parameter λ, eine leichte Berechnung zeigt dann, dafs die Koordinaten von P' sind

$$x = \frac{\lambda^2}{2p} - \frac{\alpha\beta\lambda}{2p(\alpha + \beta - \lambda)}, \quad y = \lambda - \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta - \lambda};$$

durch Elimination von λ erhält man:

$$\alpha\beta y^2 - 2p(\alpha + \beta)xy + 4p^2x^2 = 2y^2[px - (\alpha + \beta)y] \qquad (1)$$

als Gleichung des Ortes der Punkte P'; durch ihre Form beweist diese den obigen Satz.

Schreiben wir die Gleichung (1) folgendermafsen:

$$(2px - \alpha y)(2px - \beta y) = 2y^2[px - (\alpha + \beta)y]; \quad . \quad . \quad (2)$$

---

1) P' heifst zuweilen auch der isotomische Punkt von P in Bezug auf das Punktepaar OO'.

so erkennt man, dafs O ein Knoten, eine Spitze oder ein isolierter Punkt ist, jenachdem r die Parabel schneidet, berührt oder nicht schneidet. Die zugehörigen Tangenten sind die Geraden, die O mit den Punkten (α) und (β) verbinden. Im Falle die Kurve eine Spitze hat, wird (1′) zu

$$(2px - \alpha y)^2 = 2y^2(px - 2ay).$$

Diese Gleichung kann auf die Form gebracht werden:

$$xy^2 = a(y - mx)^2;$$

für $m = -1$ wird diese dann

$$xy^2 = a(x + y)^2,$$

und die zugehörige Kurve ist — wir wissen nicht aus welchem Grunde — die Kurve von Rolle genannt worden[1]).

Zwölftes Kapitel.

Versiera, Visiera und Pseudo-Versiera.

44. Es sei ein Kreis gegeben mit dem Durchmesser AC (s. Taf. II, Fig. 12). Der Ort der Punkte M so beschaffen, dafs, wenn man die Gerade MDB senkrecht zu AC zieht und die Schnittpunkte derselben mit dem Durchmesser und der Peripherie des Kreises mit B und D bezeichnet, man die Proportion hat

$$AB : BD = AC : BM \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ist eine Kurve, die sich (S. 380—81) im I. Bande der „*Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* von D[na] Maria Gaetana Agnesi (Mailand 1748) findet, woselbst sie mit dem Namen „la versiera" bezeichnet ist. Die Gleichung der Kurve — in der hier unten mit (2′) bezeichneten Form — findet sich schon in einem Passus bei Fermat[2]), aus dem man ersieht, dafs dieser sich schon mit ihrer Quadratur beschäftigt hat; der oben angeführte Name jedoch findet sich zuerst in dem berühmten Werke von Agnesi, die ihn wahrscheinlich in Rücksicht auf die gewundene Gestalt der Kurve bildete[3]) und

---

1) Elgé, *Sur la courbe de Rolle. Sa construction par points et par tangents* (Journ. de math. spéc., 4[e] Ser. V, 1896). Dort ist die oben angegebene allgemeine Konstruktion für den betrachteten besonderen Fall dargelegt.

2) S. die berühmte Abhandlung *De aequationum localium transmutatione et emendatione* (*Oeuvres de Fermat* I, S. 279—80 und III, 233—34).

3) Wir wollen bemerken, dafs jedenfalls die Agnesi das Wort „versiera" nicht in dem gewöhnlichen Sinne, Gespenst, Dämon, genommen hat [„nome finto di un demonio" (Manuzzi, *Vocabolario della lingua italiana,* Florenz 1840) und der sich findet im *Morgante* von Pulci („Hai tu veduto costei che certo la versiera fia?") und im *Orlando innamorato* von Berni („Come il diavol si fugge

dies durch das lateinische Wort vertere ausdrückte, welches wenden oder umwenden bedeutet.

In dem Agnesi'schen Werke wird nicht eine vollständige Untersuchung der Kurve angestellt, jedoch wird bemerkt (S. 391—93), dafs sie leichter auf folgende Weise konstruiert werden könne: „Man ziehe durch den Endpunkt A des gegebenen Durchmessers einen beliebigen Strahl, der die Peripherie des Kreises zum zweitenmal in D trifft und in E die Tangente desselben in C; die durch D und E bezüglich zur Tangente und zum Durchmesser AC gezogenen Parallelen treffen sich in einem Punkte M der Versiera." In der That folgt aus dieser Konstruktion, dafs $AB:BD = AC:CE$, was mit (1) übereinstimmt, indem ja $CE = BM$. Bezeichnen wir mit a den Durchmesser des gegebenen Kreises, nehmen AC als y-Axe und A als Anfang, so läfst sich die zuletzt geschriebene Proportion in folgender Form ausdrücken:

$$\frac{y}{\sqrt{y(a-y)}} = \frac{a}{x},$$

oder, was dasselbe

$$x^2 y = a^2(a-y) \quad (2) \qquad \text{oder auch} \quad y = \frac{a^3}{a^2+x^2}.\text{[1]} \quad (2')$$

Die Versiera ist also eine rationale Kurve dritter Ordnung, welche die x-Axe als Wendeasymptote hat, in C den gegebenen Kreis berührt und den unendlich fernen Punkt des Durchmessers AC zum isolierten Punkt hat. Es ist klar, dafs sie folgender parametrischer Darstellung fähig ist

$$x = \lambda, \qquad y = \frac{a^2}{a^2+\lambda^2}; \quad \dots\dots \quad (3)$$

dem entsprechend hat man als Kollinearitäts-Bedingung für drei Punkte (α), (β), (γ)

$$\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = a^2,$$

woraus sich ergiebt, dafs die Kurve in endlicher Entfernung zwei Wendepunkte besitzt mit den Koordinaten:

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}, \qquad y = \frac{3a}{4}.$$

Aus Gleichung (2) ergiebt sich:

$$\int y \cdot dx = a^3 \int \frac{dx}{a^2+x^2} = a^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + const.,$$

---

o la versiera")]. Indem Booth offenbar das Wort „versiera" in diesem Sinne nahm, gebrauchte er den Ausdruck „the witch or the curve of Agnesi" (*A treatise on some new geometrical methods* I, London 1873, S. 302—3).

1) Setzt man $x = y'$, $a - y = x'$, so wird (2) $y' = a\sqrt{\frac{x'}{a-x'}}$, die von Mister angewandte Gleichung (*Propriété de la courbe d'Agnesi* (Mathésis VII, 1887); setzt man $a = 2a'$, so erhält man die von Booth (l. c.) bevorzugte Gleichungsform.

und demnach

$$\int\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} y \cdot dx = 4\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2;$$

daher ist **die zwischen der Versiera und ihrer Asymptote belegene Fläche gleich dem vierfachen Inhalt des erzeugenden Kreises.**

Aus derselben Gleichung (2) folgt

$$\int y^2 \cdot dx = a^6 \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{a^4 x}{a^2+x^2} + \frac{a^3}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a},$$

daher
$$\pi \int\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} y^2 \cdot dx = 2 \cdot \frac{\pi^2 a^3}{4},$$

welches zeigt, **dafs die Versiera und der erzeugende Kreis durch Rotation um die Asymptote Volumina erzeugen, von denen das erstere das Doppelte des zweiten ist.**

Die für die Versiera angegebene Konstruktion ist einer naheliegenden Verallgemeinerung fähig, indem jene ein Spezialfall der folgenden ist: Gegeben ein Kreis **K** mit dem Centrum C und dem Radius r, ein Punkt O und eine Gerade d in der Ebene des Kreises. Man ziehe durch O einen beliebigen Strahl, der d in D und **K** in N trifft. Die durch N zu d gezogene Parallele schneide die Senkrechte aus D zu d in einem Punkte M, dessen Ort ist im allgemeinen eine Kurve vierter Ordnung. Befindet sich jedoch O auf der Peripherie von **K**, so zerfällt sie in die von O zu d gezogene Parallele und in eine Kurve dritter Ordnung, die eine Versiera wird, wenn d Tangente von **K** im anderen Endpunkte des Durchmessers CO ist. Ist dagegen OC parallel zur Geraden d, so heifst die betreffende Kurve Newton'sche Serpentine (Schlangenkurve)[1]. Es soll bemerkt werden, dafs, wenn man in dem allgemeinen Falle O zum Koordinatenanfang nimmt und zur x-Axe eine Parallele zu d, zwischen den Koordinaten der Punkte $N(x, y)$ und $M(x', y')$ die Beziehungen bestehen $x' = \frac{ax}{y}$, $y' = y$; **also sind die Versiera, die Serpentine und die anderen eben betrachteten Kurven Hyperbolismen von Kreisen** (s. Nr. **15**).

45. Peano hat in seinen *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (Turin 1887) S. 87 eine Kurve betrachtet, die ihrer Gestalt nach der Versiera ähnlich ist und die er Visiera der Agnesi genannt hat. Ihre Konstruktion ist folgende: „Man betrachte den Kreis, der auch zur Konstruktion der Versiera diente (Taf. II,

---

1) Bellacchi, *Lezioni ed esercizi d'algebra complementare* (Florenz 1898) Bd. I, S. 46. Dieselbe Kurve, auf die nämliche Weise erzeugt, findet sich auch in einer Abhandlung von G. de Longchamps (Journ. de math. spéciales, 2. Serie, IX, 1885, S. 202).

Fig. 12), und ziehe durch A einen beliebigen Strahl, der die Tangente an $\mathfrak{K}$ in C und die Peripherie bezüglich in T und U schneidet. Der Mittelpunkt N der Strecke TU gehört dem fraglichen Orte an."

Sind ϱ, ω die Polarkoordinaten von N in Bezug auf A als Pol und den Durchmesser AC als Polaraxe, so hat man

$$\varrho = AN = \frac{1}{2}(AT + AU) = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{\cos\omega} + \cos\omega\right);$$

setzt man nun $y = \varrho \cdot \cos\omega, \quad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$,

so folgt, dafs $(2x - a)(x^2 + y^2) - ax^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$

die kartesische Gleichung der Visiera ist. Sie ist eine cirkulare Kurve dritter Ordnung, die den Punkt A zum isolierten Punkte und als Asymptote die durch den Mittelpunkt des Kreises $\mathfrak{K}$ zu t gezogene Parallele hat; sie ist also von der Versiera durchaus verschieden, und man kann für sie den ihr von Peano gegebenen Namen Visiera wohl festhalten. Auf folgende Art kann sie parametrisch dargestellt werden:

$$x = \frac{a}{2} \cdot \frac{\lambda^2 + 2}{\lambda^2 + 1}, \qquad y = \frac{a}{2} \cdot \frac{\lambda^3 + 2\lambda}{\lambda^2 + 1}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

dieser Darstellung entspricht folgende Kollinearitäts-Bedingung für drei Punkte $(\alpha), (\beta), (\gamma)$

$$\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta - 2a = 0;$$

folglich besitzt die Kurve im Endlichen zwei Wendepunkte, die die Koordinaten haben

$$x = \pm \frac{4a}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad y = \frac{4a}{5}.$$

Nimmt man als x-Axe die Asymptote der Visiera, so hat man an Stelle von (5) folgende parametrische Darstellung:

$$x = a\left(\frac{1}{4}\sin 2\omega + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\omega\right), \qquad y = \frac{a}{2}\cos^2\omega; \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

daraus leitet man ab

$$\int x \cdot dy = -\frac{a^2}{2}\int (2\sin^2\omega - \sin^4\omega)\, d\omega,$$

demnach
$$2\int_{\omega=\frac{\pi}{2}}^{\omega=0} y \cdot dx = \frac{5}{4}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Folglich: **Die von der Visiera und ihrer Asymptote begrenzte Fläche ist gleich $\frac{5}{4}$ der Fläche des zur Konstruktion der Kurve dienenden Kreises.**

46. Es giebt noch einen anderen geometrischen Ort, der irrtümlich mit der Versiera indentificiert wurde. Nämlich in dem *Essai sur la géometrie de la règle et de l'équerre* von M. G. de Longchamps

(Paris 1890) findet sich (S. 111) folgende Konstruktion der angeblichen „courbe d'Agnesi". Gegeben (Taf. II, Fig. 12) drei Punkte A, C, G in gerader Linie, C sei der Mittelpunkt der von den beiden andern begrenzten Strecke; man ziehe durch ihn die Gerade t senkrecht zu ACG, dann ziehe man durch A eine beliebige Gerade, die t in H schneide und fälle auf diese die Senkrechte GK; die von H zu ACG und die von K zu t gezogenen Parallelen schneiden sich in einem Punkte P, dessen geometrischen Ort wir suchen. Wir beachten zu dem Zwecke, dafs der Punkt K nichts anderes ist, als der Schnittpunkt der von C gezogenen Geraden mit dem Kreise, dessen Centrum C und dessen Radius CA ist. Nehmen wir A als Ursprung, AG als y-Axe und nennen ω den Winkel der Transversalen mit der Geraden ACG, so erhalten wir offenbar

$$x = a \operatorname{tg} \omega, \qquad y = 2a \cos^2 \omega \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (7)$$

Eliminieren wir nun ω, so erhalten wir die gesuchte Gleichung des Ortes in folgender Form:

$$x^2 y = a^2 (2a - y) \, . \, . \quad (8) \qquad \text{oder} \qquad y = \frac{2a^3}{a^2 + x^2} \, . \, . \, . \quad (8')$$

Der Ort selbst ist demnach eine Kurve dritter Ordnung, jedoch nicht die Versiera; wir wollen sie Pseudo-Versiera nennen und zeigen, dafs sie mit der Agnesischen Kurve in einer bemerkenswerten geometrischen Beziehung steht. Setzt man nämlich $x = x'$, $y = 2y'$, so wird die Gleichung (8) zu

$$x'^2 y' = a^2 (a - y');$$

da diese Gleichung von der Form (2) ist, so schliefst man: **Die Pseudo-Versiera entsteht aus der Versiera, indem man alle Ordinaten derselben, die senkrecht zur Asymptote sind, verdoppelt**, sie ist also zu der Versiera affin.

Das erste Auftreten der Pseudo-Versiera geht auf eine Zeit zurück, viel früher als der *Essai* von de Longchamps. Schon Leibniz hat in seinen ersten Untersuchungen über die Quadratur ebener Kurven[1]) folgenden Prozefs angegeben, um aus einer Kurve Γ eine andere C abzuleiten: Gegeben zwei zueinander senkrechte Geraden r und s; man ziehe in einem Punkte π von Γ die Tangente an diese Kurve, so dafs sie r in T schneidet; alsdann ziehe man von Γ die Parallele zu s und von π die zu r, ihr Schnitt p wird ein Punkt von C sein. Diese Kurve wird die „figura resectarum" in Bezug auf Γ genannt. Um die Formeln, welche die Koordinaten ξ und η von π mit denen von p, x und y, verknüpfen, zu finden, nehmen wir r als Abscissen-, s als Ordinaten-Axe. Man findet dann leicht

$$x = \xi - \eta \frac{d\xi}{d\eta}, \qquad y = \eta;$$

1) *Leibniz,* ed. Gerhardt V, S. 100.

Um nun die Gleichung von C zu erhalten, genügt die Elimination von ξ und η aus diesen Gleichungen und der Gleichung $f(\xi, \eta) = 0$ der Kurve Γ. Ist z. B. Γ ein Kreis, der die x-Axe im Anfang berührt, so kann man setzen

$$\xi = a \cdot \cos\omega, \qquad \eta = a + a \cdot \sin\omega$$

demnach $$d\xi = -a \sin\omega \cdot d\omega, \quad d\eta = a \cos\omega \cdot d\omega.$$

Dann liefern die vorigen allgemeinen Formeln

$$\frac{x}{a} = \frac{1 + \sin\omega}{\cos\omega}, \qquad \frac{y}{a} = 1 + \sin\omega.$$

Eliminiert man ω, erhält man als Gleichung der „figura resectarum"

$$y = \frac{2ax^2}{a^2 + x^2} \qquad \text{oder} \qquad 2a - y = \frac{2a^3}{a^2 + x^2}. \quad . \quad . \quad (9)$$

Da letztere Gleichung sich von (8′) nur dadurch unterscheidet, dafs $2a - y$ an Stelle von y tritt, so ist die dargestellte Kurve eine Pseudo-Versiera. Leibniz hatte sie gefunden bei der Aufstellung seiner berühmten Formel $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$. Huygens interessierte sich dafür und schrieb ihm unter dem 7. November 1674[1]): „Pour ce qui est de la ligne courbe Anonyme, qui sert à Votre demonstration, j'avois envie de la baptizer en lui donnant quelque nom composé des noms de deux lignes dont je trouvois qu'elle estoit produite, qui sont le cercle et la Cissoide des anciens[2]). Mais ayant vu depuis que cette même ligne a esté premièrement mise en avant par J. Gregorius[3]), je crois qu'il luy faut laisser le droit de la nommer comme il voudra." — Mit diesem Citate, welches also die erste Erfindung der Pseudo-Versiera auf J. Gregory zurückführt, glauben wir unsern Bericht über diese bemerkenswerte Kurve wohl abzuschliefsen.

---

1) Daselbst II, S. 16—17, oder auch *Oeuvres de Huygens* VIII, S. 393—95.

2) Um sich diese Bemerkung klar zu machen, beachte man, dafs man die Gleichung (9) auch schreiben kann

$$x = a\sqrt{\frac{y}{2a - y}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{y(2a - y)} + y\sqrt{\frac{y}{2a - y}}\right);$$

es ist also x das arithmetische Mittel zwischen den Abscissen der beiden Kurven $x = \sqrt{y(2a - y)}$ und $x = y\sqrt{\frac{y}{2a - y}}$, von denen die erste ein Kreis, die zweite eine Cissoide ist.

3) *Exercitationes geometricae a Jacobo Gregorio Scoto* (London 1658).

Dreizehntes Kapitel.

Die Trisektrix-Kurven von Maclaurin, von Catalan und von de Longchamps.

47. Es seien (Taf. II, Fig. 13) drei Punkte in gerader Linie gegeben O, O', O'', derart, daſs $O''O' = \frac{1}{3} O'O$; man ziehe durch O' die Gerade o senkrecht zu $O''O'O$ und von O'' einen beliebigen Strahl, der o in M trifft, dann von M die Senkrechte und von O die Parallele zu $O''M$; diese beiden Geraden schneiden sich in einem Punkte P, deren Ort die Trisektrix von Maclaurin heiſst, und zwar wegen der Anwendung, die man von ihr machen kann, und zu Ehren des Geometers, der sie zuerst betrachtete[1]). Um ihre Gleichung zu finden, nehmen wir O als Pol und $OO'O''$ als Polaraxe, setzen $O'O'' = a$ (weshalb dann $OO' = 3a$) und haben dann, wenn K die vierte Ecke des Rechtecks $OPMK$ ist,

$$O''M = \frac{a}{\cos\omega}, \qquad O''K = 4a\cos\omega,$$

$$\varrho = OP = MK = O''K - O''M = \frac{a}{\cos\omega} - 4a\cos\omega,$$

somit ist die Polargleichung der Trisektrix

$$\varrho = a\frac{1 - 4\cos^2\omega}{\cos\omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

und also die kartesische Gleichung:

$$x(x^2 + y^2) = a(y^2 - 3x^2) \quad (2) \qquad \text{oder} \qquad y = x\sqrt{\frac{3a - x}{a + x}} \quad (2')$$

daraus folgt, daſs die Trisektrix eine cirkulare Kurve dritter Ordnung symmetrisch in Bezug auf die Gerade $OO'O''$ ist und den Punkt O' als einfachen, O als Doppelpunkt enthält, die Tangenten in O und die x-Axe teilen den Raum um O in sechs gleiche Teile. Die Gerade $x + a = 0$ ist eine Asymptote, und zwar die einzige reelle, der Kurve.

Setzt man $a = \frac{c}{2}$, $x = x' + \frac{c}{2}$, so wird die Gleichung (2') zu

$$y = \left(x' + \frac{c}{2}\right)\sqrt{\frac{c - x'}{c + x'}}$$

und stellt den Ort eines Punktes dar derart, daſs wenn A und B die

1) *Traité des fluxions*, traduit de l'anglais par R. P. Pezenas I (Paris 1749) S. 198 und Fig. 24, Taf. X; s. auch desselben Autors *Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universalis* (London 1720) S. 23. Die im Texte angegebene Konstruktion findet sich in dem *Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre* par M. G. de Longchamps (Paris 1890) S. 120; eine andere ist in einer Note von H. Brocard angegeben, *Remarque au sujet de la trisectrice de Maclaurin* (Journ. de Math. spéc. 3. Ser. V, 1891).

Punkte mit den Koordinaten $x = \pm \frac{c}{2}$, $y = 0$ sind, man hat $3 \cdot \sphericalangle PAB = \pi - PAB$ [1]); dies zeigt, dafs die Trisektrix von Maclaurin ein Spezialfall ist, sowohl der allgemeinen Strophoiden (Nr. **41**) als auch der Sektrix-Kurven von Schoute (Abschn. V, Kap. 12)[2]).

Die betrachtete Kurve ist folgender parametrischer Darstellung fähig:

$$x = a\frac{\lambda^2 - 3}{\lambda^2 + 1}, \qquad y = a\frac{\lambda(\lambda^2 - 3)}{\lambda^2 + 1}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

dieser entspricht folgende Kollinearitätsbedingung der drei Punkte $(\alpha), (\beta), (\gamma)$

$$\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta + 3a = 0,$$

welche uns beweist, dafs die cyklischen Punkte der Ebene Wendepunkte sind, und dafs der einzige reelle Punkt der Kurve auf der unendlich fernen Geraden ebenfalls ein solcher ist. Aus Gleichung (2) und (3) kann man folgern, dafs die Quadratur der Trisektrix auf elementare Weise ausführbar ist, während die Rektifikation elliptische Integrale erfordert[3]) (vgl. Nr. **20**). Ebenfalls kann man unschwer nachweisen, dafs die Trisektrix von Maclaurin die Fufspunktkurve einer Parabel in Bezug auf den Punkt der Axe ist, der von der Direktrix denselben Abstand wie der Brennpunkt hat.

---

1) Schlömilch, *Übungsbuch* II. Teil (Leipzig 1874) S. 59.

2) Schon hier soll bemerkt werden, dafs wir a. a. O. sehen werden, dafs die Trisektrix von Maclaurin durch eine der folgenden Polargleichungen dargestellt werden kann:

$$\varrho = 2a\frac{\sin 3\omega}{\sin 2\omega}; \qquad \varrho = 2a\frac{\sin\frac{\omega}{3}}{\sin\frac{2\omega}{3}}.$$

Die erstere fällt im wesentlichen mit (1) im Texte zusammen, die zweite hingegen ist identisch mit $\varrho = a : \cos\frac{\omega}{3}$, die sehr wertvoll in ihren Anwendungen ist. Z. B. giebt sie die Gröfse der Fläche eines Kurvensektors durch den Ausdruck

$$\frac{1}{2}\int_0^\omega \varrho^2 d\omega = \frac{a^2}{2}\int_0^\omega \frac{d\omega}{\cos\frac{\omega}{3}} = \frac{3a^2}{2}\int_0^\omega \frac{d\frac{\omega}{3}}{\cos^2\frac{\omega}{3}} = \frac{3a^2}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega}{3} = 3\cdot\frac{1}{2}a\cdot a\operatorname{tg}\frac{\omega}{3},$$

ein in Worten leicht ausdrückbares Resultat, wie Godefroy hervorhob (Journ. de Math. spéc. 2. Ser. IX, 1885, S. 179). Insbesondere ist die Fläche der Schleife $= 3\sqrt{3}\,a^2$.

3) G. de Longchamps, *Sur la rectification de la trisectrice de Maclaurin au moyen des integrales elliptiques* (Comptes rendus CIV, 1887). Für die Konstruktion der Tangente und andere Fragen dieser Art s. V. Jerabek, *Sur la trisectrice de Maclaurin* (Mathésis 2. Ser. IX, 1899).

G. Cramer hat gezeigt[1]), wie man eine noch allgemeinere Kurve als die Trisektrix von Maclaurin konstruieren kann, nämlich diejenige, die folgendes Ortsproblem löst: „Gegeben ein Kreis mit dem Centrum C (s. Taf. II, Fig. 14) und ein Punkt O in seiner Ebene, seien A, B die Endpunkte des Durchmessers OC; man ziehe durch A eine beliebige Sehne AM, durch O die Parallele zu AM und von M das Lot auf AB; welches ist der Ort der Punkte P, in welchem sich die beiden letzteren Geraden kreuzen?" Nehmen wir die Gerade OC zur x-Axe, bezeichnen mit l die Länge der Strecke OC und mit ω den Winkel POC, so haben wir

$$x = l + r \cdot \cos 2\omega, \qquad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \omega.$$

Durch Elimination von ω ergiebt sich dann

$$x(x^2 + y^2) = (r + l)x^2 - (r - l)y^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

als Gleichung des von Cramer definierten Ortes. Ändern wir die positive Richtung der x-Axe, so wird diese

$$x(x^2 + y^2) = (r - l)y^2 - (r + l)x^2,$$

und stimmt mit (2) überein, wenn man $r = 2a$, $l = a$ setzt. Die Cramer'sche Konstruktion liefert also in einem speziellen Falle die Trisektrix von Maclaurin.

48. Unsere Kurve kann noch auf eine andere Weise erzeugt werden, die unter ein allgemeines Verfahren der Transformation der Figuren fällt, welches P. H. Schoute untersucht hat[2]), und dem er den Namen Maclaurin'sche Transformation gegeben hat. Die Definition derselben lautet: „Gegeben in einer Ebene drei Punkte A, B, C und eine Gerade f. Man lasse jedem Punkte Q der Ebene, jenen Punkt Q' der Geraden CQ entsprechen, derart, daſs die Geraden QA und BQ' sich in einem Punkte R der Geraden f treffen." Wenden wir diese Transformation, in geeigneter Weise spezialisiert, auf einen Kreis an (dessen Mittelpunkt wir M nennen wollen), so erhalten wir Kurven, von denen einige uns schon begegnet sind, wie sich aus Folgendem ergiebt:

a) Der Punkt A liege auf der Peripherie des gegebenen Kreises (s. Taf. II, Fig. 15), B sei der unendlich ferne Punkt des zugehörigen Durchmessers, f sei der dazu senkrechte Durchmesser und C dessen unendlich ferner Punkt. Alsdann wird die Maclaurin'sche Transformation ähnlich derjenigen, die wir zur Erzeugung der Versiera (vgl. die Fig.) angewendet haben, aber sie ist dennoch von jener verschieden; die erhaltene Kurve ist der Gestalt nach der Versiera

---

1) *Introduction* S. 441.

2) *Sur la construction des courbes unicursales par points et tangentes* (Archives néerlandaises XX, 1887).

ähnlich, aber von ihr verschieden. Schoute (der sie wahrscheinlich mit dieser verwechselte) nannte sie Agnesi'sche Kurve[1]), in Wirklichkeit ist sie eine Pseudo-Versiera.

b) A liege noch auf der Peripherie des gegebenen Kreises (s. Taf. II, Fig. 16), B in der Mitte des Radius AM, f sei senkrecht zu diesem Radius und C liege im Unendlichen auf f. Um die Gleichung der transformierten Kurve abzuleiten, nehmen wir B zum Anfang und AB zur x-Axe; ist r der Radius des Kreises und $x = h$ die Gleichung der Geraden f, so kann man die Koordinaten eines beliebigen Punktes Q des Kreises in der Form schreiben $x = \frac{r}{2} + r \cdot \cos\omega$, $y = r \sin\omega$. Die Gerade AQ hat dann die Gleichung

$$\left(x + \frac{r}{2}\right) \sin\frac{\omega}{2} + y \cos\frac{\omega}{2} = 0,$$

und die Koordinaten von R sind $x = h$, $y = \left(h + \frac{r}{2}\right) \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$; daraus folgt

$$\frac{y}{x} = \frac{2h + r}{2h} \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$$

als Gleichung der Geraden BR. Indem nun die Gleichung von CQ in diesem Falle $x = \frac{r}{2} + r \cdot \cos\omega$ ist, so genügt, um die Gleichung des Ortes der Punkte Q' zu erhalten, die Elimination von ω aus den beiden letzten Gleichungen; sie ist daher

$$y^2 = -\left(\frac{2h + r}{2h}\right)^2 \frac{x - \frac{3r}{2}}{x + \frac{r}{2}} x^2. \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Erinnern wir uns nun (vgl. Nr. **33**), daſs das Folium Cartesii mit der Gleichung $\xi^3 + \eta^3 = 3a\xi\eta$ durch die Gleichung

$$y^2 = -\frac{1}{3} \frac{x - \frac{3a}{\sqrt{2}}}{x + \frac{a}{\sqrt{2}}} x^2$$

dargestellt werden kann, so erkennen wir, daſs die Gleichung (4) ein Folium Cartesii nur unter der Voraussetzung ist, daſs

$$4h + (3 + \sqrt{3})r = 0;$$

wir erhalten somit schlieſslich eine neue und einfache Konstruktion für die genannte Kurve.

c) Seien nun A und B (Taf. II, Fig. 17) Endpunkte eines Durchmessers des gegebenen Kreises, C liege im Unendlichen in der zu

---

1) S. die citierte Schrift S. 38 des Sonderabdruckes. Die Versiera würde man erhalten, wenn als f die Tangente des Kreises in dem A gegenüberliegenden Punkte gewählt würde.

AB senkrechten Richtung, auch f liege im Unendlichen; dann repräsentiert sich die allgemeine Maclaurin'sche Transformation in folgender Weise: „Man nehme auf der Peripherie des Kreises den Punkt Q, ziehe die Sehne AQ und von Q das Lot auf AB, dieses schneidet die von B zu AQ gezogene Parallele in dem Q entsprechenden Punkte Q'.“ Wir bemerken nun, dafs, wenn diese Parallele die Peripherie des gegebenen Kreises zum zweitenmal in Q'' und die in A gezogene Tangente in N schneidet, die rechtwinkligen Dreiecke ANQ'' und $BQ'Q$ einander kongruent sind, daraus folgt $BQ' = Q''N$; dies genügt zum Nachweis, dafs der Ort der Punkte Q' eine Cissoide des Diokles ist, mit B als Spitze und AC als Asymptote.

d) Sei A ein Punkt auf der Peripherie des zu transformierenden Kreises, B sei das Centrum, C der unendlich ferne Punkt in der zu AB senkrechten Richtung und f die unendlich ferne Gerade (Taf. III, Fig. 18). Um den Punkt Q' zu erhalten, der dem Punkte Q entspricht, ziehe man AQ und durch B die Parallele zu dieser Geraden; diese wird von der aus Q senkrecht zu AB gezogenen in Q', dem Q entsprechenden Punkte, geschnitten. — Wir bemerken, wenn V der zweite Endpunkt des Durchmessers AB ist, dafs Dreieck AQV rechtwinklig bei Q ist, weshalb auch BQ' senkrecht zu QV, folglich ist Dreieck $Q'QV$ gleichschenklig. Sei N der Schnittpunkt der Geraden VQ' mit dem zu AB senkrechten Durchmesser und ziehen wir NH parallel zu QV, so wird dieses die Höhe des Dreiecks NBQ' sein. Nun ist $\sphericalangle BNH = Q'QV$, da ihre Schenkel parallel sind und $\sphericalangle HNQ' = Q'VQ$ als Wechselwinkel; indem nun Dreieck $Q'QV$ gleichschenklig, so ist $\sphericalangle Q'QV = Q'VQ$ und daher auch $\sphericalangle BNH = HNQ'$. Dreieck NBQ' ist daher gleichschenklig und der Ort des Punktes Q' kann vermittelst des Punktes V und des rechten Winkels VBN konstruiert werden, wie es in Nr. **35** angegeben ist, der Ort von Q' ist also in diesem Falle eine gerade Strophoide.

e) Endlich sei A wieder ein Punkt des Kreises, B der Mittelpunkt des entsprechenden Radius AM, C der unendlich ferne Punkt in der senkrechten Richtung und f die unendlich ferne Gerade (s. Taf. III, Fig. 19, aus welcher die entsprechende Konstruktion ersichtlich ist). Nehmen wir AB als Abscissenaxe, B als Anfangspunkt, so kann man die Koordinaten von Q annehmen als $x = \frac{r}{2} + r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$. Ist H der Schnittpunkt der Geraden QQ' und AB, so erhält man aus der Betrachtung der ähnlichen Dreiecke AQH und $BQ'H$

$$Q'H = \left(\frac{r}{2} + r \cdot \cos\varphi\right) \frac{r \sin\varphi}{r + r\cos\varphi} = r \frac{\left(\frac{1}{2} + \cos\varphi\right)}{1 + \cos\varphi} \sin\varphi .$$

weshalb der Ort der Punkte Q' angesehen werden kann als dargestellt durch die Gleichungen

$$x = \frac{r(1 + 2\cos\varphi)}{2}, \qquad y = \frac{r(1 + 2\cos\varphi)}{2} \cdot \frac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi}.$$

Führen wir Polarkoordinaten ein, ϱ und ω, so haben wir

$$\varrho = r\frac{1 - 4\cos^2\frac{\varphi}{2}}{2\cos\frac{\varphi}{2}}, \qquad \omega = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\varphi}{2},$$

und nach Elimination von φ

$$\varrho = r\frac{1 - 4\cos^2\omega}{\cos\omega}.$$

Erinnern wir uns der Gleichung (1), so ergiebt sich, daſs der Ort des Punktes Q' eine Trisektrix von Maclaurin ist[1]).

49. Eine andere Trisektrix neueren Datums entspringt aus einer Eigenschaft der Parabel, die von E. Catalan im Jahre 1832 entdeckt wurde[2]), und die wir zunächst darlegen wollen: Es sei (Taf. III, Fig. 20) F der Brennpunkt, FB Radius vector einer Parabel und BC die Normale in B; man vervollständige das Rechteck $FBDC$, das zur einen Seite die Strecke FB, als Diagonale jene Normale hat, und betrachte den Ort des Punktes D. Stellt man sich nun zwei aufeinanderfolgende Radien vectoren vor, so erkennt man, daſs D der Berührungspunkt der Geraden BD mit ihrer eigenen Hüllkurve ist; somit ist der Punkt B der Fuſspunkt der Senkrechten von F auf eine der einhüllenden Geraden. Die Hüllkurve ist also derart, daſs ihre Fuſspunktkurve in Bezug auf den Pol F die gegebene Parabel ist; diese Hüllkurve, also **der Ort der Punkte D ist also nichts anderes, als die erste negative Fuſspunktkurve der Parabel in Bezug auf ihren Brennpunkt** (vgl. Abschn. VII, Kap. 7). Man ziehe nun die Gerade FD und nenne G und E die Schnitte der Geraden BC mit FD und mit der Axe AH der Parabel, schlieſslich ziehe man BK parallel AH und setze zur Abkürzung $\sphericalangle BFE = \vartheta$, $\sphericalangle DFE = \omega$. Infolge einer bekannten Eigenschaft der Parabel ist nun $\sphericalangle FBE = EBK$, $\sphericalangle EBK = BEF$ als Wechselwinkel, folglich $\sphericalangle FEB = FBE$. Dreieck BEF ist also gleichschenklig, demnach $\sphericalangle FBE = \frac{\pi - \vartheta}{2}$. Es ist aber auch Dreieck BFG gleichschenklig, und daher $\sphericalangle GFB = GBF$ oder $\vartheta - \omega = \frac{\pi - \vartheta}{2}$, oder auch $= \frac{\pi - \omega}{3}$. Also ist $\sphericalangle BFD = \frac{1}{3} AFD$. Diese Beziehung bekundet, daſs der Ort des Punktes D als Dreiteilungs-Kurve eines beliebigen Winkels dienen kann. Legt man nämlich den zu teilenden Winkel mit dem Scheitel in F und mit dem einen

1) Zu demselben Schlusse kommt man eher, wenn man berücksichtigt, daſs die sub e) angegebene Konstruktion ein Spezialfall der in der vor. Nr. beschriebenen Cramer'schen ist.

2) S. einen Brief dieses Geometers im *Journ. de math. spéc.* 2. Ser. IV, 1885, S. 229—33.

Schenkel auf FA, und ist ferner $\overline{D}$ der eine Schnittpunkt des anderen Schenkels mit dem angegebenen Orte, und $\overline{B}$ der dem Punkte $\overline{D}$ entsprechende Punkt der Parabel, so ist der Winkel $FA\overline{D}$ der verlangte.

Der Ort des Punktes D verdient den Namen Trisektrix von Catalan. Um die Gleichung derselben zu finden, nehmen wir die vorliegende Parabel als durch die Gleichung $\varrho = \frac{p}{1 - \cos\omega}$ dargestellt; die Gleichung der Geraden BD, deren Enveloppe die Trisektrix von Catalan ist, wird dann sein $x \cdot \cos\omega + y \cdot \sin\omega = \frac{p}{1 - \cos\omega}$. Durch Differentiation erhalten wir: $-x \sin\omega + y \cos\omega = -\frac{p \cdot \sin\omega}{(1 - \cos\omega)^2}$ und daher folgende parametrische Darstellung der Kurve:

$$x = p\frac{\cos\omega - \cos 2\omega}{(1 - \cos\omega)^2}, \qquad y = p\frac{\sin\omega - \sin 2\omega}{(1 - \cos\omega)^2},$$

woraus sich dann als Gleichung der Kurve folgende ergiebt:

$$27p(x^2 + y^2) = 2(x + 2p)^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

oder auch

$$27py^2 = (x - 4p)^2(2x + p) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5')$$

Die Kurve selbst ist demnach eine cirkuläre dritter Ordnung und symmetrisch in Bezug auf die Parabelaxe. Sie geht einmal durch den Punkt $\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ und zweimal durch den Punkt $(4p, 0)$, die Tangenten in diesem letzteren bilden mit der Axe Winkel $= \pm\frac{\pi}{3}$; der unendlich ferne Punkt ist ein Wendepunkt mit der unendlich fernen Geraden als zugehöriger Tangente; die Punkte $(p, \pm p)$ sind Kulminationspunkte u. s. w.

Noch jüngeren Ursprunges ist eine andere Kurve, die wir wegen ihrer Anwendung Trisektrix von Longchamps nennen[1]); Astor nannte sie hingegen weniger zutreffend Trèfle équilatéral[2]), während Bellavitis mit Rücksicht auf ihre Gestalt ihr den Namen Tricratere regolare[3]) gab. Sie kann vermittelst eines Kreises (mit dem Centrum O und dem Radius r) konstruiert werden; sei AB ein Durchmesser desselben (s. Taf. III, Fig. 21). Wir nehmen auf der Peripherie zwei Bogen AD und BE, den letzteren halb so grofs als den ersteren und ziehen in deren Endpunkten D und E die Tangenten; ihr Schnitt P wird ein Punkt der Trisektrixkurve sein. Um ihre

1) G. de Longchamps, *Sur une trisectrice remarquable* (Mathésis VIII, 1888).

2) S. einen Brief im XIV Bde. (1894) der 3. Serie der *Nouv. Ann.* S. 385, dem wir die angeführten Eigenschaften der Kurve gröfstenteils entnommen haben.

3) *Su alcune curve di facile costruzione* n. 22 (Mem. de la Soc. Ital. delle Scienze III, 3. Ser. 1879).

Gleichung zu bilden, nehmen wir O als Pol, OB als Polaraxe; setzen wir $\sphericalangle BOE = \varepsilon$, so wird $\sphericalangle AOD = 2\varepsilon$ sein. Bezeichnen wir dann den $\sphericalangle POB$ mit ω, so besteht die Beziehung $\pi - 3\varepsilon = 2(\omega - \varepsilon)$ und daher $\varepsilon = \pi - 2\omega$ und $\sphericalangle POE = \omega - \varepsilon = 3\omega - \pi$. Das rechtwinklige Dreieck EOP liefert uns also $\varrho = \frac{r}{\cos(3\omega - \pi)}$ oder

$$\varrho = -\frac{r}{\cos 3\omega}, \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

welches also die Polar-Gleichung der Trisektrix von Longchamps ist; die kartesische Gleichung ist dann

$$x(x^2 - 3y^2) + r(x^2 + y^2) = 0. \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Auch diese Trisektrix ist eine rationale Kurve dritter Ordnung; O ist ein isolierter Punkt derselben; die unendlich fernen Punkte der Geraden, die mit dem Durchmesser AB die Winkel $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ bilden, gehören ebenfalls der Kurve an; die Halbierungslinien derjenigen Winkel, die von den durch O in diesen Richtungen gezogenen Geraden gebildet wurden, sind drei Symmetrie-Axen der Kurve. Die unendlich fernen Punkte der Kurve sind Wendepunkte, die zugehörigen Tangenten bilden ein gleichseitiges Dreieck, indem ihre Gleichungen sind: $x + \frac{r}{3} = 0$, $x \pm y\sqrt{3} - \frac{2}{3}r = 0$. Die Hessesche Kurve der unserigen hat die Gleichung: $3x(x^2 - 3y^2) + r(x^2 + y^2) = 0$, weshalb sie also von derselben Art ist. Die Inverse in Bezug auf den Kreis mit dem Mittelpunkte O und dem Radius R hat die Gleichung $\varrho = \frac{R^2}{r}\cos 3\omega$, gehört daher einer Klasse von Kurven an, der wir im V. Abschn., Kap. 8 begegnen werden. Die Cayley'sche Kurve ist ein Kreis[1]). Schliefslich, da man Gleichung (7) auch in folgender Weise schreiben kann

$$y = x\sqrt{\frac{x + r}{3x - r}},$$

so ist unsere Kurve (vgl. Nr. **16**) algebraisch quadrierbar.

1) Die Tangentialgleichung dieser Kurve erhält man durch die einfache Anwendung einer bekannten Formel (Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen* I, S. 517).

Vierzehntes Kapitel.

Die kubische Duplicatrix und das parabolische Blatt.

50. Während die im vorigen Kapitel untersuchten Kurven zur Teilung eines Winkels in drei gleiche Teile dienen können, kann die, welche wir nunmehr besprechen werden, für die Aufgabe der Würfelverdoppelung dienen, weshalb G. de Longchamps sie kubische Duplikatrix genannt hat. Die von ihm angegebene Konstruktion ist folgende[1]): „Gegeben (Taf. III, Fig. 22) zwei Geraden r, r', die zu einander senkrecht stehen und ein Punkt O auf der zweiten; man ziehe von O einen Strahl, der r in A schneidet, in A errichte man auf diesem Strahle die Senkrechte, die r' in B trifft und ziehe durch B die Parallele zu r, bis sie den Strahl selbst in P trifft, der geometrische Ort des Punktes P ist eine kubische Duplicatrix. Um die Gleichung derselben zu finden, nehmen wir O als Pol und r' als Polaraxe, ist l der Abstand des Punktes O von C, dem Schnittpunkte von r, r', so haben wir

$$OA = \frac{l}{\cos\omega}, \qquad OB = \frac{OA}{\cos\omega}, \qquad OP = \frac{OB}{\cos\omega};$$

da nun $OP = \varrho$, ergiebt sich

$$\varrho = \frac{l}{\cos^3\omega}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Die entsprechende kartesische Gleichung der Kurve ist

$$x^3 = l(x^2 + y^2). \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Die kubische Duplicatrix ist also eine cirkulare Kurve dritter Ordnung, die auf der y-Axe im Unendlichen einen Wendepunkt besitzt; die unendlich ferne Gerade ist die entsprechende Tangente. Der Punkt O ist ein isolierter Punkt und die zugehörigen Tangenten sind isotropische Geraden. Die Kurve kann auch durch die beiden Gleichungen

$$x = l(1 + \lambda^2), \qquad y = l(\lambda + \lambda^3) \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

dargestellt werden; die Kollinearitäts-Bedingung für drei Punkte $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ ist dann

$$\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = 1;$$

man erkennt, daſs die Kurve im Endlichen zwei reelle Wendepunkte hat, mit der gemeinsamen Abscisse $x = \frac{4l}{3}$. — Bemerken wir noch, daſs es leicht ist, die Punkte der Kurve zu bestimmen, die eine ge-

---

1) *Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre* (Paris 1890) S. 92—94. Die Kurve kommt bereits bei Uhlhorn (*Entdeckungen in der höheren Geometrie*, Oldenburg, 1809, S. 54) vor und trägt daselbst den Namen Toxoide.

gebene Abscisse OB haben; es genügt nämlich über dem Durchmesser OB einen Kreis zu beschreiben, dessen Schnitte A, A' mit der Geraden r zu bestimmen, und dann diese Punkte als P, P' von O aus auf die von B zu r parallel gezogene Gerade zu projicieren.

51. G. de Longchamps hat noch eine andere Kurve dritter Ordnung betrachtet, auf die wir jetzt hinweisen wollen: „Gegeben zwei auf einander senkrechte Geraden und ein Punkt O ihrer Ebene (Taf. III, Fig. 23). Man ziehe durch O einen beliebigen Strahl, der r in P schneidet, in diesem Punkte errichte man die Senkrechte zu OP und bezeichne dessen Schnitt mit r' mit Q; dann ziehe man die Parallele durch Q zu OP und bestimme deren Schnittpunkt R mit r, schliefslich von R die Senkrechte RM zu OP; der Ort der Punkte M ist die fragliche Kurve[1]." Um ihre Gleichung zu bestimmen, nehmen wir als x- und y-Axen die durch O zu r' und r gezogenen Parallelen; sei S der Schnitt von r, r', A und B bezüglich die Treffpunkte von r mit Ox und r' mit Oy, a und b die Koordinaten OA, OB von S, so erhält man

$$OP = \frac{a}{\cos\omega}, \quad AP = a \operatorname{tg}\omega, \quad PS = a \operatorname{tg}\omega - b, \quad PQ = -\frac{b - a\operatorname{tg}\omega}{\cos\omega},$$

$$QR = PQ \cdot \operatorname{tg}\omega = -\frac{\operatorname{tg}\omega\,(b - a\operatorname{tg}\omega)}{\cos\omega},$$

und da $\varrho = OM = OP - QR$, so ist die Polargleichung des geometrischen Ortes von M

$$\varrho \cdot \cos\omega = a + \operatorname{tg}\omega\,(b - a\operatorname{tg}\omega)\,. \quad \ldots \quad (4)$$

Infolgedessen lautet ihre kartesische Gleichung:

$$x^3 = a(x^2 - y^2) + bxy\,. \quad \ldots \quad (5)$$

Im besonderen Falle, wenn $b = 0$

$$x^3 = a(x^2 - y^2)\,. \quad \ldots \quad (6)$$

Gleichung (5) stellt das schiefe parabolische Blatt, (6) das gerade parabolische Blatt dar. Das erstere (welches dem allgemeineren Falle entspricht) ist eine kubische Kurve, die O zum Doppelpunkt hat — die zugehörigen Tangenten sind zu einander senkrecht — und sowohl durch den Punkt S als auch den unendlich fernen der y-Axe geht; auch dieser ist ein Wendepunkt mit der unendlich fernen Geraden als Tangente. Gleichung (5) kann durch folgende beiden ersetzt werden:

$$x = (1 - \lambda^2)a + \lambda b, \qquad y = (\lambda - \lambda^3)a + \lambda^2 b, \quad . \; . \quad (7)$$

aus welcher parametrischen Darstellung sich folgende Kollinearitäts-Bedingung ergiebt

$$(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta + 1)a^2 - (\alpha + \beta + \gamma)ab + b^2 = 0;$$

1) *Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre* (Paris 1890) S. 120—121.

die Parameter der Wendepunkte der Kurve sind daher die Wurzeln der Gleichung

$$(3\omega^2 + 1)\,a^2 - 3\omega\,ab + b^2 = 0,$$

die Wendepunkte selbst sind daher imaginär, wie sich auch (s. Nr. **18**) voraussehen liefs. — Wenn $b = 0$, hat die Kurve die Besonderheit symmetrisch zur y-Axe zu sein.

Die Kurven dritter Ordnung, deren Theorie und Geschichte wir in diesem Abschnitte dargelegt haben, sind die einzigen, die, soweit uns bekannt, einen besonderen Namen erhalten haben[1]); auf andere bemerkenswerte werden wir noch später kommen, wenn wir allgemeinere Kurven behandeln (s. z. B. Abschn. V und VII), weitere nicht weniger bemerkenswerte wurden im Laufe verschiedenartiger Untersuchungen gefunden, erhielten jedoch keinen besonderen Namen. Eine solche ist z. B. die mit der Gleichung

$$x(x^2 + y^2) = a^2 y,$$

die sich im Briefwechsel zwischen Leibniz und Huygens findet[2]); ferner die mit der Gleichung

---

1) Um vollständig zu sein, müfsten wir noch folgende hinzufügen, mit denen G. de Longchamps sich in dem soeben angeführten Passus des *Essai* beschäftigt hat.

S. 113.	Einfache Kurven 3. O.	$x^3 = hy^2$.	Einfache parabolische Kurve 3. O. mit Spitze.
		$x^3 = h^2 y$.	„ „ „ „ „ Centrum.
		$xy^2 = h^3$.	Einfache hyperbolische Kurve 3. O.
S. 116.	Gemischte Kurve 3. O.	$y^2 x = h(x^2 + y^2)$.	
S. 119.	Konchoidale Kurve 3. O.	$\left(\frac{y^2}{x-h}\right)^2 = \frac{x}{h-2x}$.	
S. 119.	Cirkulare Konchoide	$(x-y)(x^2+y^2) - h(x^2+y^2-xy) = 0$.	

Derselbe Geometer hat an anderer Stelle (*Cours de problèmes de géométrie analytiques* I, Paris 1898, S. 149 und 213) die kubische Serpentine und die cirkulare Serpentine betrachtet. Alle diese Kurven besitzen keine hervorragenden Eigenschaften, weshalb wir bei diesen nicht verweilen.

2) Der auf diese Kurve bezügliche Teil der Korrespondenz zwischen den beiden Mathematikern ist so bemerkenswert, dafs wir uns nicht enthalten können, diesem einige Worte zu widmen.

Wie bekannt, gehörte Huygens nicht von vornherein zu den ersten Gläubigen der von seinem alten Schüler Leibniz erfundenen Differential-Rechnung, und um die Tragweite des „methodus tangentium inversa", dessen einzige Macht Leibniz gerühmt hatte zu erproben, gab er diesem auf, die Kurven zu finden, deren Subtangenten bezüglich ausgedrückt werden durch

$$\frac{y^2}{2x} - 2x, \qquad \frac{2x^2y - a^2x}{3a^2 - 2xy}.$$

(S. den Brief vom 24. Aug. 1690 in *Leibniz,* herausg. v. Gerhardt, II, S. 46). In der Antwort (3./13. Okt. 1690 a. a. O. S. 50) sagt Leibniz, dafs die zweite der

$$y^2 = \frac{a^2 x}{a + 2x},$$

die der Ort der Brennpunkte derjenigen Hyperbeln ist, die einen

---

verlangten Kurven (wenn man der Einfachheit halber $a = 1$ setzt) die Gleichung $\frac{x^3 y}{h} = b^{2xy}$ habe, wo h eine beliebige Konstante, und b diejenige Zahl ist, die zum Logarithmus die Einheit hat. Huygens war von dieser Lösung nicht befriedigt und antwortete unterm 18. Nov. 1690 (a. a. O. S. 35—56): „Je ne vous avois pas envoié les deux questions des lignes courbes pour vous donner de la peine en cherchant les solutions, mais croiant que vous auriez une méthode preste pour trouver les courbes par la proprieté de leur Tangents, ou pour determiner quand cela se peut ou non. Je commence à croire maintenant que cela n'est point, puisque la courbe dans laquelle AB estant x et sa perpend. BC y, on trouve BD, distance du concours de la tangente égale à $\frac{2xxy - aax}{3aa - 2xy}$; cette courbe dis-je a pour équation qui exprime sa nature $x^3 + xxy = aay$." — Huygens fügte eine Bestätigung seiner Behauptung und die Konstruktion der Kurve hinzu. Die Huygens'sche Kritik aber konnte, sei es wegen der Autorität ihres Urhebers, sei es weil sie die Leibniz'sche Erfindung empfindlich traf, nicht ohne Erwiderung bleiben, und blieb es auch nicht von seiten des berühmten Nebenbuhlers Newtons. In seinem Briefe vom 14./29. Nov. 1690 (a. a. O. S. 62—63) klärte er den Widerspruch seiner eigenen Schlüsse mit den von Huygens erhaltenen auf, indem er die Subtangente mit verschiedenem Vorzeichen genommen hatte, was er in einem späteren Briefe (v. 25. Nov. 1690, a. a. O. S. 64—65) wiederholte; daselbst ist überdies, als Gleichung der Kurve, die die erste von Newton gestellte Aufgabe löst, die folgende bezeichnet: $2r^4x^2 = r^4y^2 + a^2y^4$, wo r und a beliebige Konstanten sind. Auch diese war nicht die von Huygens gewollte Gleichung, welche nämlich $2a^2x^2 = a^2y^2 + y^4$ lautet (Brief v. 19. Dez. 1690, a. a. O. S. 68—69), diese geht jedoch auf jene zurück, wenn man statt a setzt $\frac{r^2}{a}$.

Um sich ein Urteil zu bilden über die Schwierigkeit der von Huygens gestellten Aufgaben, über die zu ihrer Lösung nötigen Mittel, und die Allgemeinheit der erlangten Resultate, wollen wir sie einmal mit den modernen Methoden behandeln. Wir beachten zu dem Zwecke, dafs die zweite jener Aufgaben, jenachdem man das Vorzeichen der Subtangente nimmt, sich auf die eine oder die andere der folgenden Differenzialgleichungen zurückführen läfst:

$$-y \cdot dx = \frac{2x^2y - a^2x}{3a^2 - 2xy}\,dy, \qquad y \cdot dx = \frac{2x^2y - a^2x}{3a^2 - 2xy}\,dy,$$

oder auch

$$(3a^2 - 2xy)\,y \cdot dx + (2xy - a^2)\,x \cdot dy = 0,$$
$$(3a^2 - 2xy)\,y \cdot dx + (a^2 - 2xy)\,x \cdot dy = 0.$$

Wenden wir nun die Identität an

$$\frac{Mdx - Ndy}{Mx - Ny} = \frac{1}{2}\left\{\frac{Mx + Ny}{Mx - Ny}\,d\log xy + d\log\left(\frac{x}{y}\right)\right\},$$

so verwandeln sich diese in folgende anderen:

$$\frac{1}{2}\frac{d(xy)}{xy[a^2 - xy]} + d\log\frac{x}{y} = 0; \qquad \left[1 - \frac{xy}{a^2}\right]\frac{d(xy)}{xy} + \frac{1}{2}\,d\log\left(\frac{x}{y}\right) = 0,$$

und demnach durch Quadratur

$$x^3 = kxy^2 - ka^2y; \qquad x^3y = h^2 \cdot e^{\frac{2xy}{a^2}};$$

Scheitel und eine Asymptote gemeinsam haben[1]; eine solche ist ferner der Ort der Mittelpunkte der Kreise, die durch den Brennpunkt der Parabel gehen und die Kurve berühren[2], dann der geometrische Ort für alle Punkte, die von den Seiten eines Dreiecks Entfernungen haben, deren Produkt konstant ist[3]; eine weitere entspringt der graphischen Darstellung einer kubischen Funktion einer komplexen Variabelen[4]; u. s. w.

---

von diesen Gleichungen stimmt die erste mit der von Huygens überein, während die zweite sich von der Leibniz'schen nicht unterscheidet. — Was nun die erste der Huygens'schen Aufgaben anlangt, so werden wir von dieser, weil sie auf eine Kurve vierter Ordnung führt, im folgenden Abschnitt handeln.

Wir wollen hier noch die geeignete Gelegenheit benutzen zu der Bemerkung, dafs in jüngerer Zeit J. Porro bei der Bearbeitung von Fragen aus der angewandten Mathematik auf Kurven stiefs, die er courbes atuptiques nannte (C. R. XXXIV, 1852, S. 173) und die in ähnlicher Weise durch folgende Differentialgleichung definiert werden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + xy^2 + 2\varrho y\sqrt{x^2 + y^2 - \varrho^2}}{y^3 + yx^2 + 2\varrho x\sqrt{x^2 + y^2 - \varrho^2}}.$$

1) S. die von Brocard unter Nr. 61 im *Progreso* II, 1891, S. 128 gestellte und von A. Schiappa-Monteiro (a. a. S. 300) gelöste Frage, auf welche sich ferner eine Note von Brocard (*Progreso* III, 1893, S. 32) bezieht und eine gröfsere Arbeit von demselben Schiappa-Monteiro (Das. S. 201—9 und 225—34).

2) E. Freund, *Über eine Kurve dritter Ordnung* (*Lotos,* Neue Serie, XIV, Prag 1894).

3) E. Czuber, *Über einen geometrischen Ort und eine damit zusammenhängende Fläche* (Monatshefte, 3. 1892).

4) Stöckly, *Eigenschaften der aus rationalen ganzen Funktionen dritten Grades entspringenden Kurven* (Archiv, 56, 1874).

III. Abschnitt.

Kurven vierter Ordnung.

Erstes Kapitel.

Allgemeines. Klassifikation.

52. Die Kurven vierter Ordnung hielten ihren Einzug in die mathematische Litteratur sozusagen gleichzeitig mit denen dritter Ordnung, und ungefähr in derselben Weise, nämlich mit dem Auftreten einzelner, in verschiedener Weise spezialisierter Kurven als deren Repräsentanten. Während jedoch die allgemeine Theorie der Kurven dritter Ordnung schon mehr als zwei Jahrhunderte Lebenszeit zählt, kann man von der Theorie der Kurven vierter Ordnung nur sagen, dafs sie erst vor etwa fünfzig Jahren angefangen sei. Und, während jene einen derartigen Grad der Entwickelung erlangt hat, dafs man sie als eine der vollendetsten der ganzen Geometrie ansehen kann, bietet die Theorie der Kurven vierter Ordnung, wenngleich sie auch manche sehr schöne Kapitel enthält, dennoch beklagenswerte Lücken. So sind, wenn auch die von Steiner[1]) und Hesse[2]) begonnenen und von so vielen berühmten Geometern der späteren Zeit fortgesetzten Untersuchungen über die 28 Doppeltangenten einer allgemeinen Kurve vierter Ordnung bis in die kleinsten Einzelheiten die von diesen gebildete Konfiguration zu unserer Kenntnis gebracht haben, dennoch die geometrischen Beziehungen zwischen ihren 24 Wendepunkten in geheimnisvollen Nebel gehüllt; so fehlen uns noch, wenn sich auch aus der Anwendung der hyperelliptischen Funktionen vieles Licht über diese Kurven verbreitet, erschöpfende Untersuchungen über die invarianten Eigenschaften der ternären biquadratischen Formen[3]). Nichtsdestoweniger sind einige der dahin gehörigen Formeln seit langer Zeit bekannt und sollen hier wieder erwähnt werden.

---

1) *Eigenschaften der Kurven vierten Grades rücksichtlich ihrer Doppeltangenten* (Crelles Journ. XLIX, 1855).

2) *Über die Doppeltangenten der Kurven vierten Grades* (Daselbst).

3) Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie* I. (Leipzig 1876) S. 274, Note.

Wenn $$f = \sum_{ijhk} a_{ijhk} x_i x_j x_h x_k = a_x^4 = b_x^4 = \cdots\cdots = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

die linke Seite der Gleichung einer allgemeinen Kurve vierter Ordnung ist, in der wirklichen und in der symbolischen Form, und man setzt

$$I = (ab\xi)^4, \qquad J = (bc\xi)^2 (ca\xi)^2 (ab\xi)^2, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

so stellen die beiden Gleichungen $I = 0$, $J = 0$ zwei kontravariante Kurven dar, die erste von der vierten, die zweite von der sechsten Klasse; das Übertragungsprinzip von Clebsch führt alsbald zu dem Schlusse, dafs jene umhüllt werden von den Geraden, die die Kurve in vier äquianharmonischen resp. harmonischen Punkten schneiden. Die Gleichung

$$I^3 - 6 I^2 = 0$$

ist dann nichts anderes als die Tangentialgleichung der Kurve, und diese ist daher von der zwölften Klasse, wie es auch die Plücker'schen Formeln erfordern. — Die Funktion

$$S = (bcd)(acd)(abd)(abc)\, a_x b_x c_x d_x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

gleich 0 gesetzt stellt hingegen eine zur gegebenen kovariante Kurve vierter Ordnung und gleichfalls allgemeine Kurve dar. Bekannt ist auch[1]), dafs, während jeder Kurve vierter Ordnung, $f = 0$ eine zweite $S = 0$ entspricht, umgekehrt die linke Seite der Gleichung jeder Kurve vierter Ordnung angesehen werden kann als Kovariante S von 36 bestimmten ternären biquadratischen Formen. — Eine andere Kovariante (sie ist von der sechsten Ordnung) erhält man durch Betrachtung der Hesseschen von f; hingegen ist eine Kontravariante (von der achtzehnten Klasse) durch die linke Seite der Gleichung der Cayley'schen Kurve gegeben; nun hat diese Kurve hat 21 vierfache Tangenten, die alle tangentiellen Singularitäten der Kurve in sich schliefsen[2]). Unter den Invarianten verdient, aufser der Diskriminante folgende besonders vermerkt zu werden:

$$A = \begin{vmatrix} a_{1111} & a_{1112} & a_{1122} & a_{1113} & a_{1123} & a_{1133} \\ a_{1211} & a_{1212} & a_{1222} & a_{1213} & a_{1223} & a_{1233} \\ a_{2211} & a_{2212} & a_{2222} & a_{2213} & a_{2223} & a_{2233} \\ a_{1311} & a_{1312} & a_{1322} & a_{1313} & a_{1323} & a_{1333} \\ a_{2311} & a_{2312} & a_{2322} & a_{2313} & a_{2323} & a_{2333} \\ a_{3311} & a_{3312} & a_{3322} & a_{3313} & a_{3323} & a_{3333} \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

deren geometrische Bedeutung wir alsbald (Nr. **53**) ersehen werden.

1) G. Scorza, *Un nuovo teorema sopra le quartiche piane generali* (Math. Ann. LII, 1899).

2) E. Bertini, *Le tangenti multiple della Cayleyna di una quartica piana generale* (Atti Torino XXXII, 1896).

Eine Frage über die Kurven vierter Ordnung, die alsbald aufgeworfen und in verschiedener Weise gelöst wurde, ist die nach ihrer Klassifikation. Obwohl sich diese als ein kompliziertes Problem von mühevoller Lösung herausstellte, so war sie doch schon von der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts an Gegenstand der Untersuchung seitens mehrerer Geometer, an deren Spitze wir den Abt Bragelogne finden. Dieser setzte in zwei langen Abhandlungen[1]) eine Methode auseinander, die Bestimmung der verschiedenen Typen auszuführen, unter welche die Kurven vierter Ordnung gruppiert werden können, eine Methode, die in letztem Grunde darin bestand, die allgemeine Gleichung vierten Grades in rechtwinkligen Punktkoordinaten auf gewisse kanonische Formen zurückzuführen. Aber das grofse Werk, in welchem die genannten Ideen ausführlich entwickelt werden sollten, hat niemals das Licht erblickt.

Nach dem Tode Bragelognes wurde das Problem, dem er so grofse Mühen geopfert hatte, gleichzeitig von zwei sehr berühmten Geometern wieder aufgenommen: L. Euler[2]) und G. Cramer[3]); vom ersteren ohne die Bemühungen des französischen Abtes zu kennen, während der andere sie ausdrücklich citiert. Die von den beiden Mathematikern vorgeschlagenen Einteilungen stimmen in der Annahme des Hauptkriteriums der Klassifikation überein, nämlich des Verhaltens der Kurve im Unendlichen. Hiernach lassen sich alle reellen Kurven vierter Ordnung in neun Klassen einteilen[4]), die durch die folgenden Anordnungen der Gruppe ihrer vier unendlich fernen Punkte charakterisiert sind: 1) Vier imaginäre und zu je zweien konjugierte Punkte; 2) zwei reelle verschiedene und zwei konjugiert imaginäre Punkte; 3) vier reelle und verschiedene Punkte; 4) zwei konjugiert imaginäre und zwei reelle zusammenfallende; 5) zwei reelle verschiedene und zwei reelle zusammenfallende; 6) zwei reelle Doppelpunkte; 7) zwei konjugiert imaginäre Doppelpunkte; 8) ein einfacher und ein dreifacher Punkt; 9) ein vierfacher Punkt. — Jede dieser Klassen umfafst mehrere Arten; Euler und Cramer haben eine beträchtliche Zahl derselben angegeben, indem sie sich damit begnügten, vielmehr nur die Möglichkeit zu vermerken, als die thatsächliche Existenz der entsprechenden Kurven nachzuweisen. Diese unabweisbare Ergänzung

1) *Examen des lignes du quatrième ordre ou courbes du troisième genre* (Mém. de l'Ac. des Sciences, Paris 1730). S. auch die Bemerkung *Sur les lignes du quatrième ordre* (Das.).

2) *Introductio in analysin infinitorum* II. (Lausanne 1748) S. 139—49.

3) *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Genf, 1750) S. 369—99.

4) In der That teilt man sie gewöhnlich nur in acht Klassen ein, aber es scheint uns doch, dafs man die oben mit 6) und 7) bezeichneten aus einander halten mufs.

wurde von J. Plücker[1]) geliefert, der überdies durch eine erschöpfende Aufzählung die Zahl der verschiedenen Arten der ebenen Kurve vierter Ordnung auf 152 brachte und für jede Art die kanonische Gleichung fand.

Das genannte Klassifikations-Verfahren ist aber, da es als Grundlage ein Prinzip hat, dafs sich mit den herrschenden Ideen der Geometrie seit dem Triumphe ihrer projektiven Methoden schlecht verträgt, heute schon wenig mehr in Gebrauch und ist in Vergessenheit geraten. Vielmehr giebt man einem der beiden folgenden den Vorzug. Das erste hat die Betrachtung des Geschlechtes einer Kurve als Grundlage und demnach der Zahl und Natur ihrer singulären Punkte. Dementsprechend werden alle Kurven vierter Ordnung in vier grofse Kategorien eingeteilt, jenachdem sie vom Geschlechte 3, 2, 1, 0 sind. Die erste enthält die Kurven ohne vielfache Punkte, die zweite die mit einem Doppelpunkte oder einer Spitze versehenen (solche Kurven sind dann hyperelliptische Kurven vierter Ordnung)[2]), die dritte die Kurven mit zwei Punkten von der Vielfachheit zwei (es sind die elliptischen Kurven vierter Ordnung), die letzte die mit drei Doppelpunkten (Knoten, Spitzen, oder isolierten Punkten) oder einem dreifachen Punkte (es sind die rationalen Kurven vierter Ordnung). Diese Einteilung kann weiter fortgesetzt werden durch die Betrachtung der Moduln der einzelnen Kurven.

Die zweite der oben angekündigten Methoden gründet sich auf topologische Betrachtungen. Vorbereitet von Cayley[3]) wurde sie von Zeuthen[4]) entwickelt und in einzelnen Punkten von Crone[5])

---

1) *Theorie der algebraischen Kurven* (Bonn 1839) S. 136—49. In der früheren *Enumeration des courbes du quatrième ordre, d'après la nature différente de leurs branches infinies* (Liovvilles Journ. I, 1836) hatte derselbe Geometer nur 135 Gattungen betrachtet.

2) Zu dieser grofsen Klasse gehört die in kartesischen Koordinaten durch die Gleichung $y^4 - x^4 + ay^2 + bx^2 = 0$ dargestellte Kurve, die von den französischen Geometern courbe du diable genannt wurde (vgl. *Intermédiaire* IV, 1897. S. 222); der Anfangspunkt ist ein Knoten- oder ein isolierter Punkt, jenachdem $\frac{a}{b} \lessgtr 0$; die unendlich fernen Punkte der Winkelhalbierenden der Axenwinkel sind einfache Punkte derselben. Besonders ist noch betrachtet worden (s. Briot u. Bouquet, *Leçons de géometrie analytique* S. 367; und Nievenglowsky, *Cours de géom. analytique* II. Paris 1895. S. 73) folgender Fall

$$y^4 - x^4 - 96\,a^2y^2 + 100\,a^2x^2 = 0.$$

Die „Teufelskurve" scheint jedoch nur wegen ihrer seltsamen Form bemerkenswert zu sein.

3) S. die Bemerkungen *On quartic curves* (Philosophical Magazine, 4e Reihe, XXIX, 1865).

4) *Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième degré* (Math. Ann. VII, 1873).

5) *Sur la distribution des tangentes doubles sur les divers systèmes de coniques ayant un contact quadruple avec une courbe du quatrième degré.* (Das. XII, 1877).

ergänzt. Sie führt zur Unterscheidung von sechsunddreifsig Typen der ebenen Kurven vierter Ordnung ohne vielfache Punkte, die in dreizehn Klassen zerfallen; sie beruht auf der Erkenntnis, dafs eine Kurve vierter Ordnung mit nicht verschwindender Diskriminante höchstens aus vier geschlossenen ganz auseinander liegenden Zügen besteht oder auch aus zweien, von denen der eine innerhalb des anderen liegt. Für die rationalen Kurven hingegen beträgt die Zahl der wesentlich verschiedenen Typen neun[1]), unter denen sich Übergangsformen zu den ersteren finden. Schliefslich wollen wir bemerken, dafs die Kurven vierter Ordnung vom Geschlechte 2 oder 1, einem bekannten allgemeinen Satze von Harnack[2]) zufolge höchstens aus drei oder zwei Zügen bestehen. — Dieser Hinweis auf eine Betrachtung, auf die wir nicht weiter zurückkommen werden, möge genügen; der Leser, der genauere Angaben wünscht, nehme die Dissertation von Frl. Ruth Gentry zur Hand: *On the forms of plane quartic curves* (New-York 1896).

53. Alle speziellen Kurven vierter Ordnung, mit denen wir uns beschäftigen werden, sind entweder elliptische (indem sie als Doppelpunkte oder Spitzen die cyklischen Punkte der Ebene haben) oder rationale; demnach werden wir — in ähnlicher Weise, wie wir es im vorigen Abschnitt gethan haben — ein besonderes Kapitel den ersteren, ein zweites den anderen widmen. Zunächst aber wollen wir zum Schlusse dieses Kapitels, — wie es früher auch in Nr. **17** geschehen ist — über einige Kurven vierter Ordnung ohne vielfache Punkte, die dennoch spezieller Art sind, berichten.

Die erste Stelle wollen wir der Clebsch'schen Kurve einräumen, welche die besondere Eigenschaft hat, dafs die linke Seite ihrer homogenen Gleichung als Summe der Biquadrate von fünf linearen Formen[3]) darstellbar ist; sie läfst daher polare Fünfseite zu; analytisch ist sie dadurch charakterisiert, dafs ihre Invariante A (s. Gl. (4)) gleich Null ist. Die Kovariante S (Gl. (3)) einer Clebsch'schen Kurve gleich Null gesetzt, stellt eine spezielle Kurve vierter Ordnung dar, indem sich in dieselbe vollständige Fünfseite einbeschreiben lassen; sie heifst die Lüroth'sche Kurve vierter Ordnung zum Andenken des Geometers, der sie zuerst untersucht hat[4]).

Die durch eine Gleichung von folgender Gestalt dargestellte Kurve

$$x_1^4 + 4u_3x_1 + u_4 = 0,$$

1) A. Brill, *Über rationale Kurven vierter Ordnung* (Math. Ann. XII, 1877).

2) *Über die Vielteiligkeit der ebenen algebraischen Kurven* (Das. X, 1876).

3) S. die Fundamentalabhandlung von Clebsch, *Über Kurven vierter Ordnung* (Crelles Journ. LIX, 1861).

4) Man sehe die beiden Abhandlungen: *Einige Eigenschaften einer gewissen Gattung von Kurven vierter Ordnung* (Math. Ann. I, 1869) und *Neuer Beweis des Satzes, dafs nicht jeder Kurve vierter Ordnung ein Fünfseit eingeschrieben werden kann* (Das. XIII, 1878).

wo u_3 und u_4 binäre Formen vom Grade 3 bezw. 4 sind, hat die Eigentümlichkeit, dafs ihre Hessesche einen singulären Punkt hat; wir nennen sie die Geiser'sche Kurve, zu Ehren des Geometers, der sie zuerst erdacht und sich derselben bedient hat, um das Fehlen von Doppelpunkten und Spitzen in der Hesseschen einer allgemeinen Kurve beliebiger Ordnung nachzuweisen[1]).

Die Jacobische Kurve einer Geraden und eines syzygetischen Büschels von Kurven dritter Ordnung ist eine Kurve vierter Ordnung, die nur von zwölf Konstanten abhängt. Geometrisch ist sie durch die Lage ihrer 24 Wendepunkte charakterisiert, die sich in zwei Gruppen scheiden, gebildet aus den Ecken der Dreiseite eines syzygetischen Büschels. Analytisch hingegen ist sie dadurch gekennzeichnet, dafs die kubische Invariante der linken Seite gleich Null ist, sowie auch die Invariante 6. Grades zugleich mit allen Unterdeterminanten 5. Grades. Man pflegt sie nach dem Namen ihres Entdeckers die Caporali'sche Kurve vierter Ordnung zu nennen[2]).

Von anderer Art ist die Halphen'sche Kurve, so genannt, weil G. H. Halphen auf sie die geometrische Definition der elliptischen Funktionen gründete, die er in seinem *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications* (Paris 1886) bearbeitet hat. Man denke sich einen Kreis mit dem Centrum O und dem Radius R und einen Punkt C in seiner Ebene; MM' sei eine Sehne desselben, die durch C hindurchgeht; man trage auf ihr die beiden Segmente $CN = CN'$ ab, so, dafs $CN\sqrt{MM'} = l\sqrt{2(R+\delta)}$, wo δ der Abstand CO, und l eine beliebig gegebene Strecke ist. Der Ort der Punkte N, N' ist eine Halphen'sche Kurve. Nimmt man C zum Anfang und CO als x-Axe, so findet man leicht ihre Gleichung als

$$(x^2+y^2)^2 - \frac{\delta^2}{R^2}(x^2+y^2)\,y^2 = l^4\left(\frac{R+\delta}{2R}\right)^2,$$

woraus folgt, dafs sie eine bicirkulare Kurve ist.

Andere spezielle Linien entstehen bei der Aufsuchung aller Kurven vierter Ordnung, die durch eine oder mehrere harmonische Homologieen in sich selbst transformiert werden[3]). Eine solche Untersuchung führt zu folgenden Resultaten:

1. Eine einzige Homologie; kanonische Gleichung der Kurve

$$u_0 x_3^4 + u_2 x_3^2 + u_4 = 0,$$

---

1) *Sopra la teoria delle curve piane di quarto grado* (Ann. di Matem. 2. Ser. IX, 1878).

2) E. Caporali, *Sopra una certa curva del* 4⁰ *ordine* (Rendic. dell Accad. di Napoli, Dezember 1882). Vgl. E. Ciani, *La quartica di Caporali* (Das. April 1896).

3) E. Ciani, *I vari tipi possibili di quartiche piane più volte omologico-armoniche* (Rend. del Circolo matematico di Palermo XIII, 1899).

wo u_0, u_2, u_4 Formen in x_1, x_2 von dem durch die Indices bezüglich angegebenem Grade sind. Wenn insbesondere $u_0 = 0$, entsteht eine Kurve mit einem Doppelpunkt, es ist die homologisch-harmonische Kurve von Cremona[1]).

2. Drei Homologieen, deren Centren und Axen ein Dreieck bilden; kanonische Gleichung

$$\sum_{ik} a_{ik} x_i^2 x_k^2 = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3);$$

die Kurve hat 24 Wendepunkte, die zu je achten auf 15 Kegelschnitten eines Netzes liegen.

3. Drei Homologieen, deren Centren auf einer Geraden liegen, und deren Axen durch einen Punkt gehen; kanonische Gleichung:

$$a x_3^4 + b x_1 x_2 x_3^2 + c x_3 (x_1^3 + x_2^3) + d x_1^2 x_2^2 = 0;$$

die Wendepunkte liegen zu je sechsen auf vier Kegelschnitten eines Büschels.

4. Fünf Homologieen; kanonische Gleichung der Kurve:

$$a(x_1^4 + x_2^4) + b x_1^2 x_2^2 + c x_3^2 (x_1^2 + x_2^2) + d x_3^4 = 0;$$

die Wendepunkte liegen zu je achten auf 27 Kegelschnitten.

5. Sieben Homologieen; kanonische Gleichung:

$$a(x_1^4 + x_2^4) + b x_1^2 x_2^2 + c x_3^4 = 0;$$

die Wendepunkte liegen zu je achten auf 36 Kegelschnitten.

6. Neun Homologieen; kanonische Gleichung

$$\sum_{i=1}^{3} x_i^4 + \lambda \sum_{ik=1}^{3} x_i^2 x_k^2 = 0.$$

7. Fünfzehn Homologien; kanonische Gleichung:

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0.$$

Aufserdem giebt es noch 96 Homographieen, die die Kurve in sich selbst verwandeln[2]).

8. Einundzwanzig Homologieen; als kanonische Form der Kurven-Gleichung kann man folgende nehmen:

$$x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1 + x_1^3 x_2 = 0.$$

Es ist diese die bemerkenswerteste von den nunmehr angeführten Kurven vierter Ordnung, sie heifst die Klein'sche Kurve[3]). Brioschi

---

1) S. die *Observations géométriques à propros de la note de Mr. Brioschi „Sur les tangentes doubles d'une courbe du 4e ordre avec point double“* (Math. Ann. IV, 1871).

2) W. Dyck, *Notiz über eine reguläre Riemann'sche Fläche vom Geschlechte drei und die zugehörige „Normalkurve“ vierter Ordnung* (Das. XVII, 1880).

3) Weil sie in der Abhandlung von F. Klein erwähnt ist: *Über die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen* (Das. XIV, 1879). Vgl.

hat bemerkt, dafs ihr erstes Glied mit der eigenen Kovariante vierter Ordnung S übereinstimmt[1]); man kann auch nachweisen, dafs dies die einzige Kurvenart von dieser Eigenschaft ist[2]).

Zum Schlufs wollen wir noch bemerken, dafs die Kurven, deren Gleichung auf die Formen

$$x_1^4 + u_4 = 0, \qquad x_1^3 x_2 + u_4 = 0$$

reduzierbar sind, die einzigen Kurven vierter Ordnung sind, die durch nichtharmonische Homologieen in sich selbst transformiert werden.

Ganz anderen Betrachtungen, wie die vorhergehenden, verdankt ihren Ursprung eine Kurve vierter Ordnung ohne Doppelpunkte, die man von Rechtswegen die Humbert'sche Kurve[3]) nennen kann. Dargestellt wird sie durch eine Gleichung von der Form

$$p_1^2 x_1^2 + p_2^2 x_2^2 + p_3^2 x_3^2 - 2p_2 p_3 x_2 x_3 - 2p_3 p_1 x_3 x_1 - 2p_1 p_2 x_1 x_2 = p x_1 x_2 x_3,$$

wo die p_1, p_2, p_3 die ersten Ableitungen nach x_1, x_2, x_3 einer binären quadratischen Form von x_1, x_2, x_3 sind, und p eine beliebige lineare Form derselben Variabelen. Jede Humbert'sche Kurve kann vermittelst einer „kanonischen Gleichung“ von folgender Form dargestellt werden:

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_2^2 x_3^2 - 2x_3^2 x_1^2 - 2x_1^2 x_2^2 = 4u x_1 x_2 x_3,$$

wo u eine neue lineare Form ist. Mannigfach sind die Eigenschaften, deren sich diese Kurve erfreut; wir beschränken uns auf die Bemerkung, dafs es eine spezielle Fläche vierter Ordnung giebt, deren sämtliche ebenen Schnitte Humbert'sche Kurven sind: es ist dies jene Fläche, die man erhält, wenn man eine beliebige reziproke Transformation auf die Fläche der Krümmungsmittelpunkte einer centrischen Fläche zweiter Ordnung anwendet.

R. Fricke, *F. Klein's Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen* I (Leipzig 1890) S. 701 ff.; ferner die Arbeit von M. W. Haskell, *Über die zu der Kurve $\lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0$ im projectiven Sinne gehörende mehrfache Überdeckung der Ebene* (Amer. Journ. XIII, 1891), woselbst auch die duale Kurve untersucht wird.

1) *Sopra una classe di curve del quarto ordine* (Atti delle R. Acc. dei Lincei, 3. Ser. VIII, 1884).

2) E. Ciani, *Un teorema sopra il covariante S della quartica piana* (Rendic. del Circolo matem. di Palermo XIV, 1900).

3) Weil sie ausführlich untersucht worden ist in einer Abhandlung von G. Humbert, *Sur une classe de courbes planes et sur une surface remarquable du quatrième ordre* (Liovvilles Journ. 4. Série, VI, 1890).

Zweites Kapitel.

Rationale Kurven vierter Ordnung im allgemeinen.

54. Unter den spezialisierten Kurven vierter Ordnung können mit verhältnismäfsig geringer Mühe untersucht werden solche, die die Maximalzahl singulärer Punkte besitzen. Derartige Kurven lassen sich vor allem mit den Methoden der projektiven Geometrie untersuchen, mit Zugrundelegung folgender Erzeugungsweise[1]): „Ein Strahlenbüschel (mit dem Centrum O) und eine projektive Involution der Tangenten eines Kegelschnittes $\mathfrak{K}$ erzeugen in der Ebene durch die Schnitte von Paaren entsprechender Elemente eine Kurve Γ". Untersucht man mit Hilfe des Chasles'schen Korrespondenzprinzips die Zahl der auf einer beliebigen Geraden gelegenen Punkte der Kurve, so findet man, dafs die Kurve Γ von der vierten Ordnung ist. Auf jedem Strahle des gegebenen Büschels giebt es aufser dem Punkte O noch zwei verschiedene Punkte der Kurve; daher ist O ein Doppelpunkt. Aufserdem entsteht auf der Involutionsaxe der Tangenten eine Projektivität, indem man die Schnitte derselben mit den Strahlen des Büschels betrachtet; die Doppelpunkte derselben sind offenbar auch Doppelpunkte der Kurve. Daher ist sie rational u. s. w.

Eine Kurve vierter Ordnung mit drei Doppel- oder Rückkehrpunkten kann aber noch auf andere Weise von einem Kegelschnitte abgeleitet werden. Man beachte nämlich, dafs wenn man die drei singulären Punkte A_1, A_2, A_3 zu Ecken des Fundamentaldreiecks nimmt, die Gleichung der Kurve folgende Gestalt annimmt:

$$a_{11}x_2^2x_3^2 + a_{22}x_3^2x_1^2 + a_{33}x_1^2x_2^2 + 2a_{23}x_1^2x_2x_3 + 2a_{31}x_2^2x_3x_1 + 2a_{12}x_3^2x_1x_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Wenn man nun diejenige quadratische Transformation anwendet, die durch die Formel

$$\varrho x_i = \frac{1}{y_i}$$

definiert wird, wo (x_1, x_2, x_3) und (y_1, y_2, y_3) zwei beliebige entsprechende Punkte und ϱ ein Proportionalitätsfaktor ist, so erhält man den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$

$$a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + a_{33}y_3^2 + 2a_{23}y_2y_3 + 2a_{31}y_3y_1 + 2a_{12}y_1y_2 = 0.$$

Folglich kann die Kurve (1) durch eine Transformation 2. Grades aus einem Kegelschnitte abgeleitet werden. Wenn der Kegelschnitt

---

1) Ameseder, *Über Kurven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten* (Wiener Ber. LXXIX, 2. Abt. 1879) und *Bemerkung über das Erzeugnis eines eindeutigen Strahlenbüschels und eines zweideutigen Strahlensystems zweiter Klasse* (Archiv. LXIV, 1879).

K die Seite A_2A_3 des Fundamentaldreiecks in zwei reellen Punkten berührt, so hat die Kurve Γ zwei reelle Tangenten in dem gegenüberliegenden Eckpunkte A_1, mit anderen Worten, dieser ist ein Knotenpunkt; wenn aber die beiden Schnittpunkte zusammenfallen, so ist er eine Spitze, und wenn sie konjugiert imaginär sind, ein isolierter Punkt. Wenn demnach der Kegelschnitt 6 reelle Schnitte mit dem Dreiecke $A_1A_2A_3$ hat, so hat Γ drei Knotenpunkte; sind die 6 Schnitte imaginär, drei isolierte Punkte; hat er drei Berührungen mit demselben, so hat Γ drei Spitzen[1]). Im ersten Falle berühren die 6 Tangenten an die Kurve in den Doppelpunkten denselben Kegelschnitt; dies wird leicht bewiesen, indem man die Kurve vierter Ordnung als von einem Kegelschnitt abgeleitet ansieht. Dieselbe Betrachtung beweist auch, dafs die 6 Geraden, die von den Doppelpunkten aus gezogen die Kurve anderswo berühren, Tangenten eines Kegelschnittes sind. Im Falle einer dreispitzigen Kurve vierter Ordnung sind die drei Spitzentangenten in einen Punkt zusammenlaufende Geraden.

Eine einfache Transformation der Gleichung (1) läfst erkennen, dafs die vier Doppeltangenten der Kurve durch die Gleichungen

$$\sqrt{a_{22}a_{33}}\, x_1 + \sqrt{a_{33}a_{11}}\, x_2 + \sqrt{a_{11}a_{22}}\, x_3 - (a_{23}x_1 + a_{31}x_2 + a_{12}x_3) = 0$$

dargestellt werden, und dafs ihre Berührungspunkte einem neuen Kegelschnitt angehören[2]).

55. Aufser diesen beiden geometrischen Methoden zur Untersuchung der rationalen Kurven vierter Ordnung giebt es noch eine dritte rein analytische, der man heutzutage den Vorzug giebt; es ist diejenige, welche die parametrische Darstellung der Kurvenpunkte anwendet und sich dabei der Theorie der binären biquadratischen Formen bedient. Setzt man

$$\varrho x_i = \sum_{k=0}^{k=4} a_{ik}\lambda^{4-k}, \qquad (i = 1, 2, 3) \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

wo x_i die homogenen Koordinaten eines Punktes bedeuten, ϱ ein Proportionalitätsfaktor und λ ein Parameter ist, so erhält man eine parametrische Darstellung, deren alle rationalen Kurven vierter Ord-

1) Die verschiedenen Gestalten, welche die Kurve Γ darbieten kann, sind auf den Tafeln I und II der *Math. Ann.* XII (Abhandlung von Brill) angegeben; die Kurven, welche die Gestalt der Fig. 9 haben, tragen zuweilen den Namen Lemnisceros. S. den Artikel *Lemnisceros* (und die zugehörigen Figuren) in der *Encyclopédie méthodique.* Daselbst sind auch die Namen Noeud oder Las d'amour als synonym mit Lemnisceros angeführt.

2) Von Salmon angegeben: *Anal. Geom. d. höheren ebenen Kurven,* deutsch von Fiedler (Leipzig 1873) S. 320.

nung fähig sind. Die Schnitte der Kurve (2) mit einer beliebigen Geraden erhält man, wenn man die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{k=4} \lambda^{4-k} \cdot \sum_{i=1}^{i=3} a_{ik} \xi_i = 0 \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

nach λ auflöst. Sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ die Wurzeln, und setzt man

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = s_1, \qquad \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \cdots\cdots = s_2,$$
$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \cdots\cdots = s_3, \qquad \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 = s_4,$$

so erhält man leicht als Kollinearitätsbedingung für die vier Punkte $(\lambda_1), (\lambda_2), (\lambda_3), (\lambda_4)$ das Verschwinden aller aus folgender Matrix entnommenen Determinanten

$$\left\| \begin{matrix} 1 & a_{10} & a_{20} & a_{30} \\ -s_1 & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ s_2 & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ -s_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ s_4 & a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{matrix} \right\|$$

Dies verlangt bekanntlich, dafs zwei derartige Determinanten gleich Null werden; man kann nun den so sich ergebenden beiden Gleichungen eine bequeme Form geben, indem man folgendermafsen verfährt[1]). Schreibt man der Symmetrie halber s_0 statt 1 und bezeichnet mit d_{123} u. s. w. die Determinanten, die man aus folgender Matrix erhält, mit dem üblichen Vorzeichen

$$\left\| \begin{matrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{matrix} \right\| \quad (\mathrm{A}),$$

so ist die erste jener Bedingungsgleichungen

$$s_0 d_{123} + s_1 d_{023} + s_2 d_{013} + s_3 d_{012} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Führt man noch zehn neue Konstanten α, β ein, derart, dafs

$$\sum_{i=0}^{i=4} \alpha_i a_{ki} = 0, \qquad \sum_{i=0}^{i=4} \beta_i a_{ki} = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \quad \ldots \quad (5)$$

so sind nach einem bekannten Satze die aus der Matrix (A) entnommenen Determinanten dritter Ordnung proportional den entsprechenden Determinanten $(-1)^{m+n} \cdot \Delta_{mn}$ aus der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{matrix} \right\| \quad (\mathrm{B}).$$

---

1) W. Franz Meyer, *Apolarität und rationale Kurven* (Tübingen 1883) S. 7.

Gleichung (4) läfst sich daher schreiben:

$$s_0 \Delta_{40} - s_1 \Delta_{41} + s_2 \Delta_{42} - s_3 \Delta_{43} + s_4 \Delta_{44} = 0.$$

Verallgemeinern wir dieses Resultat, so sieht man, dafs die Kollinearitäts-Bedingungen folgende Form annehmen:

$$\sum_{i=0}^{i=4} (-1)^i s_i \Delta_{ki} = 0;$$

oder, da man diese auch schreiben kann

$$\alpha_k \sum_{i=0}^{i=4} (-1)^i s_i \beta_i - \beta_k \sum_{i=0}^{i=4} (-1)^i s_i \alpha_i = 0,$$

so folgt, dafs die beiden Gleichungen

$$\sum_{i=0}^{i=4} (-1)^i s_i \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{i=4} (-1)^i s_i \beta_i = 0 \quad . \; . \; . \quad (6)$$

hinreichen, die Kollinearitäts-Bedingung für die vier Punkte (λ_1), (λ_2), (λ_3), (λ_4) auszudrücken. — Zahlreich sind die Anwendungen hiervon. So erhält man durch Elimination von λ_4 die Kollinearitäts-Bedingung der drei Punkte (λ_1), (λ_2), (λ_3). Setzen wir dann $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, so erhält man eine Gleichung (6. Grades), deren Wurzeln die Parameter der Wendepunkte sind; diese sechs Punkte gehören einem Kegelschnitte an[1]). Setzen wir hingegen in (5) $\lambda_2 = \lambda_1$ und $\lambda_4 = \lambda_3$, so erhalten wir zwei Gleichungen, aus denen durch Elimination von λ_3 die Bestimmungsgleichung für die Parameter der Berührungspunkte der (vier) Doppeltangenten entsteht. Ferner: Wenn man die durch Elimination von λ_4 aus den Gleichungen (5) sich ergebende Gleichung als identisch für λ_3 befriedigt voraussetzt, so findet man die für die Bestimmung der drei Doppelpunkte der Kurve geeigneten Gleichungen, indem die einfachen symmetrischen Funktionen $(\lambda_1 + \lambda_2)$ und $(\lambda_1 \cdot \lambda_2)$ zwei Parameter liefern, die einem Doppelpunkte angehören[2]). Setzt man schliefslich $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$, so verwandeln sich die Gleichungen (5) in zwei biquadratische Gleichungen für λ, deren Resultante $= 0$ gesetzt die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Undulationspunktes ausdrückt. U. s. w.

In die kleineren Details dieser algebraischen Entwickelungen können wir hier nicht eingehen; bemerken wollen wir hingegen noch, dafs wenn man

1) Dieser bemerkenswerte Satz, der erste, welcher die Verteilung der Wendepunkte der Kurven vierter Ordnung betrifft, wurde 1875 von J. Grafsmann entdeckt (s. die Inaugural-Dissertation *Zur Theorie der Wendepunkte, besonders der* C_4, Berlin) und darauf neuerdings, zwei Jahre später von A. Brill (s. die wichtige o. a. Abhandlung *Über rationale Kurven vierter Ordnung*, Math. Ann. XII, 1877).

2) Vgl. auch Nagel, *Bestimmung der Doppelpunkte einer rationalen Kurve vierter Ordnung* (Das. XIX, 1882).

$$\sum_{i=1}^{i=3} a_{ik}\xi_i = \alpha_k \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

setzt, die Gleichung (3) wird zu

$$\alpha_0 \lambda^4 + \alpha_1 \lambda^3 + \cdots \cdots + \alpha_4 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$

Berechnet man nun die quadratische und kubische Invariante der linken Seite dieser, als biquadratische Funktion von λ betrachteten, Gleichung, so erhält man die beiden Gleichungen

$$12\alpha_0\alpha_4 - 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2^2 = 0; \qquad \begin{vmatrix} 12\alpha_0 & 3\alpha_1 & 2\alpha_2 \\ 3\alpha_1 & 2\alpha_2 & 3\alpha_3 \\ 2\alpha_2 & 3\alpha_3 & 12\alpha_4 \end{vmatrix} = 0. \quad . \quad (8)$$

Erinnert man sich der geometrischen Bedeutung dieser Invarianten und beachtet, dafs von den Gleichungen (8) die erste quadratisch und die zweite kubisch in den Koordinaten ξ ist, so sieht man: die erste stellt einen Kegelschnitt dar, der von den Geraden umhüllt wird, welche die Kurve vierter Ordnung in einem Quadrupel äquianharmonischer Punkte schneiden, während die zweite der Gleichungen (8) eine Kurve dritter Ordnung darstellt, umhüllt von den Geraden, die dieselbe Kurve in Quadrupeln harmonischer Punkte schneiden[1]).

56. Sehr viele Fragen der Geometrie führen, wie wir im Verlaufe dieses Abschnittes sehen werden, zu Kurven vierter Ordnung mit 3 Doppelpunkten[2]). Wir erachten es aber für geeignet an dieser Stelle auf eine hinzuweisen, die sich in der Theorie der Kegelschnitte findet[3]).

Jeder Punkt M der Ellipse **E**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

---

1) W. Stahl, *Über rationale ebene Kurven vierter Ordnung* (Crelles Journ. CI, 1887). Viele andere Eigenschaften der in Rede stehenden Kurven finden sich in der Inaugural-Dissertation von W. Bretschneider, *Über Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten* (Erlangen 1875), während zahlreiche bibliographische Angaben in den „Mitteilungen des math.-naturw. Vereins in Würtemberg“ 2. Reihe, I, 1899, S. 24 u. 55 gesammelt sind.

2) Die Mechanik führt häufig auch zu Kurven dieser Art. Ein Beispiel davon ist z. B. die sogenannte Seiltänzerkurve; sie ist der Ort der Füfse eines Menschen der auf einem Seile geht, von dessen Enden eines befestigt ist, während das andere Ende mit einem Gewichte beschwert ist, nachdem es um eine Rolle geschlungen ist. J. B. Bérard (*Opuscules mathématiques*, 1811) fand als Gleichung derselben folgende

$$y^2 = \frac{x^2(b-x)^2}{a-(1-x)^2};$$

sie zeigt, dafs sie als Doppelpunkte den Anfangspunkt, den unendlich fernen von Oy und den Punkt $x = b$, $y = 0$ hat.

3) Köttgen, *Die geometrischen Örter der ausgezeichneten Punkte des Ellipsen- und Hyperbeldreiecks* (Progr. Duisburg, 1852); Hochheim, *Über geometrische Örter der merkwürdigen Punkte des Dreiecks* (Zeitschrift XV, 1870).

bestimmt mit den beiden Brennpunkten F und F' derselben ein Dreieck, dessen Höhenpunkt M' sein möge; bewegt sich M auf der Ellipse $\mathfrak{E}$, so beschreibt M' eine Kurve $\mathfrak{E}'$, deren Gleichung leicht zu finden ist. Sind nämlich $a \cdot \cos\varphi$ und $b \cdot \sin\varphi$ die Koordinaten von M, so können die von M' folgendermafsen dargestellt werden:

$$x = a \cdot \cos\varphi, \qquad y = \frac{a \cdot \sin^2\varphi - b^2}{b \cdot \sin\varphi};$$

durch Elimination von φ erhält man dann

$$a^2(c^2 - x^2)^2 - b^2y^2(a^2 - x^2) = 0, \quad \text{wo} \quad c^2 = a^2 - b^2 \ . \quad (10)$$

als Gleichung von $\mathfrak{E}'$. Diese ist demnach eine Kurve, die zu Doppelpunkten die Brennpunkte FF' und den unendlich fernen Punkt der kleinen Axe hat; die entsprechenden Asymptoten sind die Geraden $x = \pm a$ und begrenzen einen Streifen der Ebene, innerhalb dessen alle reellen Punkte der Kurve liegen, diese berührt die Ellipse in den Endpunkten der kleinen Axe.

Würde man an Stelle der Ellipse (9) die Hyperbel $\mathfrak{H}$ betrachtet haben

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

so würde man eine Kurve $\mathfrak{H}'$ erhalten haben mit der Gleichung:

$$a^2(c^2 - x^2)^2 + b^2y^2(a^2 - x^2) = 0, \quad \text{wo aber} \quad c^2 = a^2 + b^2,$$

ganz ähnlich der vorigen, aber von ganz verschiedenem Aussehen, indem, von anderem abgesehen, alle ihre reellen Punkte aufserhalb des von den Geraden $x = \pm a$ begrenzten Streifens liegen.

Zu denselben Schlüssen gelangt man auch ohne Rechnung durch Betrachtung der Methode, durch welche sich die Kurve $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$ als spezieller Fall folgender allgemeinen Transformation ableiten lassen: Gegeben zwei feste Punkte A_1 und A_2 in einer Ebene Π; man lasse jedem Punkte M von Π den Punkt M' entsprechen, der der Höhenpunkt des Dreiecks MA_1A_2 ist. Dann wird umgekehrt jedem Punkte M' im allgemeinen ein einziger Punkt M entsprechen, nämlich derjenige, in welchem die A_1 und A_2 bezügl. auf A_2M und A_1M gefällten Lote sich schneiden. Durchläuft M eine Gerade r, so beschreiben A_1M und A_2M perspektive und daher projektive Büschel; projektiv werden daher auch die von den Senkrechten aus A_1 und A_2 erzeugten Büschel, der Punkt M' erzeugt daher einen Kegelschnitt, der durch A_1 und A_2 geht. Da nun dem Punkte, in welchem r die Gerade A_1A_2 trifft, als Punkt M betrachtet, als Punkt M' der in der zu A_1A_2 senkrechten Richtung gelegene unendlich ferne Punkt A_∞ entspricht, so geht dieser Kegelschnitt durch A_∞. M und M' entsprechen sich also in einer quadratischen Transformation, deren Fundamentalpunkte $A_1A_2A_\infty$ sind; den Punkten $A_1A_2A_\infty$ entsprechen beziehungsweise die Geraden A_1A_∞, A_2A_∞, A_1A_2; einem Kegel-

schnitte entspricht eine Kurve vierter Ordnung, die $A_1 A_2 A_\infty$ zu Doppelpunkten hat; unter der Voraussetzung, dafs A_1 und A_2 dessen Brennpunkte seien, findet man die angegebenen Eigenschaften der Kurven E' und H'.

57. Eine Kurve vierter Ordnung ist nicht nur dann rational, wenn sie drei Doppelpunkte besitzt, sondern auch wenn sie mit einem dreifachen Punkte versehen ist. Nehmen wir diesen als Ecke A_3 des Fundamentaldreiecks, so nimmt die Gleichung der Kurve folgende Gestalt an:

$$x_3 u_3 - u_4 = 0, \qquad (12)$$

wo u_3, u_4 binäre Formen in x_1, x_2 sind, die erste kubisch, die zweite biquadratisch; setzt man darin $\frac{x_1}{\lambda_1} = \frac{x_2}{\lambda_2}$, so gelangt man zu folgender parametrischen Darstellung der Kurve

$$\varrho x_1 = \lambda_1 u_3(\lambda_1, \lambda_2), \quad \varrho x_2 = \lambda_2 u_3(\lambda_1, \lambda_2), \quad \varrho x_3 = u_4(\lambda_1, \lambda_2). \qquad (13)$$

Wir überlassen es dem Leser, auf diese Gleichung die Betrachtungen und Berechnungen anzuwenden, die wir oben bei der Gleichung (2) angegeben haben, und wollen sogleich noch eine in diese Kategorie gehörende Kurve anführen, nämlich die in kartesischen Koordinaten durch folgende Gleichung dargestellte:

$$x^2(x^2 + y^2) = ay(x^2 - y^2). \qquad (14)$$

Der Anfang ist ein dreifacher Punkt und die entsprechenden Tangenten sind die x-Axe und die Halbierungslinien der Axenwinkel; die Kurve besteht aus zwei zu einander in Bezug auf die y-Axe symmetrischen Blättern und einem dritten unendlichen, das symmetrisch in Bezug auf die Ordinatenaxe und gelegen am unteren Teile der Abscissenaxe. Diese Eigenschaften rechtfertigen den Namen parabolisches Trifolium, den man der Kurve gegeben hat[1]). Sie geht durch die unendlich-fernen imaginären Kreispunkte, hat als aufserordentlichen Brennpunkt den Punkt $(0, a)$, als Doppeltangente die Gerade

$$y = a(3 - \sqrt{2}), \text{ u. s. w.}$$

---

1) G. de Longchamps, Journ. de Math. spéc. 1888, S. 255 u. 285.

Drittes Kapitel.

Elliptische und bicirkulare Kurven vierter Ordnung im allgemeinen.

58. Die Kurven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten (Knoten, Spitzen oder isolierten Punkten) können durch Projektion von Raumkurven vierter Ordnung erster Spezies von einem aufserhalb liegenden Punkte erhalten werden. Man bekommt so nicht nur eine geometrische Methode, die sehr bequem ist, um deren Eigenschaften aufzustellen, sondern auch die Mittel, die Koordinaten vermittelst elliptischer Funktionen eines Parameters darzustellen; es genügt nämlich hierfür die Ausdrücke der homogenen Koordinaten einer Kurve vierter Ordnung erster Species durch Jacobische[1]) oder Weierstrafs'-sche[2]) Funktionen anzuwenden.

Dieselben Kurven lassen sich geometrisch auch erzeugen, wenn man auf eine Kurve dritter Ordnung ohne vielfachen Punkt eine quadratische Transformation anwendet, die zu Fundamentalpunkten zwei Punkte der Kurve selbst hat. So gelangt man aufser zu einem Verfahren, geometrisch die auf eine elliptische Kurve vierter Ordnung bezüglichen Sätze aufzustellen, auch in den Besitz eines Mittels, die Koordinaten durch elliptische Funktionen auszudrücken; hierfür genügt es, sich auf die in Nr. **13** aufgestellten Formeln zu stützen.

Zu derselben parametrischen Darstellung gelangt man auch durch eine von Clebsch in seiner klassischen Abhandlung *Über diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen* (Crelles Journ. LXIV, 1865) angewandte Methode. Man nehme zu dem Zwecke als Fundamentaldreieck eines Systems homogener Koordinaten ein Dreieck, dessen Ecken

$$x_1 = 0 \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

die Doppelpunkte der Kurve sind; die Gleichung derselben nimmt dann folgende Gestalt an

$$x_2^2 x_3^2 + 2 x_1 x_2 x_3 (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3) + x_1^2 (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) \cdot (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Greift man auf der Kurve zwei beliebige Punkte heraus, so kann man diese im Verein mit den beiden Doppelpunkten als die Grundpunkte

1) Vgl. G. Loria, *Sull' applicazione delle funzioni Jacobiane allo studio delle linee sghembe di quarto ordine e prima specie* (Lincei Rend. 4. Ser. VI, 2. Sem. 1890).

2) Man sehe z. B. G. Loria, *Le curve di genere* 1 *e le funzioni* σ *di Weierstrafs* (Giorn. di Matem. XXXI, 1893).

eines Büschels von Kegelschnitten ansehen, welches auf der Kurve vierter Ordnung eine lineare Reihe von unendlich vielen Punktepaaren ausschneidet, die auf ∞^1 Geraden liegen, die einen Kegelschnitt einhüllen. Wenn z. B. das Büschel durch die Gleichung

$$x_1(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) + \lambda x_2 x_3 = 0$$

dargestellt wird, so hat der eingehüllte Kegelschnitt die Gleichung:

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)(c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3) - (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3)^2 = 0.$$

Man gelangt so zu Ausdrücken für x_1, x_2, x_3 in rationalen Funktionen eines Parameters und Quadrat-Wurzeln einer biquadratischen Funktion desselben; führt man nun an Stelle dieses Parameters eine geeignete elliptische Funktion eines neuen Parameters v ein, so gelangt man zu Formeln von folgendem Typus:

$$\left.\begin{aligned}
\varrho x_1 &= c_1\left[sn^2\left(v - \frac{\xi+\sigma}{2}\right) - sn^2\delta_2\right]\left[sn^2\left(v + \frac{\xi+\sigma}{2}\right) - sn^2\delta_3\right] \\
\varrho x_2 &= c_2\left[sn^2\left(v + \frac{\xi+\sigma}{2}\right) - sn^2\delta_3\right]\left[sn\left(v - \frac{\xi+\sigma}{2}\right) - sn^2\left(\varepsilon - \frac{\xi-\sigma}{2}\right)\right] \\
\varrho x_3 &= c_3\left[sn^2\left(v - \frac{\xi+\sigma}{2}\right) - sn^2\delta_2\right]\left[sn\left(v + \frac{\xi+\sigma}{2}\right) - sn^2\left(\varepsilon + \frac{\xi-\sigma}{2}\right)\right]
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Die beiden Parameter des Doppelpunktes $x_1 = x_3 = 0$ sind $\frac{\xi+\sigma}{2} \pm \delta_2$, die des anderen $-\frac{\xi+\sigma}{2} \pm \delta_3$. Zwischen den Parametern $v_1, v_2, \ldots$ der Punkte, in denen die Kurve vierter Ordnung von einer Kurve m^{ter} Ordnung geschnitten wird, besteht eine lineare Kongruenz, die, jenachdem die schneidende Kurve nicht durch einen Doppelpunkt geht oder einen oder beide Doppelpunkte enthält, verschiedene Form annimmt; entsprechend diesen drei Fällen haben wir folgende Kongruenzen (wo K und K' die gewöhnliche Bedeutung haben):

$$\left.\begin{aligned}
&v_1 + v_2 + \cdots v_{4m-4} + v_{4m-3} + v_{4m-2} + v_{4m-1} + v_{4m} \equiv 0 \\
&v_1 + v_2 + \cdots v_{4m-4} + v_{4m-3} + v_{4m-2} \equiv \pm(\xi+\sigma) \\
&v_1 + v_2 + \cdots v_{4m-4} \equiv 0
\end{aligned}\right\} \text{modd. } 2K, 2iK' \quad \begin{matrix}(3)\\(4)\\(5)\end{matrix}$$

Zeigen wir an einigen Beispielen, wie leicht man mit deren Hilfe Eigenschaften der Kurve auffindet. Ist (v) ein Punkt, dessen entsprechende Tangente durch einen Doppelpunkt geht, so hat man

$$2v \equiv \pm(\xi + \sigma),$$

daher hat man für v die folgenden beiden Quadrupel von inkongruenten Werten

$$\frac{\xi+\sigma}{2}, \quad \frac{\xi+\sigma}{2} + K, \quad \frac{\xi+\sigma}{2} + iK', \quad \frac{\xi+\sigma}{2} + k + iK',$$

$$-\frac{\xi+\sigma}{2}, \quad -\frac{\xi+\sigma}{2} + K, \quad -\frac{\xi+\sigma}{2} + iK', \quad -\frac{\xi+\sigma}{2} + k + iK'.$$

Von jedem Doppelpunkte kann man also vier Tangenten ziehen und die beiden so gebildeten Gruppen sind projektiv. Da man die Korrespondenz in vier verschiedenen Weisen aufstellen kann, so sind wir zu folgendem Schlusse berechtigt:

Satz: Die beiden Tangentenquadrupel, die man an eine elliptische Kurve vierter Ordnung von ihren Doppelpunkten aus ziehen kann, schneiden sich in 16 Punkten, die zu je vieren auf vier Kegelschnitten liegen, die durch die Doppelpunkte selbst gehen.

Ähnlich: hat man, wenn (ν) ein Punkt ist, in welchem die betrachtete Kurve eine Berührung dritter Ordnung mit einem durch die Doppelpunkte gehenden Kegelschnitte zuläfst,

$$4\nu \equiv 0,$$

und daher
$$\nu = \frac{pK + qiK'}{2}.$$

Es ist notwendig und hinreichend, den ganzzahligen p und q die Werte $0, 1, 2, 3$ zu erteilen; man erhält so im Ganzen 16 Kegelschnitte, von denen jeder durch ein p und q angegeben werden kann. Man kann sie in folgenden vier Gruppen anordnen:

0,0	0,2	2,0	2,2
0,1	0,3	2,1	2,3
1,0	1,2	3,0	3,2
1,1	1,3	3,1	3,3;

und so ersieht man, unter Benutzung von Gleichung (5), **dafs in den Berührungspunkten zweier beliebigen Kegelschnitte derselben Gruppe mit der Kurve vierter Ordnung diese selbst von einem selben Kegelschnitt berührt wird, der durch die Doppelpunkte geht**; derartiger Kegelschnitte giebt es im ganzen $4 \cdot 16 = 64$. Aufserdem **liegen auf einem Kegelschnitte, der durch die Doppelpunkte geht, auch die Berührungspunkte der vier Kegelschnitte aus einer selbigen Gruppe**; man erhält so vier andere mit der Kurve vierter Ordnung in Beziehung stehende Kegelschnitte. Andere $4 \cdot 16 = 64$ erhält man durch Betrachtung der Berührungspunkte von vier Kegelschnitten, von denen man einen aus jeder Gruppe gewählt hat; u. s. w.[1]).

59. In dem Falle, dafs die Doppelpunkte der Kurve mit den beiden cyklischen Punkten der Ebene zusammenfallen, nennt man die Kurve eine bicirkulare Kurve vierter Ordnung[2]). Eine solche

---

1) Andere Eigenschaften sind in einer Note von Humbert angegeben *Sur la courbe du quatrième degré à deux points doubles* (Comptes rendus XCVII, 1888) indem die Koordinaten vermittelst der Θ-Funktionen ausgedrückt sind.

2) Vgl. J. Casey, *On bicircular Quartics* (Irish Acad. Trans. XXIV, 1869); G. Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (Paris 1873); F. Franklin, *On confocal bicircular Quartics* (Amer. Journ. XII,

kann als stereographische Projektion der Kurve, in welcher eine Kugel von einer Fläche zweiter Ordnung, die nicht durch das Projektionscentrum geht, geschnitten wird, angesehen werden. Man kann sie aber auch sich entstanden denken durch Transformation einer cirkularen Kurve dritter Ordnung vermittelst reziproker Radien. Da nun bei einer solchen Transformation den vier auf einem Kreise gelegenen Punkten wiederum vier ebensolche entsprechen und überdies den Brennpunkten der ursprünglichen Kurve die Brennpunkte der transformierten entsprechen, so führt der Hart'sche Satz (s. Nr. **21**) alsbald zu folgendem Schlusse: **Eine bicirkulare Kurve vierter Ordnung läfst 16 Brennpunkte zu, die zu je vieren auf einem Kreise gelegen sind.** Übrigens ist dieser Fall nur ein Specialfall des ersten Satzes, den wir in der vorigen Nummer mit Hilfe der parametrischen Darstellung aufgestellt haben.

In rechtwinkligen kartesischen Koordinaten kann man die Gleichung einer bicirkularen Kurve immer in folgender Form schreiben:

$$(x^2+y^2)^2+(\alpha x+\beta y)(x^2+y^2)+a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x + 2a_{23}y+a_{33}=0. \qquad (6)$$

Verlegt man nun den Anfang in den Punkt $-\frac{\alpha}{4}, -\frac{\beta}{4}$, so vereinfacht sie sich und erhält folgende Form:

$$(x^2+y^2)^2+a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0. \qquad (7)$$

Jener Punkt heifst der Fundamentalpunkt der Kurve vierter Ordnung und besitzt eine bemerkenswerte Eigenschaft[1]). Gehen wir nämlich zu Polarkoordinaten über, so wird Gleichung (7)

$$\varrho^4+(a_{11}\cos^2\omega+2a_{12}\cos\omega\cdot\sin\omega+a_{22}\sin^2\omega)\varrho^3 + 2(a_{11}\cos\omega+a_{23}\sin\omega)\varrho+a_{33}=0.$$

Sind daher M_1, M_2, M_3, M_4 die Schnitte einer durch den Fundamentalpunkt gehenden Geraden mit der Kurve, so ist immer

$$OM_1+OM_2+OM_3+OM_4=0;$$

ist daher M_{ih} der Mittelpunkt der Strecke M_iM_h, so kann man schreiben

$$OM_{ih}+OM_{jk}=0 \quad \text{(wo } ih\,jk \text{ eine Permutation von 1234 ist).}$$

O ist also der Mittelpunkt der Strecke $M_{ih}M_{jk}$. Es ist leicht, hieraus zu schliefsen: **In der Ebene jeder bicirkularen Kurve vierter Ordnung**

1890); u. s. w. Ein Verfahren, eine bicirkulare Kurve vierter Ordnung vermittelst eines Gelenk-Mechanismus zu zeichnen, wurde von W. Woolsey Johnson in Messenger Bd. V, S. 159 angegeben und von neuem beschrieben von Carr (*A synopsis of elementary results in pure and applied Mathematics* I, 2. Teil. London 1886, S. 738).

1) Auf diesen Punkt wird in einer Abhandlung von G. Humbert hingewiesen, *Sur les surfaces cyclides* (Journ. de l'Éc. polyt. LV, Cahier 1885).

giebt es einen Punkt (den Fundamentalpunkt), **der gleichen Abstand hat von den beiden Mittelpunkten zweier Schnittpunktepaare der Kurve mit einer beliebigen Geraden, auch wenn diese jenen Punkt nicht enthält**[1]).

Mit Hilfe der allgemeinen Gleichung (6) kann man auch zeigen, dafs **jede bicirkulare Kurve vierter Ordnung die Hüllkurve eines beweglichen Kreises ist, der einen festen rechtwinklig schneidet, und dessen Mittelpunkt sich auf einem gegebenen Kegelschnitte** (dem Deferent-Kegelschnitte) **bewegt.** Seien nämlich

$$C_i \equiv (x-\alpha_i)^2 + (y-\beta_i)^2 - r_i^2 = 0 \quad (i=1,2,3) \quad . \quad . \quad (8)$$

die Gleichungen dreier zum gegebenen rechtwinkligen Kreise, so repräsentiert die Gleichung

$$\lambda_0 C_0 + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

welches auch die Konstanten $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ sein mögen, einen anderen Kreis, der dieselbe Eigenschaft hat. Die λ sind proportional den barycentrischen Koordinaten des Mittelpunktes O dieses Kreises in Bezug auf das Dreieck, das die Mittelpunkte der drei ersteren zu Ecken hat. Da nun der Annahme gemäfs O einem Kegelschnitte angehört, so sind die λ durch eine Beziehung folgender Art mit einander verknüpft,

$$\sum_{ik} a_{ik}\lambda_i\lambda_k = 0 \qquad (i,k = 0,1,2;\ a_{ik} = a_{ki}). \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Um die Enveloppe des Kreises (9) unter der Bedingung (10) zu finden, setzen wir $\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = p$, $\frac{\lambda_2}{\lambda_0} = q$, und haben dann an Stelle von (9) und (10) die Gleichungen

$$C_0 + pC_1 + qC_2 = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9')$$

$$a_{11}p^2 + 2a_{12}pq + a_{22}q^2 + 2a_{01}p + 2a_{02}q + a_{00} = 0. \quad . \quad (10')$$

Diese müssen wir einer allgemeinen Vorschrift folgend mit den Ableitungen nach p und q von folgender Gleichung kombinieren

$$a_{11}p^2 + 2a_{12}pq + a_{22}q^2 + 2a_{01}p + 2a_{02}q + a_{00} + 2\varrho(C_0 + pC_1 + qC_2) = 0,$$

wo ϱ eine Hilfsgröfse ist. Diese abgeleiteten Gleichungen sind nun

$$a_{01} + a_{11}p + a_{12}q + \varrho C_1 = 0,$$
$$a_{02} + a_{12}p + a_{22}q + \varrho C_2 = 0.$$

Multiplizieren wir sie bezügl. mit p und q, ziehen sie dann von der vorigen ab und berücksichtigen auch Gleichung (9′), so erhalten wir:

$$a_{00} + a_{10}p + a_{20}q + \varrho C_i = 0.$$

Diese mit den beiden vorhergehenden und (9′) bilden ein lineares

1) Elgé, *Sur les quartiques bicirculaires* (Journ. d. math. spéc. 4. Ser. V, 1896).

Systems in p, q, ϱ; die Elimination dieser Gröfsen liefert die Gleichung der Enveloppe in folgender Form:

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & C_0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & C_1 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & C_2 \\ C_0 & C_1 & C_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder auch, wenn wir mit α_{ik} die in der Diskriminante von (10) zu a_{ik} adjungierte Unterdeterminante bezeichnen,

$$\sum_{ik} \alpha_{ik} C_i C_k = 0. \qquad (11)$$

Erinnern wir uns nun der Bedeutung von C_i, so ist es klar, dafs die Gleichung die Gestalt von (6) hat, womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Betrachten wir zwei auf einander folgende einhüllende Kreise; sie schneiden sich in zwei Punkten, die der oben erhaltenen Kurve angehören, **also sind alle einhüllenden Kreise doppelt berührend.** Im besondern sind die vier Schnittpunkte des Deferentkegelschnittes mit dem gegebenen Kreise die Mittelpunkte verschwindender, die Kurve doppelt berührender Kreise, also Brennpunkte derselben. Den vier Quadrupeln koncyklischer Brennpunkte der Kurve (s. o.) entsprechen vier Arten, die Kurve als Enveloppe zu erzeugen und ebensoviele Scharen von einfach unendlich vielen doppelt berührenden Kreisen.

Nehmen wir eine Transformation durch reziproke Radien vor, deren Centrum der Mittelpunkt des Kreises ist, um den es sich im oben bewiesenen Satze handelte, und deren Potenz das Quadrat seines Radius ist, so wird jeder einhüllende Kreis in sich selbst verwandelt, und dasselbe trifft also für die eingehüllte Kurve zu. Indem wir nun oben die Möglichkeit angeführt haben, dafs eine solche Kurve auf vier verschiedenene Weisen als Enveloppe von Kreisen erzeugt werden kann, so erhalten wir jetzt, **dafs im allgemeinen vier Inversionen existieren, durch welche eine beliebige bicirkulare Kurve vierter Ordnung in sich selbst transformiert werden kann**[1]).

60. Eine neue Methode zur Untersuchung der bicirkularen Kurven vierter Ordnung erhält man, wenn man sie mit der Gesamtheit der ∞^3 Kreise einer Ebene in Beziehung setzt[2]). Man gelangt dazu, wenn man in folgender Weise ein homogenes Koordinatensystem für

1) Im allgemeinen transformiert jede Inversion eine bicirkulare Kurve vierter Ordnung in eine andere Kurve derselben Art.

2) G. Loria, *Remarques sur la géometrie analytique des cercles du plan et sur son application à la théorie des courbes bicirculaires du 4me ordre* (Quarterly Journ. XXII, 1886).

den dreidimensionalen Raum aufstellt, welches als Grundgebilde die Kreise einer Ebene hat.

Seien
$$C_i = (x - \alpha_i)^2 + (y - \beta_i)^2 - r_i^2 = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$
die Gleichungen von vier Kreisen einer Ebene, die nicht zu demselben Kreise rechtwinklig sind. Dann stellt, wenn man die x variiert, die Gleichung
$$C = x_0 C_0 + x_1 C_1 + x_2 C_2 + x_3 C_3 = 0$$
die ∞^3 Kreise der Ebene dar; zu jedem System der Verhältniswerte $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ gehört ein bestimmter Kreis und umgekehrt; es ist daher gestattet, die x als homogene Koordinaten des beliebigen Kreises C in Bezug auf die als Fundamentalkreise betrachteten C_i zu nehmen. Bezeichnen wir mit d_{ij} den Abstand der Mittelpunkte der Kreise C_i und C_j und setzen
$$r_{ij} = r_{ji} = \frac{r_i^2 + r_i^2 - d_{ij}}{2}, \qquad r_{xx} = \sum_{ij} r_{ij} x_i x_j \qquad (i, j = 0, 1, 2, 3)$$
so finden wir nach kurzer Rechnung, dafs der Radius r des Kreises C' durch die Gleichung bestimmt ist:
$$r^2 = \frac{r_{xx}}{(\Sigma x_i)^2}.$$
Es bezeichnet daher die Gleichung $r_{xx} = 0$ die Punkte (Kreise vom Radius 0 oder Punktkreise) und die Gleichung $\Sigma x_i = 0$ die Geraden (Kreise von unendlich grofsem Radius); somit ist unser Koordinatensystem fähig, die Kreise, die Punkte und die Geraden der Ebene zu bestimmen.

Es ist leicht zu beweisen, dafs 1) die Anwendung einer linearen Substitution auf die homogenen Koordinaten eines Kreises der Ausführung einer Transformation der Koordinaten selbst äquivalent ist; die Fundamentalkreise des neuen Systems haben zu Koordinaten in Bezug auf die alten die Koeffizienten der linearen Substitution, welche in Bezug auf jene transponiert ist. 2) Eine Transformation durch reziproke Radien wird durch eine spezielle lineare Substitution der homogenen Koordinaten der Kreise ausgeführt.

Eine homogene Gleichung zwischen den Koordinaten $x, f = 0$, scheidet aus der Gesamtheit aller Kreise eine Gruppe von ∞^2 aus. Wenn die algebraische Gleichung vom Grade n ist, so heifst eine solche Gruppe Kreis-Komplex vom Grade n; z. B. bilden alle die Punkte und die Geraden zwei besondere Komplexe, der erste ist quadratisch, der zweite linear. Man beweist leicht, dafs ein linearer Kreiskomplex aus allen den Kreisen besteht, die zu einem festen rechtwinklig sind. Dieser ist der Ort der Punktkreise des Komplexes. Ausnahmsweise kann es eintreten, dafs dieser eine Gerade ist; dann besteht der Komplex aus allen den Kreisen, die ihren Mittelpunkt auf dieser Geraden

haben. Zwei homogene Gleichungen $f=0$, $g=0$ stellen zwischen den Koordinaten x eine Kreis-Kongruenz dar, die ∞^1 Elemente enthält. Im Besonderen stellen die Gleichungen $f=0$, $r_{xx}=0$ die Kurve Γ, den Ort der Punktkreise des Komplexes $f=0$ dar, während die Gleichungen $f=0$, $\Sigma x_i=0$ die von den ∞^1 diesem Komplexe angehörenden Geraden eingehüllte Kurve darstellen. Um die Eigenschaften von Γ zu bestimmen, wenn f algebraisch vom Grade n ist, kombinieren wir die beiden Gleichungen $f=0$, $r_{xx}=0$ mit der Gleichung $\Sigma \xi_i x_i = 0$ eines beliebigen linearen Komplexes; wir erhalten so diejenigen Punkte der Kurve Γ, die auf dem orthogonalen Kreise des Komplexes liegen. Da die Zahl dieser Punkte $2n$ beträgt, **so wird die Kurve Γ von jedem Kreise der Ebene in $2n$ Punkten geschnitten.** Da man $2n$ Punkte auch erhält, wenn der Hilfs-Komplex $\Sigma \xi_i x_i = 0$ aus allen den Kreisen besteht, deren Punkte in einer Geraden liegen, **so wird die Kurve Γ auch von jeder Geraden der Ebene in $2n$ Punkten geschnitten.** Dies beweist, daſs wenn f reelle Koeffizienten hat, **die Kurve Γ von der Ordnung $2n$ ist mit den cyklischen Punkten der Ebene als n-fachen Punkten.** Im Besonderen stellen die beiden Gleichungen

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0, \quad r_{xx} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

eine bicirkulare Kurve vierter Ordnung dar; eine solche Kurve kann daher immer als Ort der Punktkreise eines quadratischen Kreiskomplexes angesehen werden.

Diese Betrachtung führt die Klassifikation der hier behandelten Kurven auf die der Paare von quaternären quadratischen Formen zurück. Und wenn man ferner die x als homogene Koordinaten eines Punktes im Raume interpretiert, so stellt jene eine eindeutige Beziehung zwischen den Punkten einer bicirkularen Kurve vierter Ordnung und jener einer Raumkurve vierter Ordnung I. Spezies her; es ist im Grunde dieselbe Beziehung, auf die wir schon zu Anfang von Nr. **59** hinwiesen.

Zum Schlusse bemerken wir noch, daſs man mit bicirkularen Kurven vierter Ordnung ein zweifach orthogonales System bilden kann[1]), und daſs ihre Rektifikation von elliptischen Integralen abhängt[2]).

---

1) Darboux a. a. O.

2) G. Darboux, *Sur la rectification d'une classe de courbes du quatrième ordre* (Comptes rendus LXXXVII, 1878).

Viertes Kapitel.

Die spirischen Linien des Perseus.

61. Die alten Geometer — z. B. Heron und Proklus[1]) — bezeichneten mit dem Namen Spira (σπεῖρα) oder Annulus (κίρκος), die durch vollständige Rotation eines Kreises um eine beliebig in seiner Ebene gezeichnete Gerade erzeugte Oberfläche[2]); sie unterschieden drei Arten von Spiren, die offenen, die geschlossenen und die sich durchschneidenden Spiren, jenachdem der Radius des erzeugenden Kreises kleiner, gleich oder gröfser ist, als der Abstand seines Mittelpunktes von der Rotationsaxe. Es war natürlich, dafs die Griechen, die durch Schneiden mit einer Ebene an dem Rotations-Kegel so bemerkenswerte Kurven wie die Kegelschnitte erhielten, daran dachten, dieselbe Operation an den Spiren auszuführen. Indem nun Schnitte einer Ebene durch die Axe oder senkrecht zu dieser schon bekannte Kurven lieferten, mufste man, um etwas Neues zu erhalten, zu anderen Schnitten greifen. Zunächst nun bieten sich diejenigen dar, die man durch Ebenen parallel zur Axe der Spire machen kann; und so hat denn ein wenig bekannter Geometer der griechisch-alexandrinischen Periode — Perseus — das Verdienst, dieselben zuerst betrachtet zu haben, und von Proklus sind uns zwei Verse erhalten, in denen obige Entdeckung gefeiert wird.

Um die hervorstechendsten Eigenschaften der Kurven des Perseus oder spirischen Linien zu finden, nehmen wir (vgl. Taf. III, Fig. 24) ein System von drei zu einander senkrechten kartesischen Axen $\Omega\xi, \Omega\eta, \Omega\zeta$, deren dritte die Axe der Spire sein möge; nehmen wir aufserdem an, dafs der erzeugende Kreis in der Ebene $\xi\zeta$ liege und zum Mittelpunkte einen Punkt C auf der Axe $\Omega\xi$ habe; sei ferner $\Omega C = d$, und R der Radius des gegebenen Kreises. Die Gleichung desselben in der Ebene $\xi\zeta$ ist daher $(\xi - d)^2 + \zeta^2 = R^2$ und daher wird die der Spire sein

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - R^2)^2 = 4d^2(\xi^2 + \eta^2) . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Die schneidende Ebene σ — der Annahme gemäfs parallel zu $\Omega\xi$ — habe die Gleichung

$$\xi \cos\alpha + \eta \cdot \sin\alpha - p = 0 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Es sei O der Fufspunkt des von Ω auf σ gefällten Lotes. Wir nehmen nun in der Ebene σ als x-Axe deren Schnitt mit der $\xi\eta$-Ebene

1) Vgl. z. B. G. Loria, *Le scienze esatte nell' antica Grecia.* Buch II, Nr. 74 (Mem. dell' Acc. di Modena, 2. Ser. XI, 1893).

2) Die Spire unterscheidet sich daher nicht von der gewöhnlich Kreisring genannten Fläche.

und als y-Axe die durch O zu $\Omega\zeta$ gezogene Parallele. p ist dann die Länge von ΩO und α der Winkel, den sie mit $\Omega\xi$ bildet. Nimmt man nun einen beliebigen Punkt P der Ebene σ, so werden dessen Koordinaten $ON = x$, $NP = y$ mit den ξ, η, ζ desselben Punktes durch folgende Relation verbunden sein

$$x = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - p^2}, \quad y = \zeta.$$

Eliminieren wir mit deren Hilfe ξ, η, ζ aus (1), so erhält man die Gleichung der spirischen Linie in folgender Form:

$$(x^2 + y^2 + p^2 + d^2 - R^2)^2 = 4d^2(x^2 + p^2), \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

die man auch schreiben kann:

$$(x^2 + y^2)^2 + 2(p^2 + d^2 - R^2)(x^2 + y^2) - 4d^2x^2$$
$$+ (p + d + R)(p + d - R)(p - d + R)(p - d - R) = 0. \quad (4)$$

Eine einfache Untersuchung dieser Gleichung zeigt, daſs die spirischen Linien bicirkulare Kurven vierter Ordnung sind, symmetrisch in Bezug auf eine Axe. Die vier Tangenten in den cyklischen Punkten an die Kurve (4) haben die Gleichungen $x + iy = \pm d$, und demnach hat die Kurve die Punkte $x = \pm d$, $y = 0$ als auſserordentliche Brennpunkte[1]). Die Tangenten in den cyklischen Punkten sind verschieden, ausgenommen wenn $d = 0$; in diesem Falle wird die Spire eine Kugel und die spirische Kurve ein doppelt gezogener Kreis.

Daraus ergiebt sich, wenn wir schon jetzt einen Satz anwenden, den wir später (Nr. **78**) beweisen werden, **daſs unter den spirischen Linien sich die Cartesischen Ovale nicht befinden.** Ähnlich, wenn wir schon jetzt die allgemeine Gleichung der Cassinischen Ovale (Nr. **90**) herbeiziehen

$$(x^2 + y^2) + 2a^2(x^2 + y^2) - 4a^2x^2 + a^4 - c^4 = 0, \quad . \quad (5)$$

so sehen wir, daſs, wenn die spirische Kurve (4) mit dieser Kurve zusammenfallen soll, nötig ist, daſs

$$p^2 + d^2 - R^2 = a^2, \quad d = a, \quad (p^2 + d^2 - R^2)^2 - 4p^2d^2 = a^4 - c^4.$$

Eliminieren wir aus diesen Gleichungen a und c, so ergiebt sich, daſs $p = R$ sein muſs, und **demnach sind die Cassinischen Ovale spezielle spirische Kurven**[2]). Beschreibt man einen geraden Kreiscylinder mit

1) Will man die gewöhnlichen Brennpunkte haben, so ist zu berücksichtigen, daſs die acht von den cyklischen Punkten gezogenen Tangenten die Gleichungen haben:

$$x \pm iy = \pm \sqrt{(d + p - R)(d - p + R)}$$
$$x \pm iy = \pm \sqrt{(d + p + R)(d - p + R)}.$$

Näheres hierüber findet man in dem Aufsatze von F. Gomes Teixeira, *Sobre los focos de las espíricas de Perseo* (El Progreso mathematico, 2. Reihe, II, 1900).

2) A. Comte hat also mit Unrecht behauptet (*Traité élémentaire de géométrie analytique,* Paris 1843, S. 72), daſs wenn eine Ebene parallel bleibend zur

der Axe $\Omega\xi$ und dem Radius R, so wird jede seiner Tangential-Ebenen die Spire (1) in einem Cassinischen Oval schneiden, wenn $c = a$, so stellt (5) eine Bernoullische Lemniskate dar (vgl. Nr. **92**). In diesem Falle ergeben die drei zuletzt geschriebenen Beziehungs-Gleichungen $d = 2R$ und **daher giebt es nur zu den Spiren, bei welchen $d = 2R$, zur Axe parallele Schnitte, die die Gestalt von Bernoullischen Lemniskaten haben.**

Die durch Gleichung (4) dargestellte spirische Linie schneidet die Koordinatenaxe in zwei Quadrupeln von Punkten; die Abscissen des ersten Quadrupels sind durch die Gleichung gegeben

$$x^2 = (d \pm R + p)(d \pm R - p), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

die Ordinaten der Punkte des zweiten durch folgende Gleichung

$$y^2 = (R + p \pm d)(R - p \mp d). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Daraus ergiebt sich: 1) Wenn die Spire offen ist ($d > R$), sind reell entweder alle Punkte des ersten Quadrupels und keiner des zweiten, oder zwei des ersten und zwei des zweiten; im ersten Falle ist $p < d - R$, im zweiten $d - R < p < d + R$; im ersten Falle besteht die spirische Kurve aus zwei auseinander liegenden Ovalen, im andern aus einem einzigen. Im Grenzfalle $p = d - R$ oder $p = d + R$ hat die Kurve einen Doppelpunkt. 2) Wenn die Spire sich selbst durchschneidet ($d < R$), sind reell entweder alle Punkte eines jeden Quadrupels, oder zwei Punkte des ersten und zwei des zweiten; im ersten Falle ist $p < R - d$, im zweiten $R - d < p < R + d$; im ersten Falle besteht die Kurve aus Ovalen, von denen das eine vom andern umschlossen wird, im andern aus einem einzigen. Hier aber hat man, wenn $p = R \mp d$, eine Kurve mit einem Doppelpunkte. 3) Wenn endlich die Spire geschlossen ist ($d = R$), so hat man für $p < 2R$ eine aus einem Oval gebildete Kurve; in dem Grenzfalle $p = 2R$ hat die erhaltene Kurve einen Doppelpunkt. — Beachten wir auch noch, dafs die Gleichung (3) erkennen läfst, dafs die beiden Geraden mit der Gleichung $y = \pm R$ Doppeltangenten der Kurve sind; die Abscissen der zugehörigen Berührungspunkte sind durch die Gleichung gegeben: $x^2 - d^2 = p^2$, demnach sind die Punkte selbst reell oder konjugiert imaginär, jenachdem $p \gtrless d$. Im ersten Falle hat man eine wirkliche Doppeltangente, im zweiten Falle eine Gerade, die mit der spirischen Kurve eine ideelle doppelte Berührung hat.

Eine noch detailliertere Einteilung der spirischen Kurven, in Bezug auf ihre Gestalt, erhält man durch Betrachtung ihrer reellen

---

Axe einer Ringfläche sich bewegt, sie diese Fläche immer in Cassinischen Ellipsen schneide; daher kann die dort für die Cassinischen Ovale angewandte Bezeichnung „Kreisringschnitte“ (*sections toriques*) nicht für die spirischen Linien verwandt werden.

Wendepunkte; dafs diese den Alten nicht entgangen ist, wird von Proklus bezeugt; sie jedoch auseinander zu setzen mangelt es uns an Raum[1]).

62. Die Definition der spirischen Linien, von der wir ausgegangen sind, liefert nur eine stereometrische Erzeugung derselben. R. de Sluse hat vor zwei Jahrhunderten[2]) eine solche angegeben, die den Vorzug besitzt, nur Konstruktionen in einer Ebene zu benutzen und daher wohl verdient angeführt zu werden: „Es sei DBE eine gleichseitige Hyperbel (s. Taf. III, Fig. 25) mit den Axen $\Omega\xi$ und $\Omega\eta$, HC und DE seien zwei fest angenommene Parallelen zur Queraxe $\Omega\eta$; eine variabele Parallele zur andern Axe schneide jene beiden Parallelen und die Kurve bezw. in H, F, G; man nehme auf dieser zwei Punkte I symmetrisch in Bezug auf H und so, dafs $FG \cdot GH = \overline{HI}^2$; der Ort der Punkte I ist eine spirische Linie.“ Zum Beweise nehmen wir an, dafs

$$\xi^2 - \eta^2 = k^2, \qquad \xi = a, \qquad \xi = b$$

die Gleichungen der Hyperbel und der beiden festen Parallelen seien. Nennen wir die Koordinaten von I x', y' und die von G ξ, η, so haben wir offenbar: $y' = \eta$, $\pm HI = x' - a$, $FG = b - \xi$, $GH = \xi - a$, und daher wegen der Bedingung der Konstruktion

$$(x' - a)^2 = (b - \xi)(\xi - a).$$

Die Gleichung des Ortes von I erhält man durch Elimination von ξ und η aus dieser Gleichung und den beiden $y' = \eta$, $\xi^2 - \eta^2 = k^2$, und diese ist daher

$$[(x' - a)^2 + y'^2 + k^2 + ab]^2 - (a + b)^2 (y'^2 + k^2) = 0.$$

Setzt man nun

$$x' - a = y, \quad y' = x, \quad k^2 + ab = p^2 + d^2 - R^2, \quad \frac{a+b}{2} = d, \quad k = p,$$

so identifiziert sich diese Gleichung mit (3). Somit ist der Sluse'sche Satz bewiesen; zu gleicher Zeit sieht man, dafs die zugehörige Kurve aus dem Kreisringe entsteht, für welchen $R = \frac{a-b}{2}$, $d = \frac{a+b}{2}$ ist, wenn er durch eine Ebene im Abstande k von der Axe des Ringes geschnitten wird.

---

1) Der Leser findet weitere Details in der Abhandlung von Pagani im V. B. der *Mém. cour. par l'Académie de Belgique,* die folgendes Thema, das als Preisfrage von der Akademie im Jahre 1824 gestellt war, beantwortete: „On sait, que les lignes spiriques ou sections annulaires sont des courbes formées par l'intersection d'un plan avec la surface engendrée par la circonvolution d'un cercle autour d'un axe donné de position; on demande l'équation générale de ces courbes et une discussion complète de cette équation.“

2) S. zwei Briefe an Huygens datiert vom 4. Sept. und 19. Okt. 1657, abgedruckt im B. II der *Oeuvres de Huygens* (Hag 1889) S. 52 und 69.

63. Zu dieser planimetrischen Erzeugung, die wohl nur historisch bemerkenswert ist, fügte Siebeck vor etwa 50 Jahren[2]) eine weitere hinzu, die noch bemerkenswerter ist wegen den Folgerungen, zu denen sie führt, und die der von de Sluse vorzuziehen ist, weil sie noch elementarer ist. Mit dieser wollen wir uns nun beschäftigen, so weit es der zur Verfügung stehende Raum gestattet.

Gegeben zwei Punkte A und B im Abstande $2e$; ist P ein beliebiger Punkt, so setzen wir

$$PA + PB = s, \qquad PA - PB = d$$

und suchen nun in einer durch die Gerade AB gehenden Ebene den Ort der Punkte P, so dafs, wenn m und n gegebene Zahlen sind,

$$ms^2 + nd^2 = 4e^2. \qquad (81)$$

Zu dem Zwecke nehmen wir als x-Axe die Gerade AB, zum Anfang den Mittelpunkt O der Strecke AB. Man findet dann mit aller Leichtigkeit, dafs die Polar- bezw. kartesische Gleichung der betreffenden Kurve sind:

$$[m\varrho^2 - (1-m)e^2][n\varrho^2 - (1-n)e^2] + (m-n)^2 e^2 \varrho^2 \cdot \cos^2\omega = 0. \quad (9)$$

$$[m(x^2+y^2) - (1-m)e^2] \cdot [n(x^2+y^2) - (1-n)e^2] + (m-n)e^2x^2 = 0. \quad (10)$$

Führt man in (10) die angedeutete Multiplikation aus, so findet man, dafs die linke Seite die Gestalt der linken Seiten von Gleichung (4) hat und mit dieser identisch wird, wenn man setzt:

$$p^2 = \frac{e^4}{4mn}, \quad d^2 = -\frac{(m-n)^2e^2}{4mn}, \quad R^2 = \frac{(m+n-2mn)e^2}{2mn}.$$

Diese Beziehungen zeigen, dafs wenigstens eine der Gröfsen d, p, R imaginär ist; daher kann die aus dem oben angegebenen Ortsproblem resultierende Kurve nicht durch Schnitt eines Kreisringes mit einer reellen Ebene erhalten werden. Dennoch ist es zweckmäfsig, sie noch als spirische Kurve zu betrachten, so dafs dieser Name allen durch die Gleichungen (3) oder (4) dargestellten Kurven beigelegt wird, auch wenn eine oder mehrere der Konstanten d, R, p rein imaginär sind; in den letzteren Fällen ist die Erzeugungsweise des Perseus auf reellem Gebiete nicht anwendbar, während die von Siebeck immer angewendet werden kann[2]).

---

1) S. die wichtige Abhandlung *Über eine Gattung von Curven vierten Grades, welche mit den elliptischen Funktionen zusammenhängen* (Crelles Journ. LVII, 1860 und LIX, 1861).

2) Die Bezeichnung spirische Linien ist in einem noch weiteren Sinne angewendet worden von La Gournerie (*Mémoires sur les lignes spiriques*, Liouvilles Journ. 2. Ser. XIV, 1869), der mit diesem Namen jede bicirkulare in Bezug auf eine Axe symmetrische Kurve vierter Ordnung bezeichnete. Nehmen wir diese Nomenklatur an, so läfst sich zeigen, dafs, wenn zwei Strecken auf

Die Symmetrie der Gleichung (10) in Bezug auf m und n zeigt, daſs die von ihr dargestellte Kurve auch die durch folgende Gleichung ausgedrückte Eigenschaft besitzt:

$$ns^2 + md^2 = 4e^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8\,\text{II})$$

die aus (8 I) durch Vertauschung jener beiden Zahlen entsteht. Sie hat jedoch noch weitere. Die Gleichung (10) wird nicht geändert, wenn wir bezüglich m, n, e^2 ersetzen durch $1-n,\ 1-m,\ \frac{(1-m)(1-n)}{mn}e^2$; nehmen wir nun auf der Geraden AB zwei Punkte A', B', so daſs $OA' = OB' = e\sqrt{\frac{(1-m)(1-n)}{mn}}$ und setzen

$$PA' + PB' = s', \quad PA' - PB' = d', \quad A'B' = 2e',$$

so entstehen die folgenden, den (8 I) und (8 II) ähnlichen Relationen:

$$(1-n)s'^2 + (1-m)d'^2 = 4e'^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8\,\text{III})$$

$$(1-m)s'^2 + (1-n)d'^2 = 4e'^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8\,\text{IV})$$

Somit haben wir im ganzen vier Arten, eine spirische Kurve nach der Siebeck'schen Methode zu erzeugen. Es giebt jedoch noch vier andere. Setzt man zur Abkürzung

$$L = \left(\frac{1-n}{n} + \frac{1-m}{m}\right)e^2, \quad M = \frac{(1-m)(1-n)}{mn}e^4, \quad N = \frac{(m-n)^2}{mn}e^2, \quad (11)$$

so wird die Gleichung (6) zu

$$(x^2+y^2)^2 - L(x^2+y^2) + M + Nx^2 = 0. \quad . \quad . \quad (10')$$

Schreiben wir sie nun in folgender Weise:

$$(x^2+y^2)^2 - (L-N)(x^2+y^2) + M - Ny^2 = 0,$$

so haben wir eine Gleichung, die aus der vorigen entsteht, durch Wechsel der Variabelen und Vertauschung der Konstanten L und M mit $L - N$ und $-N$. Es giebt daher auf der y-Axe noch zwei andere Punktepaare C, D und C', D' mit dem gemeinsamen Mittelpunkte O, die in Bezug auf die spirische Linie dieselbe Eigenschaft besitzen wie die Paare A, B und A', B'. Der Kürze wegen wollen wir die zu je zweien zusammengehörenden Punkte A, B; A', B'; C, D; C', D' die Stützpunkte der spirischen Linie nennen[1]). Um die Realität derselben zu untersuchen, bemerken wir, daſs durch Elimination der Konstanten m und n aus (7) eine Gleichung erhalten wird, die zu Wurzeln die Abscissen der vier zur x-Axe gehörenden Stützpunkte hat, diese Gleichung ist

$$e^4 + Ce^2 + M = 0, \qquad \text{wo} \quad C = L - \frac{L^2 - 4M}{N}. \quad . \quad (12)$$

---

derselben Geraden gegeben sind, der Ort der Punkte, von denen sie unter zwei Winkeln gesehen werden, deren Summe konstant ist, eine spirische Linie ist. (S. *El progréso matemático* III, 1893, Question 75, S. 187—89.)

1) Siebeck zog den Namen Brennpunkte vor.

Vertauschen wir in dieser L und N bezw. mit $L - N$ und $-N$, so erhalten wir die Gleichung, welche als Wurzeln die Ordinaten der vier anderen Stützpunkte enthält; diese lautet:

$$f^4 - Cf^2 + M = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Eine der Wurzeln e^2 von (12) ist reell und positiv, da sie das Quadrat der halben Strecke AB ist, die von den Punkten A und B begrenzt wird, von denen wir ausgegangen sind; die andere ist daher immer reell, aber positiv oder negativ, jenachdem $M \gtrless 0$. Demnach sind die beiden Stützpunkte A' und B' reell oder konjugiert imaginär, jenachdem $M = \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right) e^4 \gtrless 0$ ist, d. h. jenachdem m und n beide gröfser, oder beide kleiner als 1 sind, oder das eine gröfser und das andere kleiner ist. Da nun (12) in (13) übergeht, wenn man e^2 durch $-f^2$ ersetzt, so entsprechen den beiden reellen Stützpunkten A, B immer zwei konjugiert imaginäre. Was nun die beiden letzten C', D' angeht, so sind diese imaginär oder reell, jenachdem $M \gtrless 0$. Hieraus ergiebt sich, dafs auf Grund der Realität der Stützpunkte alle durch die Gleichung dargestellten Kurven sich in zwei Kategorien scheiden:

Kurven I. Art, $M > 0$; vier reelle Stützpunkte in einer geraden Linie und zwei Paare konjugiert imaginäre auf der anderen.

„ II. „ , $M < 0$; vier reelle Stützpunkte, zwei auf einer Geraden und zwei auf einer anderen; und analog vier imaginäre zu Paaren konjugiert.

Eine dritte Art ist dadurch charakterisiert, dafs $M = 0$, und dafs sie in der Mitte einen Doppelpunkt besitzen.

64. Auf die Kurven, mit denen wir uns hier beschäftigen, trifft man bei geometrischen Fragen, die nicht ohne Wichtigkeit sind. Folgendes Beispiel möge dies zeigen[1]): Gegeben ein centrischer Kegelschnitt Γ

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = 1; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

man betrachte den Ort eines Punktes, so beschaffen, dafs die von ihm an die Kurve Γ gezogenen Tangenten einen gegebenen Winkel μ bilden; dieser wird die isoptische Kurve des gegebenen Kegelschnittes vom Winkel μ genannt. Um deren Gleichung zu finden, beachte man, dafs die an Γ vom Punkte (x', y') gezogenen Tangenten zusammen durch die Gleichung:

$$\alpha\beta(xy' - x'y)^2 - \alpha(x - x')^2 - \beta(y - y')^2 = 0$$

1) S. den zweiten Teil der angeführten Arbeit von Siebeck.

dargestellt werden. Wenn wir daher die einzelnen Tangenten durch

$$y - y' = a'(x - x'), \qquad y - y' = a''(x - x'),$$

darstellen, so wird man haben:

$$a' + a'' = \frac{2\alpha x' y'}{1 - \alpha x'^2}, \qquad a' \cdot a'' = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\beta y'^2 - 1}{\alpha x'^2 - 1}.$$

Ziehen wir nun die im Problem angegebene Bedingung hinzu, so ist

$$\operatorname{tg}^2 \mu = \left(\frac{a' - a''}{1 + a' a''}\right)^2 = \frac{4\alpha\beta(\alpha x'^2 + \beta y'^2 - 1)}{[\alpha + \beta - \alpha\beta(x'^2 + y'^2)]^2}.$$

Schreiben wir statt x', y' jetzt x, y, so ist

$$[\alpha + \beta - \alpha\beta(x^2 + y^2)]^2 \operatorname{tg}^2 \mu - 4\alpha\beta(\alpha x^2 + \beta y^2 - 1) = 0 \quad (15)$$

die gesuchte Gleichung der isoptischen Kurve. Führen wir die angedeutete Quadrierung aus und setzen

$$L = \frac{4}{\alpha \operatorname{tg}^2 \mu} + \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta}; \quad M = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{4}{(\beta - \alpha)\sin^2 \mu}\right);$$

$$N = \frac{4}{\operatorname{tg}^2 \mu}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

so stimmt (15) mit (10′) überein; **die isoptischen Kurven der Kegelschnitte sind also spirische Linien.** Vermöge der Gleichung (12) werden die Stützpunkte von (15), die auf der x-Axe gelegen sind, durch folgende Relationen bestimmt:

$$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = e^2 = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta},$$

$$\overline{OA'}^2 = \overline{OB'}^2 = e'^2 = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{4}{(\beta - \alpha)\sin^2 \mu}; \quad . \; . \; . \quad (17)$$

daher fallen zwei derselben mit den beiden (reellen oder imaginären) auf dieser Axe gelegenen Brennpunkten zusammen. Die Existenz der vier andern Stützpunkte auf der y-Axe von (15) führt zu der Vermutung, dafs dieselbe Kurve auch aufgefafst werden könne als die isoptische Kurve eines anderen Kegelschnittes $\overline{\Gamma}$

$$\bar{\alpha} x^2 + \bar{\beta} y^2 = 1. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

Man findet in der That

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha + \beta}{\beta e'^2}, \quad \bar{\beta} = -\frac{\alpha + \beta}{\alpha e'^2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

und als konstanten Winkel $\bar{\mu}$ einen solchen, dafs

$$\frac{\operatorname{tg} \bar{\mu}}{\operatorname{tg} \mu} = \frac{e'}{e}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

Jede isoptische Kurve eines Kegelschnittes Γ ist auch die isoptische eines anderen $\overline{\Gamma}$. Da nun die Gleichungen (19) ergeben, dafs

$$\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} + \frac{\bar{\beta}}{\beta} = 0,$$

so ist, wenn Γ eine Ellipse, $\bar{\Gamma}$ eine Hyperbel und umgekehrt; überdies sind die gleichnamigen Axen derselben Kurven proportional.

Heben wir schliefslich noch das Auftreten der spirischen Linien in der geometrischen Darstellung der komplexen Variabeln und ihrer Funktionen hervor[1]). Stellen wir in üblicher Weise in zwei Ebenen π und σ die Variabeln $z = x + iy$ und $w = u + iv$ dar und nehmen an, dafs zwischen den Variabeln selbst die Relation bestehe:

$$w = sn\, z \qquad \text{oder} \qquad u + iv = sn\,(x + iy).$$

P sei der Punkt (der Ebene σ) mit den Koordinaten u, v; F und F' seien die Punkte der u-Axe, die vom Anfang den Abstand ± 1 haben. Dann haben wir

$$\overline{PF}^2 = [1 - sn\,(x + iy)]\,[1 - sn\,(x - iy)],$$
$$\overline{PF'}^2 = [1 + sn\,(x + iy)]\,[1 + sn\,(x - iy)],$$

oder auch mit Anwendung bekannter Formeln[1])

$$\overline{PF} = \frac{sn\,x\, dn\,iy - cn\,iy}{\sqrt{1 - k^2\, sn^2 x\, sn^2 iy}}, \qquad \overline{PF'} = \frac{sn\,x\, dn\,iy + cn\,iy}{\sqrt{1 - k^2\, sn^2 x\, sn^2 iy}},$$

und infolgedessen

$$\left.\begin{aligned} s = \overline{PF} + \overline{PF'} &= \frac{2\, sn\,x\, dn\,iy}{\sqrt{1 - k^2\, sn^2 x\, sn^2 iy}}, \\ d = \overline{PF} - \overline{PF'} &= \frac{2\, cn\,iy}{\sqrt{1 - k^2\, sn^2 x\, sn^2 iy}}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (21)$$

Durch Elimination von x aus diesen erhält man

$$\frac{d^2}{cn^2 iy} - \frac{k^2\, sn^2 iy}{dn^2 iy} \cdot s^2 = 4,$$

oder auch
$$cn^2(y, k')\, d^2 - k^2 \frac{sn^2(y, k')}{dn^2(y, k')}\, s^2 = 4. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

Dies ist die Gleichung derjenigen Kurven in der Ebene σ, die den Geraden $y = const.$ der Ebene π entsprechen; wegen der Gleichung (8) sind diese spirische Linien.

Wenn man dagegen y aus (21) eliminiert, so erhält man

$$\frac{dn^2 x}{k'^2\, sn\,x} s^2 - \frac{k^2\, cn^2 x}{k'^2} d^2 = 4, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

welche Gleichung die ∞^1 spirischen Linien der Ebene σ darstellt, die den Geraden $x = const.$ der Ebene π entsprechen. Benutzen wir nun die charakteristische Eigenschaft der isogonalen Transformationen und beachten, dafs die Linien $y = const.$, $x = const.$ in der ersten Ebene π

---

1) Aufser Siebeck siehe auch Holzmüller, *Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der konformen Abbildungen* (Leipzig 1882) S. 256 ff.

ein doppeltes orthogonales System bilden, so können wir folgern, dafs die Gleichungen (22), (23) ein doppeltes orthogonales System von spirischen Linien bilden.

Zu ähnlichen Resultaten führt die Betrachtung von $cn\,z$ und $dn\,z$.

65. Die spirischen Linien mit einem Doppelpunkte, die wir von unserer vorhergehenden Betrachtung mit Absicht fast gänzlich ausgeschlossen haben, wurden neuerdings von einem besonderen Gesichtspunkte aus beobachtet, welchen wir nicht gut übergehen können.

Gegeben zwei Punkte F_1 und F_2 im Abstande $2c$ mit dem Mittelpunkt O, aufserdem eine Konstante f; der Ort der Punkte M so beschaffen, dafs

$$\overline{MF_1}^2 \cdot \overline{MF_2}^2 = c^4 \pm f^2 \cdot \overline{OM}^2$$

ist eine Kurve, die Booth untersucht hat[1]), und der er den Namen Lemniskate gegeben hat; um sie von anderen Kurven, die denselben Namen erhalten haben, zu unterscheiden, nennen wir sie die Lemniskate von Booth. Aus der angegebenen Definition ergiebt sich sogleich, dafs die Kurve folgende Gleichung in kartesischen Koordinaten hat

$$(x^2 + y^2)^2 = (\pm f^2 + 2c^2)x^2 + (\pm f^2 - 2c^2)y^2. \quad . \quad (24)$$

Sie ist daher eine spirische Linie, die in O einen doppelten Inflexionspunkt hat und verschiedene Gestalten darbietet je nach dem Vorzeichen von f^2 und nach der relativen Gröfse der Konstanten f und c, wie wir jetzt ausführen wollen.

I. Wir geben f das Vorzeichen $+$; dann wird, wenn $f > c\sqrt{2}$, und $f^2 + 2c^2 = a^2$, $f^2 - 2c^2 = b^2$ gesetzt wird, die Gleichung (24) zu

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2, \qquad \text{wo } a^2 > b^2 \quad . \quad . \quad . \quad (24\text{I})$$

und stellt dann eine elliptische Lemniskate von Booth dar. Wenn aber $f = c\sqrt{2}$, so stellt (24) die beiden Kreise $x^2 + y^2 \pm 2c = 0$ dar. Wenn endlich $f < c\sqrt{2}$, so geht, wenn man $f^2 + 2c^2 = a^2$, $2c^2 - f^2 = b^2$ setzt, (24) über in

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2, \qquad \text{wo } a^2 < b^2 \quad . \quad . \quad (24\text{II})$$

und diese gehört einer hyperbolischen Lemniskate von Booth an[2]). II. Im Falle $f = 0$, wird (24) zu $(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2)$ und wir werden (in Nr. **93**) sehen, dafs sie eine Bernoullische Lemniskate darstellt. III. Geben wir schliefslich dem f das $-$Vorzeichen, so müssen wir, um eine reelle Kurve zu erhalten, annehmen, dafs $2c^2 > f^2$, setzen wir zufolge dessen $2c^2 - f^2 = a^2$ und $2c^2 + f^2 = b^2$, so wird (24) zu

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2, \qquad \text{wo } a^2 > b^2, \quad . \quad . \quad . \quad (24\text{III})$$

---

1) *A treatise on some new geometrical methods* I (London 1877) S. 162 ff.

2) Neuberg zog den Namen Lemniskatoide vor (*Sur quelques systèmes de tiges articulées,* Lüttich 1886, S. 36).

die auch eine hyperbolische Lemniskate darstellt. Überhaupt kann Gleichung (24) immer auf eine der Formen $(x^2+y^2)^2 = a^2x^2 \pm b^2y^2$ gebracht werden; diesen entsprechen folgende Polargleichungen

$$\varrho^2 = a^2 \cos^2 \omega \pm b^2 \sin^2 \omega\,,^{1)} \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

und diese zeigen, dafs die fraglichen Kurven auch erhalten werden durch eine Transformation vermittelst reziproker Radien mit dem Centrum O und der Potenz k^2 aus Kegelschnitten, deren Gleichung $a^2x^2 \pm b^2y^2 = k^4$. Es ist dann leicht einzusehen (und wir werden dies später beweisen), dafs jene auch die Fufspunktkurven von Ellipsen oder Hyperbeln in Bezug auf den Mittelpunkt sind. Für die wirkliche Zeichnung der hier betrachteten Kurven erweist sich jedoch nützlicher ein Verfahren, welches aus folgendem Satze hervorgeht: „Gegeben ein Kreis (Taf. III, Fig. 26, *a, b, c*) mit dem Centrum C und dem Radius R und ein Punkt seiner Ebene O im Abstande d von C; auf jeder durch O gezogenen Geraden trage man eine Strecke OP gleich der auf dieser Geraden vom gegebenen Kreise ausgeschnittenen Sehne MN ab; der Ort des Punktes P ist eine Lemniskate von Booth, elliptisch oder hyperbolisch, jenachdem O innerhalb oder aufserhalb des Kreises liegt.“ Daraus ergiebt sich, dafs $\varrho = R\sqrt{R^2 - d^2 \sin^2 \omega}$ die Polargleichung und $(x^2+y^2)^2 = 4[R^2x^2 + (r^2 - d^2)y^2]$ die kartesische Gleichung des Ortes von P ist. Im Spezialfalle $d = R\sqrt{2}$ (Fig. *b*) ist die resultierende Kurve eine Bernoullische Lemniskate und die angegebene Konstruktion geht auf eine andere zurück, die man Maclaurin zuschreibt[2]).

Beachtet man ferner noch, dafs die Gleichungen (24 I, II, III) auch durch Elimination von z aus den beiden Gleichungen

$$a^2x^2 \pm b^2y^2 = k^2z^2, \qquad x^2 + y^2 = kz$$

erhalten werden, so wird man mit Booth schliefsen, **dafs die behandelten Kurven auch als orthogonale Projektionen der Schnittlinien eines Paraboloids mit einem Rotationskegel mit gemeinsamer Axe und Scheitel betrachtet werden können, wenn die Projektionen auf eine zu dieser Axe senkrechte Ebene geschieht.** Vergleicht man schliefslich die Gleichungen (24 I, II, III) mit (4), so sieht man: **Die elliptische Lemniskate erhält man aus der sich durchschneidenden Spire, die durch Rotation eines Kreises mit dem Radius** $\frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - b^2}}$

1) Diese Gleichung zeigt, dafs die Booth'schen Lemniskaten zur Klasse der von Tortolini in dem Artikel *Alcune proprietà delle curve algebriche rappresentate dall' equatione polare* $r^{2n} = A \cos^n \Theta + B \sin^n \Theta$ untersuchten Kurven gehören (Annali di Mat. VI, 1864).

2) Vgl. Aubry, Journ. de math. spéc. 4. Ser. V, 1896, S. 155.

um eine Axe entstanden ist, die von seinem Mittelpunkte die Entfernung $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}$ hat, wenn man sie mit einer Ebene schneidet, die von der Rotationsaxe die Entfernung $\frac{b^2}{2\sqrt{a^2-b^2}}$ hat. Die hyperbolischen Lemniskaten (24 II, III) hingegen kann man aus der offenen Spire ableiten, die durch Rotation eines Kreises mit dem Radius $\frac{a^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}$ um eine Axe, die von seinem Mittelpunkte die Entfernung $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ hat, wenn man sie mit einer Ebene schneidet, die von der Rotationsaxe die Entfernung $\frac{b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}$ hat.

Die Rektifikation der Lemniskate von Booth hängt ab von elliptischen Integralen erster und dritter Gattung. Man kann wohl sagen, dafs sie eben wegen dieser Eigentümlichkeit sowohl die Aufmerksamkeit des genannten englischen Geometers, als auch die von B. Tortolini auf sich gezogen hat[1]), der unabhängig von jenem die hyperbolische Lemniskate untersuchte und die Halbierung und die Dreiteilung eines Quadranten derselben ausführte und zeigte, dafs es auf derselben Paare von Bogen giebt, deren Differenz gleich einem Kreisbogen ist.

Fünftes Kapitel.

Die Konchoide des Nikomedes.

66. Ungefähr ein Zeitgenosse des Erfinders der spirischen Linien ist Nikomedes, ein Geometer, der wenig bekannt ist und zwischen 250 und 150 v. Chr. gelebt haben soll. Ihm verdankt man die Idee, die Untersuchung und zwei wichtige Anwendungen (auf die Würfelverdoppelung und die Dreiteilung des Winkels) einer interessanten Kurve vierter Ordnung, Konchoide oder Kochloide (von κόγκη, Muschel) oder Muschellinie genannt, wegen der Gestalt, die sie zeigt[2]). Ihre Definition ist folgende: „Gegeben ein fester Punkt O, der Pol, eine feste Gerade r, die Basis und eine Strecke l, das Zwischenstück; man ziehe einen beliebigen Strahl durch O, der r in M schneidet

---

1) S. zwei Aufsätze im *Giornale arcadico*, 1844, und *Rivista scientifica* 1845, zusammengefafst und erweitert in der Abhandlung *Sulla divisione degli archi di una curva di quart' ordine rappresentata dall' equatione* $(x^2+y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2$. (Mem. della Soc. Ital. delle Scienze, 2. Serie I, 1862).

2) Die hauptsächlichsten Stellen bei den alten Schriftstellern über die Konchoide finden sich gesammelt in dem schon citierten Buche des Verfassers, *Le scienze esatte nell antica Grecia*, II. Buch, Nr. 71—72.

(s. Taf. IV, Fig. 27, *a*, *b*, *c*), von M aus trage man auf ihm $MP = l$ in der Richtung OM ab; der Ort aller Punkte P ist jene Kurve, welche die Alten erste Konchoide nannten, die Roberval conchoide de dessus nannte[1]), und die im *Dictionnaire des sciences mathématiques* von Montferrier mit dem Namen conchoide citérieure bezeichnet ist[2])." Wenn man dagegen die Strecke $MP = l$ nach der anderen Seite hin abträgt, so wird eine andere Kurve erzeugt, die wahrscheinlich von den Alten auch betrachtet ist, der Roberval und Montferier bezüglich die Namen conchoide de dessous oder conchoide ultérieure gaben. Die beiden eben definierten Kurven bilden nach unserer Anschauung eine einzige Kurve. Nehmen wir O als Pol, die von O auf r gefällte Senkrechte, deren Länge $= a$ sein möge, als Polaraxe, so wird eine solche Kurve in Polarkoordinaten dargestellt durch die Gleichung (s. Note I am Ende des Buches)

$$\varrho = \frac{a}{\cos\omega} + l. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Gehen wir zu kartesischen Koordinaten über, so wird sie

$$(x-a)^2(x^2+y^2) - lx^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die Konchoide der Nikomedes ist demnach eine Kurve vierter Ordnung, die durch die cyklischen Punkte der Ebene geht; im Unendlichen besitzt sie einen Berührungsknoten (Selbstberührungspunkt) mit der Geraden r als zugehöriger Tangente; damit ist bewiesen, dafs die Konchoide sich ihrer Basis asymptotisch nähert, was schon die Alten hervorgehoben hatten. Der Pol ist immer ein Doppelpunkt der Kurve, und genauer gesagt, ein Knoten, eine Spitze oder isolierter Punkt, jenachdem $l \gtreqless a$; daraus geht hervor, dafs der zweite Zweig der Kurve drei verschiedene Formen annehmen kann, die wahrscheinlich den Namen zweite, dritte und vierte Konchoide entsprechen, die Pappus erwähnt, ohne deren Bedeutung zu erklären.

Die grofse Berühmtheit der Konchoide bewirkte, dafs man auf sie alle Methoden, Tangenten und Normalen von Kurven zu konstruieren anwandte, die zugleich mit der analytischen Geometrie erfunden wurden. Unter diesen wollen wir vor allen die von Descartes erwähnen[3]), ohne uns mit deren Wiedergabe aufzuhalten, da sie der folgenden, die sich auf die Betrachtung der Polar-Subnormale $\frac{d\varrho}{d\omega}$ stützt, weit nachsteht. Aus Gleichung (1) ergiebt sich nämlich folgende

$$\frac{d\varrho}{d\omega} = a\frac{\sin\omega}{\cos^2\omega};$$

sie zeigt, dafs wenn man in O die Senkrechte zu OP errichtet und

1) S. die früher citierten *Observations*.

2) Bd. I, Brüssel 1838, S. 353.

3) *La géometrie*, nouvelle édition (Paris 1886) S. 41.

in M die Senkrechte auf r, diese sich in einem Punkte N schneiden, derart, dafs durch N die Normalen an die Konchoide in den zwei Punkten gehen, die dem Radius vector OM angehören; es ist also nichts leichter als diese Normalen und demnach die zugehörigen Tangenten zu konstruieren. Überdies wurde die Aufsuchung der Tangenten an die Konchoide von Fermat dem Roberval aufgegeben in einem Briefe vom 22. Sept. 1636[1]); Roberval antwortete am 11. Oktober desselben Jahres, teilte mit, dafs er sich schon mit derartigen Fragen beschäftigt habe, die er mit biquadratischen Gleichungen verknüpfte und bezeichnete zwei Punkte (die Wendepunkte?) „par lesquelles on ne peut mener des tangentes"[2]). Diese Bemerkung erregte nicht mit Unrecht die Verwunderung Fermats, der am 4. Nov. 1636 erwiderte: „j'ai peur que vous aurez équivoqué"[3]) und setzte dann die von ihm erdachte Konstruktion der Tangente auseinander; es ist dieselbe, die man im Anhange seines berühmten *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* findet[4]). Es ist wohl zu beachten, dafs Fermat sich daselbst ausschliefslich mit der ersten Konchoide beschäftigte — er bemerkt daselbst, Pappus und Eutokius (oder deren Herausgeber?) hätten die Kurve irrtümlicherweise konvex gegen den Pol dargestellt[5]) —; aber auf eine der anderen weist er hin in dem Briefe an Roberval vom 16. Dezember 1636, in welchem die Frage vorgelegt wird: „trouver une tangente à un point donné en la seconde conchoide de Nicomède"[6]). In welcher Weise Roberval diese gelöst hat, ersieht man aus den §§ IV und V seiner *Observations sur la composition des mouvements et sur les touchantes des lignes courbes*[7]), wo die kinematische Methode, die seinen Namen trägt, sowohl auf die obere als auch die untere Konchoide angewendet wird; der Kürze wegen begnügen wir uns damit, auf diese Anwendung hinzuweisen.

67. Holen wir die Gleichung (1) hervor, so können wir daraus ableiten:

$$x = a + l \cdot \cos\omega, \qquad y = a \cdot \operatorname{tg}\omega + l \cdot \sin\omega. \quad . \quad . \quad (3)$$

Diese Gleichungen zeigen, dafs, wenn die drei Punkte $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ der Konchoide in gerader Linie liegen sollen, man haben mufs:

$$\begin{vmatrix} a + l\cos\alpha & a\operatorname{tg}\alpha + l\sin\alpha & 1 \\ a + l\cos\beta & a\operatorname{tg}\beta + l\sin\beta & 1 \\ a + l\cos\gamma & a\operatorname{tg}\gamma + l\sin\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & a\operatorname{tg}\alpha + l\sin\alpha & 1 \\ \cos\beta & a\operatorname{tg}\beta + l\sin\beta & 1 \\ \cos\gamma & a\operatorname{tg}\gamma + l\sin\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$$

---

1) *Oeuvres de Fermat* II (Paris 1894) S. 72. 2) Das. S. 82. 3) Das. S. 86.
4) *Oeuvres de Fermat* I. (Paris 1891) S. 160 und III. (Paris 1896) S. 142.
5) *Oeuvres de Fermat*, Bd. II, S. 87. 6) Das. S. 94.
7) *Mémoires de l'Académie des sciences* VI (Paris 1730).

$$\text{oder auch} \quad a\begin{vmatrix} \cos\alpha & \operatorname{tg}\alpha & 1 \\ \cos\beta & \operatorname{tg}\beta & 1 \\ \cos\gamma & \operatorname{tg}\gamma & 1 \end{vmatrix} + l\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 1 \\ \cos\beta & \sin\beta & 1 \\ \cos\gamma & \sin\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinanten haben nun bezw. die Werte[1]):

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\cdot\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\cdot\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}\left\{\cos(\beta+\gamma)+\cos(\gamma+\alpha)+\cos(\alpha+\beta)-1\right\},$$

$$4\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\cdot\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)\cdot\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),$$

daher wird die vorhergehende Gleichung, befreit von dem nicht verschwindenden Faktor $2\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\cdot\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\cdot\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$, lauten:

$$a[\cos(\beta+\gamma)+\cos(\gamma+\alpha)+\cos(\alpha+\beta)-1] + 2l\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma = 0. \qquad (4)$$

Setzen wir hierin $\alpha = \beta = \gamma = \lambda$, so erhält man

$$a(3\cos 2\lambda - 1) + 2l\cos^3\lambda = 0,$$

oder auch

$$l\cos^3\lambda + 3a\cos^2\lambda - 2a = 0. \qquad (5)$$

Setzen wir $\cos\lambda = \frac{1}{u}$, so wird diese $2au^3 - 3au - l = 0$; demnach hat diese Gleichung: I. für $a > l$ drei reelle Wurzeln, aber eine ist davon auszuschliefsen, da sie nicht zwischen -1 und $+1$ liegen darf; II. für $a < l$ nur eine reelle Wurzel. Demnach hat die Konchoide mit Knotenpunkt zwei reelle Wendepunkte, die mit isoliertem Punkte vier, und die mit Spitze nur noch zwei. Eine geometrische Konstruktion der Wendepunkte, jedoch ohne Beweis, wurde von Huygens in dem Briefe, den er am 23. Okt. 1653 an Fr. van Schooten schrieb, gegeben[2]) und veröffentlicht im zweiten Bande von *Chr. Hugenii Opera varia* (Lugduni Batav. 1724); sie ist so elegant, dafs es sich der Mühe lohnt sie darzulegen.

Bezeichnen wir mit x die Abscisse eines Wendepunktes, so haben wir wegen der zweiten von den Gleichungen (3), $\cos\lambda = \frac{x-a}{l}$ und daher wird Gleichung (5)

$$x^3 - 3a^2x + 2a(a^2 - l^2) = 0. \qquad (6)$$

Diese Gleichung bezeugt, dafs die Bestimmung der Wendepunkte der Konchoide im allgemeinen ein Problem dritten Grades ist[3]); wenn jedoch $l^2 = 2a^2$, so wird die vorige Gleichung

$$(x+a)(x^2 - ax - 2a^2) = 0,$$

---

1) Für die Berechnung dieser sowie ähnlicher Determinanten siehe eine Note von G. Loria, *Sopra una classe notevole di alternanti d'ordine qualsivoglia (Prager Ber. 1897).*

2) *Oeuvres de Huygens* I (Hag 1888) S. 245—46.

3) Vgl. auch die *Analyse des infiniment petits par le* Marquis de l'Hôpital (Paris 1696).

und also wird in diesem Falle — wie Huygens selbst bemerkte — die Aufgabe eine quadratische. Um den allgemeinen Fall graphisch zu lösen, wenden wir die von Descartes zur Lösung jeder Gleichung von der Form:

$$x^3 = \alpha x + \beta$$

angegebene Methode an[1]). Wir setzen daher

$$\alpha = mp, \quad \beta = m^2 q, \quad x^2 = my;$$

die vorige Gleichung wird dann

$$x^2 + y^2 = qx + (p + m)y.$$

Somit sind die Abscissen der Wendepunkte, die Abscissen der Punkte, in welchen der von dieser Gleichung dargestellte Kreis von der Parabel $y^2 = mx$ geschnitten wird. Um dies Verfahren auf Gleichung (6) anzuwenden, setzen wir

$$3a^2 = mp, \quad 2a(l^2 - a^2) = m^2 q \quad \text{oder} \quad p = \frac{3a^3}{m}, \quad q = \frac{2a(l^2 - a^2)}{m^2}.$$

Setzen wir aufserdem der Einfachheit halber $m = -a$, so werden wir folgende Gleichungen für die beiden Hilfskurven erhalten:

$$x^2 + ay = 0, \quad \left(x - \frac{a^2 - l^2}{a}\right)^2 + \left(y + 2a\right)^2 = \left(a - \frac{l^2}{a}\right)^2 + 4a^2,$$

oder, wenn wir $y + 2a = y'$ setzen und dann die Strichel weglassen:

$$x^2 + ay = 2a^2, \quad \left[x - \left(a - \frac{l^2}{a}\right)\right]^2 + y^2 = \left(a - \frac{l^2}{a}\right)^2 + 4a^2.$$

Die so dargestellten Kurven können geometrisch ohne Schwierigkeit definiert werden. Es sei nämlich R der Fufspunkt des vom Pole O auf die Basis r gefällten Lotes; man trage auf der durch O zu r gezogenen Parallelen $OV = 2a$ ab. Nun ist die erste jener Kurven eine Parabel, die V zum Scheitel, a zum Parameter und jene Parallele zur Axe hat, und die konkav gegen den Pol hin ist. Die zweite ist dagegen ein Kreis, der zum Mittelpunkte jenen Punkt C des vom Pole auf die Basis gefällten Lotes hat, der von jenem die Entfernung $\left|a - \frac{l^2}{a}\right|$ hat, und durch den Punkt V geht. Da nun diese Definition der Hilfskurven im wesentlichen mit der von Huygens gegebenen identisch ist, so hat man guten Grund anzunehmen, dafs dieser zur Konstruktion seiner Wendepunkte gelangte, indem er die Methode des Cartesius, deren wir uns bedient haben, anwandte.

68. Demselben Huygens verdankt man auch die Bemerkung, dafs die von der ersten Konchoide und ihrer Basis begrenzte Fläche unendlich grofs ist[2]); ausgedrückt wird diese nämlich durch das Integral

1) S. z. B. Matthiesen, *Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen* (Leipzig 1878) S. 948.

2) S. die beiden an Schooten gerichteten Briefe v. 6. Sept. 1658 und 1. Jan. 1659, veröffentlicht im II. B. S. 212 u. 298—99 der *Oeuvres de Huygens.*

$$\frac{1}{2}\int\left[\left(\frac{a}{\cos\omega}+l\right)^2-\frac{a^2}{\cos^2\omega}\right]\cdot d\omega,$$

genommen zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$. Da nun der Wert dieses Integrales $= al\cdot\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\omega}{2}\right)+l^2\omega$, so nimmt es für jene Grenzen den Wert an $al(\log\infty-\log o)+\pi l^2$, und ist deswegen ∞. Das zwischen dem vom Pole auf die Basis gefällten Lote, einem Radius vector und den beiden entsprechenden Konchoidenbögen gelegene Flächenstück ist

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^\omega\left[\left(\frac{a}{\cos\omega}+l\right)^2-\left(\frac{a}{\cos\omega}-l\right)^2\right]d\omega=2al\int\limits_0^\omega\frac{d\omega}{\cos\omega}$$

$$=2al\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\omega}{2}\right)=2al\log\operatorname{tg}\frac{1+\cos\omega}{\sin\omega},$$

ein von Côtes erhaltenes Resultat[1]). Dieser hat aufserdem das Volumen berechnet, das diese Fläche durch Rotation um das genannte Lot erzeugt.

Die Fragen betreffend die Quadratur der Konchoide können auch vermittelst kartesischer Koordinaten behandelt werden. Gleichung (2) liefert nämlich

$$\int y\cdot dx=\int\frac{x}{x-a}\sqrt{(l-a+x)(l+a-x)}\,dx;$$

nehmen wir nun eine neue Variable t, die durch die Gleichung $t^2=\frac{l+a-x}{l-a+x}$ definiert ist, so wird das Integral rational, und man gelangt mit Joh. Bernoulli zu dem Schlusse: „erit itaque spatium conchoidale aequale spatio hyperbolico rectilineo et circulari"[2]).

Besonders wichtiger geometrischer Eigenschaften erfreut sich die Konchoide nicht, aber die Leichtigkeit, mit der man sie vermittelst eines einfachen Instrumentes zeichnen kann, bewirkt, dafs man sie in der Praxis nützlich verwenden kann; als Beispiel führen wir ihre Anwendung in der Architektur an bei der Zeichnung der Säulenschäfte[3]). Aufserdem kann sie zur Lösung der Probleme der Würfelverdoppelung und der Dreiteilung des Winkels dienen, und da man auf das eine oder andere dieser Probleme jede Aufgabe dritten oder vierten Grades zurückführen kann, so schlug Newton vor, sie zugleich mit der Geraden und dem Kreise (s. Nr. **3** und **5**) unter die Linien zu rechnen, deren Anwendung dem Geometer bei jeder Gelegenheit gestattet sein solle[4]).

---

1) *Harmonia mensurarum* (Cambridge 1722) S. 125.

2) S. die dritte der *Lectiones mathematicae* (Joh. Bernoulli Opera III, S. 400—401).

3) Poppe, *Ausführliche Geschichte der Anwendungen aller krummen Linien* u. s. w. (Nürnberg 1802) S. 209.

4) *Arithmétique universelle,* übers. v. Beaudeux II (Paris 1802) S. 52.

Sechstes Kapitel.

Verallgemeinerungen der Konchoide, insbesondere die Konchoide mit der Kreisbasis.

69. Der Begriff der Konchoide, wie er von Nikomedes aufgestellt wurde, bietet sich verschiedenen Verallgemeinerungen dar. Eine der allerneuesten ist folgende: „Gegeben ein Winkel mit dem Scheitel O und der Gröfse 2α und ein fester Punkt A seiner Ebene, sei C der Mittelpunkt eines der Kreise, die beide Schenkel des Winkels berühren, und M der Endpunkt eines durch A gehenden Durchmessers, dann ist der Ort der Punkte M die betreffende Kurve. Wenn O im Unendlichen liegt, wird sie eine Konchoide des Nikomedes mit A als Pol und der Mittellinie des Streifens (der die Stelle des Winkels im allgemeinen Falle einnimmt) als Basis und mit der halben Breite desselben als Zwischenstück."

Nehmen wir im allgemeinen Falle die Halbierungslinien des gegegebenen Winkels als Axen, so findet man leicht als Gleichung des Ortes (wenn x_0 und y_0 die Koordinaten von A sind)

$$y^2[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]=\sin^2\alpha\,(xy_0-x_0y)^2. \quad . \quad . \quad (1)$$

Dieser ist also eine Kurve vierter Ordnung, die noch eine andere Erzeugungsart besitzt, die ein bemerkenswerter Umstand klar legen wird: Es sei nämlich ein Kreis gegeben, mit dem Centrum C und dem Radius r, und zwei Punkte A und O seiner Ebene; man verbinde einen beliebigen Punkt P des Kreises mit C und O, dann wird die Gerade OP von der durch A zum Radius CP gezogenen Parallelen in einem Punkte M geschnitten; um nun die Gleichung des Ortes der Punkte M zu finden, nehme man O zum Anfangspunkt und OC zur x-Axe, bezeichne mit a den Abstand OC und mit x_0, y_0 die Koordinaten von A, so wird man folgende Beziehung zwischen den Koordinaten x und y von M erhalten:

$$y^2[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]=\left(\frac{r}{a}\right)^2(y_0x-x_0y)^2, \quad . \quad . \quad (2)$$

welche dieselbe Form hat wie Gleichung (1) und mit ihr identifiziert werden kann, allemal wenn der Punkt O nicht innerhalb des gegebenen Kreises liegt. Im Grenzfalle, wenn $r=a$, scheidet sich aus (2) der Faktor $y-y_0$ ab; nach Hebung desselben bleibt:

$$y(x^2+y^2)+x_0x^2-2x_0xy-y_0y^2=0,$$

die Gleichung einer Strophoide (s. Nr. **37**), woraus sich ergiebt, dafs die Kurve, um die es sich hier handelt, auch als Verallgemeinerung dieser Linie angesehen werden kann.

---

1) S. Jerabek, *Sur une quartique* (Mathésis 2. Ser. IX, 1899).

Natürlicher und älter, weitergehend und wichtiger sind die Erweiterungen des Begriffes der Konchoide, die von der Basis ausgehen, indem man diese statt geradlinig sich beliebig denkt. Eine derartige Verallgemeinerung bietet sich so sehr von selbst dar, dafs wir glauben, von der Wahrheit nicht zu weit entfernt zu sein mit der Annahme, dafs sie auch den Alten bekannt gewesen, wenigstens in dem Falle, dafs die Basis ein Kreis ist und den Pol enthält[1]); in ihrer ganzen Ausdehnung findet sie sich in den schon citierten *Observations sur la composition des mouvements* von Roberval[2]) und dann in der ausgezeichneten Abhandlung von De la Hire, die behandelt *Des conchoides en général* (Mém. de l'Académie des Sciences MDCVIII, Paris 1730). Auf diese Verallgemeinerung haben sich die Geometer jedoch nicht beschränkt. G. de Longchamps[3]) betrachtete nämlich die auf folgende Weise erzeugten Kurven: „Gegeben in einer Ebene drei Kurven $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$; man ziehe die Tangente t in einem beliebigen Punkte M der erstern und bestimme die Schnitte M_1 und M_2 mit den beiden anderen, auf t trage man dann die Strecke $MP = M_1 M_2$ ab; der Ort des Punktes P ist eine konchoidale Kurve.“ Bemerkenswert sind die Fälle, in denen Γ sich auf einen Punkt O reduziert[4]), ebenso der, in welchem überdies Γ_1 ein Kreis, mit dem Centrum O ist[5]); zulässig ist auch die Annahme, dafs Γ_1 und Γ_2 zusammenfallen[6]). Bemerkenswert ist ferner die Thatsache, dafs eine grofse Zahl von Kurven (wie die Cissoide, die Strophoide und die Bernoulli'sche Lemniskate) sich wiederfinden unter der Gruppe der konchoidalen Kurven.

Wir begnügen uns mit diesem Hinweis auf die konchoidalen Kurven und kehren zu den Konchoiden mit beliebiger Basis zurück, um vor allem den Satz zu beweisen, dafs, wenn man die Normale der Basis zu konstruieren weifs, es leicht ist, die der Konchoide zu konstruieren[7]). Ist nämlich $\varrho = f(\omega)$ die Polargleichung der Basis (vorausgesetzt, dafs man den festen Punkt als Pol nimmt) und l das Zwischenstück, so wird $\varrho = f(\omega) \pm l$ die entsprechende Gleichung

---

1) M. Curtze, *Reliquiae Copernicanae* (Zeitschr. f. M. XX, 1875).

2) *Mém. de l'Acad. Royale des Sciences* VI. (Paris 1730) S. 32.

3) *Sur les conchoidales* (Nouv. Corr. mathém. V, 1879).

4) Schontjes, *Sur une mode de génération des conchoïdes* (Mathésis IV, 1884).

5) Wickersheimer, *Sur les conchoïdes* (Journ. de math. spéc. 4. Ser. V, 1896). Zu dieser Klasse von Kurven gehörten auch die von E. N. Barisien im ersten Teile des Artikels *Sur deux courbes généralisation du limaçon de Pascal* betrachtete Kurve 6. Grades (Bullet. de math. spéc. V, 1898—99).

6) Wenn Γ sich auf einen Punkt reduziert und Γ_1 und Γ_2 in einen Kreis zusammenfallen, so ist (wie wir Nr. 29 und 65 sahen) die Konchoide eine Lemniskate von Booth.

7) *L. Euleri Opera posthuma mathematica et physica* I. (Petersburg 1862) S. 370—71.

der Konchoide sein; da nun im allgemeinen $\frac{d\varrho}{d\omega}$ der Ausdruck für die polare Subnormale ist, so wird im vorliegenden Falle $f'(\omega)$ die Länge der polaren Subnormalen in entsprechenden Punkten der Basis und der Konchoide sein. Nehmen wir also einen Punkt der Basis M und bezeichnen die entsprechenden Punkte der Konchoide mit $P_1 P_2$, so werden, wenn N der Schnittpunkt der Normalen in M mit der in O zum Radius vector OM errichteten Senkrechten ist, NP_1 und NP_2 die Normalen zur Konchoide in P_1 und P_2 sein. Ist die Basis geradlinig, so erhält man die in Nr. **66** angegebene Methode wieder; wenn sie ein Kreis ist, erhält man eine nicht weniger elegante Konstruktion, deren Ausdruck in Worten mit Hilfe der Figuren 28 a, b, c (Taf. IV) wir dem Leser überlassen wollen.

Die Berechnung der Fläche liefert Resultate, die nicht weniger interessant sind[1]). Bezeichnen wir mit A die vom Radius vector $\varrho + l$ beschriebene Fläche eines Konchoidenzweiges, so haben wir:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\Omega} (\varrho + l)^2 d\omega = \frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\Omega} \varrho^2 d\omega + l\int_{\omega_0}^{\Omega} \varrho\, d\omega + \frac{l^2}{2}(\Omega - \omega_0).$$

Das erste Integral mifst die vom Radius vector der Basis beschriebene Fläche, kann also als bekannt angesehen werden; die Berechnung von A ist also zurückgeführt auf die Auswertung des Integrals $\int \varrho \cdot d\omega$. Wenn dies bekannt ist, findet man auch alsbald die vom Radius vector $\varrho - l$ des anderen Zweiges beschriebene Fläche.

70. Nach der Konchoide mit geradliniger Basis bietet sich uns zunächst die mit Kreis als Basis dar[2]). Setzen wir aufserdem noch voraus, dafs der Pol auf der Basis liege, so erhalten wir eine Kurve, die Roberval in seinen schon oft citierten *Observations* betrachtet hat[3]), wo er sie „limaçon de M. P.“ nennt, einige Eigenschaften derselben darlegt und ihre Entdeckung Pascal zuschreibt. Daher pflegt man sie als Pascal'sche Schnecke zu bezeichnen[4]). Aus der Definition ergiebt sich ein neuer Gesichtspunkt, von dem aus man sie betrachten

---

1) G. Peano, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (Turin 1887) S. 201.

2) Des weiteren bieten sich solche mit Kegelschnitt als Basis dar; den Fall, dafs dieser eine Parabel ist, hat De la Hire in der erwähnten Abhandlung behandelt, den der Ellipse oder Hyperbel Réaumur in der Schrift betitelt *Manière générale de trouver une infinité des courbes nouvelles en faisant parcourir une ligne quelconque donnée par une extremité d'une ligne droite donnée aussi et toujours placé sur un même point* (Mém. de l'Acad. des Sciences, Paris 1708).

3) A. a. O. S. 35.

4) Wir bemerken mit P. Tannery (vgl. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* II. B. 2. Aufl. Leipzig 1900. S. 882), dafs der Pascal, um den es sich hier handelt, unzweifelhaft Stephan ist, Vater des Blaise P.

kann. Es sei (Taf. IV, Fig. 28, *a*, *b*, *c*) C der Mittelpunkt des Basiskreises der Konchoide, O der Pol und A der andere Endpunkt des Durchmessers OC. Man ziehe durch O eine beliebige Sehne OM der Basis, mache $MP_1 = MP_2 = l$; dann werden P_1 und P_2 Punkte der Schnecke sein. Beschreibt man nun einen Kreis um A als Mittelpunkt mit dem Radius l und zieht den Durchmesser N_1N_2 parallel zu OM, so wird die Figur $N_1N_2P_1P_2$ ein Rechteck sein und P_1N_1 sowie P_2N_2 zwei Tangenten des Kreises; also gehören die Punkte P_1 und P_2 der Fufspunktkurve des Kreises um A mit dem Radius l an, in Bezug auf den Punkt O. **Folglich ist die Pascal'sche Schnecke die Fufspunktkurve eines Kreises in Bezug auf einen beliebigen Punkt seiner Ebene**[1]. Weiter, ist S ein Punkt des Raumes, dessen Orthogonalprojektion O ist, so sind nach einem elementaren stereometrischen Satze auch die Geraden SP_1 und SP_2 senkrecht zu den Tangenten in N_1 und N_2 an jenen Kreis; dies zeigt uns — wie auch Roberval bemerkte[2], dafs in dem letzten Satze die Worte „seiner Ebene“ gestrichen werden können.

Nehmen wir, wie üblich, ein Polar-Koordinatensystem mit O als Pol, OC als Polaraxe, so ist, wenn a der Radius der Basis ist (siehe Note I am Ende des Buches)

$$\varrho = 2a\cos\omega + l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

die Polargleichung, und daher

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = l^2(x^2 + y^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

die kartesische Gleichung der Schnecke. Sie ist also eine Kurve vierter Ordnung, von der die cyklischen Punkte Spitzen sind; die entsprechenden Tangenten haben die Gleichungen $x \pm iy = a$; der Mittelpunkt der Basis ist folglich ein singulärer vielfacher Brennpunkt der Kurve. Ferner ist O ein Doppelpunkt; da die bezüglichen Tangenten die Gleichung $\sqrt{4a^2 - l^2}x \pm ly = 0$ haben, so ist O ein Knoten oder isolierter Punkt, jenachdem $l \lesseqgtr 2a$ ist; mit dem Zwischenfalle $l = 2a$, in welchem O eine Spitze ist, werden wir uns im folgenden Kapitel beschäftigen. Hier bemerken wir noch, dafs, weil die Pascal'sche Schnecke eine Kurve vierter Ordnung mit zwei Spitzen und einem Doppelpunkt ist, sie von der vierten Klasse ist und eine Doppeltangente und zwei Wendepunkte besitzt; sie ist also eine rationale, zu sich selbst korrelative Kurve.

Die Gleichung (4) zeigt, dafs die Doppeltangente der Schnecke die Gleichung hat: $x + \frac{l^2}{8a} = 0$, und dafs die Koordinaten der zu-

---

1) Von diesem Gesichtspunkte aus sind die Pascal'schen Schnecken in einer Abhandlung von O. Richter betrachtet worden, *Über Kreisfufspunktkurven* (Zeitschrift XXXIV, 1892).

2) A. a. O. S. 38—39.

gehörigen Berührungspunkte sind $y = \frac{\pm l\sqrt{16a^2 - l^2}}{8a}$; die Berührungspunkte sind demnach reell oder imaginär, jenachdem $l \lesseqgtr 4a$; insbesondere erkennt man, dafs sie sicher reell sind, wenn die Kurve einen Doppelpunkt hat.

Um die Wendepunkte zu bestimmen, entnehmen wir aus (3)

$$x = 2a\cos^2\omega + l\cos\omega, \qquad y = 2a\cos\omega\cdot\sin\omega + l\sin\omega \quad (5)$$

oder auch

$$x = a + a\cos 2\omega + l\cos\omega, \quad y = a\sin 2\omega + l\sin\omega \quad . \quad . \quad (5')$$

Danach ist die Bedingung für die Kollinearität der drei Punkte $(\alpha), (\beta), (\gamma)$

$$\begin{vmatrix} a + a\cos 2\alpha + l\cos\alpha & a\sin 2\alpha + l\sin\alpha & 1 \\ a + a\cos 2\beta + l\cos\beta & a\sin 2\beta + l\sin\beta & 1 \\ a + a\cos 2\gamma + l\cos\gamma & a\sin 2\gamma + l\sin\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$a^2\begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 1 \\ \cos 2\beta & \sin 2\beta & 1 \\ \cos 2\gamma & \sin 2\gamma & 1 \end{vmatrix} + al\begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \sin\alpha & 1 \\ \cos 2\beta & \sin\beta & 1 \\ \cos 2\gamma & \sin\gamma & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ al\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin 2\alpha & 1 \\ \cos\beta & \sin 2\beta & 1 \\ \cos\gamma & \sin 2\gamma & 1 \end{vmatrix} + l^2\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 1 \\ \cos\beta & \sin\beta & 1 \\ \cos\gamma & \sin\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese vier Determinanten haben nun die Werte bezüglich

$$8\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad 4\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - \cos(\alpha+\beta+\gamma), \quad 1,$$

multipliziert mit $4\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ [1]); daher wird die vorige Gleichung, nachdem sie von diesem Faktor befreit ist, sein:

$$8a^2\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + al\Big\{4\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$+ \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - \cos(\alpha+\beta+\gamma)\Big\} + l^2 = 0.$$

Machen wir $\alpha = \beta = \gamma$, so erhalten wir

$$8a^2 + al(4\cos^3\lambda + 3\cos\lambda - \cos 3\lambda) + l^2 = 0,$$

oder auch $$8a^2 + l^2 + 6al\cos\lambda = 0.$$

Die Besonderheit eines Wendepunktes ist also durch folgende Gleichung charakterisiert:

$$\cos\lambda = -\frac{8a^2 + l^2}{6al},$$

1) Vgl. den in Nr. 67 schon angeführten Aufsatz des Verfassers.

womit endlich die Existenz der beiden Wendepunkte der Schnecke bestätigt wird und ferner gezeigt ist, dafs diese nur dann reell sind, wenn $2a < l < 4a$; wenn z. B. die Schnecke einen Knotenpunkt hat, sind sie imaginär, aber in jedem Falle befinden sie sich auf der reellen Geraden $x - \frac{(8a^2 + l^2)(4a^2 - l^2)}{9al^2} = 0$.

Wir bemerken noch, dafs die Gleichung (3) für die durch vollständige Rotation des Radius vector $2a \cos \omega + l$ erzeugte Fläche den folgenden Ausdruck liefert:

$$2\int_0^\pi (2a \cos \omega + l)^2 d\omega = 4\pi a^2 + 2\pi l^2,$$

ein Resultat, dafs schon von Roberval erhalten wurde[1]) und welches leicht in Worte zu kleiden ist. Im Spezialfalle $l = a$, wird dieser Ausdruck $6\pi a^2$, stellt also das Sechsfache der Fläche des Basis-Kreises dar.

71. Da die Schnecke eine rationale Kurve ist, so können die Koordinaten ihrer Punkte durch rationale Funktionen eines Parameters dargestellt werden. In der That, setzt man in Gleichung (5′) $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = t$, so findet man

$$x = \frac{(1 - t^2)[(l + 2a) + (l - 2a)t^2]}{(1 + t^2)^2}, \quad y = \frac{2t[(l + 2a) + (l - 2a)t^2]}{(1 + t^2)^2}, \tag{6}$$

welche Darstellung sich für mannigfache Anwendungen gut eignet[2]).

Nicht weniger nützlich ist für den Geometer folgende Bemerkung: Wendet man auf die Kurve (3) die Transformation durch reziproke Radien an, mit O als Pol und k^2 als Potenz, so erhält man die Kurve

$$\varrho = \frac{k^2}{2a \cos \omega + l};$$

da diese Kurve in kartesischen Koordinaten durch die Gleichung dargestellt wird:

$$(l^2 - 4a^2)x^2 + l^2y^2 + 4ak^2x - k^4 = 0,$$

so ist es klar, dafs sie ein Kegelschnitt ist, genauer eine Ellipse, Parabel, Hyperbel, jenachdem $l \gtreqless 2a$, d. h. jenachdem die Schnecke einen isolierten, einen Rückkehr- oder einen Knotenpunkt hat. Umgekehrt: **die Transformierte durch reziproke Radien vectoren (die Inverse) eines Kegelschnittes ist eine Pascal'sche Schnecke**[3]).

Diese Kurve kann auch als Enveloppe erhalten werden. Ein Kreis nämlich, der zum Durchmesser die Strecke hat, die einen festen

---

1) A. a. O. S. 40.

2) Pittarelli, *Le lumache di Pascal* (Giorn. di Matem. XXI, 1883).

3) C. Taylor, *Ancient and modern Geometry of conics* (Cambridge 1881) S. 356.

Punkt mit dem beweglichen Punkte eines festen Kreises verbindet, umhüllt eine Pascal'sche Schnecke; eine kurze Rechnung genügt, um die Richtigkeit dieser Behauptung zu erweisen. — Später werden wir sehen, dafs dieselbe Kurve ein Spezialfall der kartesischen Ovale (Nr. **76**), sowie eine spezielle Epicykloide ist (Nr. **208**); man trifft sie ferner in der Theorie der konformen Abbildungen[1]). Die Pascal'sche Schnecke gehört im Falle $l = a$ auch zur Klasse derjenigen Kurven, die zur Lösung der Aufgabe der Dreiteilung des Winkels dienen[2]); es ist dies eine Bemerkung, die zuerst Pascal machte — wie Roberval bezeugt[3]) — und die dann viele andere wiederholten oder umgestalteten[4]). Dieselbe Kurve tritt auf bei einer Frage aus der Mechanik, die man mit dem Namen „Sauveur's und de l'Hopital's Zugbrücke"[5]) belegte, weil sie eben eine solche Vorrichtung betrifft; sie wurde von Sauveur vorgelegt und zuerst vom Marquis de l'Hôpital gelöst[6]), darauf von anderen[7]). Sie ist ferner, insofern sie eine Kurve

1) Aus der Funktion $w = 2mz - z^2$, wo m eine reelle Gröfse ist, erhält man nämlich, indem man setzt $w = u + iv$, $z = \varrho e^{i\omega}$ die beiden Gleichungen:

$$x = \varrho(2m\cos\omega - \varrho\cos 2\omega), \qquad y = \varrho(2m\sin\omega - \varrho\sin 2\omega),$$

welche, wenn $\varrho = const.$, eine Pascal'sche Schnecke darstellen. S. Amstein, *Quelques exemples de representation conforme avec leur application à un problème d'hydrodynamique* (Bull. de Soc. Vaudoise des Sc. nat., XVI, 1882.

2) Um sich davon zu überzeugen, beachte man, dafs in diesem Falle die Gleichung der Kurve sich folgendermafsen schreiben läfst:

$$\frac{\varrho}{a} = 2\cos\omega - 1 = 4\cos^2\frac{\omega}{2} - 3,$$

oder auch

$$\frac{\varrho}{a} = \frac{\cos\frac{3\omega}{2}}{\cos\frac{\omega}{2}};$$

wenn daher der Winkel $\frac{3\omega}{2} = \alpha$ bekannt ist, so wird man daraus $\cos\frac{\alpha}{3}$ ableiten und darnach α.

3) Man s. die citierten *Observations*.

4) Azèmar, *Trisection de l'angle, suivie de Recherches analytiques sur le même sujet de Garnier* (Paris 1809); Fusinieri, *Trisezione geometria degli archi di cerchio e descrizione di curve algebriche col mezzo della base variabile di un triangolo* (Mem. della Società Ital. delle Scienze XXIII, 1846); Jouanne, *Trisection de l'angle au moyen du limaçon de Pascal* (Nouv. Ann. 2. Ser. IX, 1870); Brocard, *Note sur un compas trisecteur* (Bull. de la Soc. math. de France III, 1875; das daselbst untersuchte Instrument ist eine Erfindung von Laisant); u. a.

5) Vgl. W. Schell, *Theorie der Bewegung und der Kräfte* Bd. II (Leipzig 1880) S. 67.

6) S. den Aufsatz *Illustris Marchionis Hospitalii Solutio problematis physico-mathematici ab erudito quodam geometra propositi* (Acta Eruditorum, Febr. 1695).

7) S. *Joh. Bernoulli Opera* I. und *Jac. Bernoulli Opera* I. (Genf 1744).

Das einfache Aussehen der Polar-Gleichung der Schnecke führt zur Betrachtung der ähnlich durch die Gleichung $\varrho = 2a\cos\omega + 2b\sin\omega + l$ dargestellten Kurve; diese ist auch eine Kurve 4. Ordn. mit den cyklischen Punkten der Ebene

vierter Ordnung mit zwei Spitzen und einem Knoten ist, von projektivischem Standpunkt aus identisch mit einer Linie viel jüngeren Datums, die an dieser Stelle wenigstens einen Hinweis verdient.

Gegeben seien (s. Taf. IV, Fig. 29) zwei Kreise Γ und Γ', einander gleich und sich berührend; man betrachte einen beliebigen Punkt M' von Γ' und seine Polare m in Bezug auf Γ, diese wird in einem Punkte P geschnitten von der Geraden p, die durch M parallel zur Verbindungslinie der Mittelpunkte O und O' der gegebenen Kreise gezogen ist. Der Ort des Punktes P ist eine Kurve, die von den Engländern „the cocked hat“, d. h. der aufgekrempte Hut, genannt wird. Die oben angeführte Konstruktion — von Miss C. A. Scott erdacht[1]) — eignet sich zur Auffindung der Gleichung sowie der Eigenschaften der Kurve. Nehmen wir OO' als y-Axe und O als Anfang eines rechtwinkligen kartesischen Systems, so kann man als allgemeine Ausdrücke für die Koordinaten des Punktes M folgende nehmen

$$x = a \cdot \cos\omega, \qquad y = 2a + a\sin\omega,$$

wenn a der Radius von Γ und Γ'. Die Geraden m und p haben daher die Gleichungen

$$x\cos\varphi + (2 + \sin\varphi)\, y = a \quad \text{bezw.} \quad x = a\cos\varphi.$$

Daher erhält man folgende parametrische Darstellung der Kurve:

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = \frac{a\sin^2\varphi}{2 + \sin\varphi}, \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

die damit beweist, dafs der „Kremphut“ eine rationale Kurve ist. Durch Elimination von φ aus (7) erhält man als Gleichung der Kurve

$$(x^2 + 2ay - a^2)^2 - y^2(a^2 - x^2) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

oder, wenn man will,

$$x^4 + 3a^2y^2 + a^4 + 4ax^2y - 2a^2x^2 - 4a^3y + x^2y^2 = 0.$$

Aus derselben ergiebt sich, dafs die Kurve vollständig innerhalb des Streifens der Ebene liegt, der begrenzt wird von den beiden gemeinsamen Tangenten, die zu OO' parallel laufen; die x-Axe schneidet die Kurve in zwei Punkten D, D', die Spitzen sind und als zugehörige Tangenten die Geraden haben, die diese Punkte mit dem Berührungs-

---

und dem Pole als Doppelpunkten, dieser ist nun Knoten, Spitze oder isolierter Punkt, jenachdem $(l+a)(l-a)(l+b)(l-b) \lesseqgtr 4a^2b^2$, sodafs die Kurve verschiedene Formen haben kann. (S. M. Mühlenbruch, *Über die cardioidenförmigen Curven, welche durch die Polargleichung* $r = a + b\sin t + c\cos t$ *gegeben sind.* Diss. Jena, 1867). Um sie zu konstruieren, beschreibe man zwei Kreise mit den Radien a und b, die durch den Pol gehen, der erste habe seinen Mittelpunkt auf der Polaraxe, der zweite möge ihn berühren. Dann schneidet jede Gerade durch den Pol sie in zwei Punkten A und B, und nimmt man $OM = OA + OB + l$, so wird der Ort der Punkte M die behandelte Kurve sein.

1) *Educational Times*, Januar 1896, Frage 12978.

punkte C von Γ und Γ_1 verbinden. Ferner ist die Kurve cirkular und hat den unendlich fernen Punkt von Oy zum isolierten Punkte. C ist der Punkt der gröfsten Ordinate; die Punkte mit den Abscissen $\pm\frac{a\sqrt{5}}{3}$ sind Wendepunkte derselben. Für die Konstruktion der Tangente sind verschiedene Methoden angegeben[1]), die auseinanderzusetzen es hier uns an Raum gebricht.

Siebentes Kapitel.

Die dreispitzigen Kurven vierter Ordnung.

72. Bei der Behandlung der Konchoiden mit Kreisbasis im vorigen Kapitel haben wir den Fall, dafs das konstante Zwischenstück l gleich dem Durchmesser $2a$ des Basiskreises ist, ausgeschlossen. In diesem bemerkenswerten Falle (s. Taf. IV, Fig. 28b) haben wir eine Kurve vierter Ordnung mit drei Spitzen, mit der wir uns nun beschäftigen wollen. Carré[2]) schrieb die Auffindung derselben dem holländischen Mathematiker J. Koërsma[3]) zu; Ozanam erwähnt sie in seinem *Dictionnaire mathématique* (Amsterdam 1691, S. 102), indem er sie geometrische Cykloide nennt; Castillon endlich schlug wegen der Gestalt, die die Kurve hat, vor sie Kardioide[4]) zu nennen, und dieser vernünftige Vorschlag wurde allgemein angenommen[5]).

Erinnern wir uns der Darlegungen des vorigen Kapitels, so erkennen wir, dafs die kartesische sowie die Polargleichung der Kardioide sein werden

$$(x^2+y^2-2ax)^2=4a^2(x^2+y^2) \quad . \; . \; (1) \qquad \varrho=2a(1+\cos\omega) \quad . \; (2)$$

und dafs die Koordinaten ihrer Punkte als Funktionen eines Parameters so ausgedrückt werden können:

$$x=\frac{4a(1-\lambda^2)}{(1+\lambda^2)^2}, \qquad y=\frac{8a\lambda}{(1+\lambda^2)^2} \text{ [6])}. \quad . \; . \; . \; . \; (3)$$

---

1) G. de Longchamps, *Note sur le bicorne* (Journ. de math. spéc. 4. Ser. VI, 1877).

2) *Examen d'une courbe formée par le moyen du cercle* (Mém. de l'Académie MDCCV, Paris).

3) Vgl. *Intermédiaire* V. 1898. S. 200.

4) *De curva cardioide* (Phil. Trans. 1741).

5) Die wichtigsten Eigenschaften dieser Kurve wurden neuerdings von Raymond Clare Archibald in der Inaugural-Dissertation *The Cardioide and some of its related curves* (Strafsburg 1900) bewiesen.

6) Diese Darstellung, in weitem Mafse angewendet, findet sich in folgenden Schriften von K. Zahradnik: *Theorie der Cardioide* (Prager Ber., 1875), *Über die Cardioide* (Das., 1877), *Beitrag zur Theorie der Cardioide* (Archiv LXIII, 1879).

Die Kardioide hat keine Wendepunkte, besitzt aber die Doppeltangente $x + \frac{a}{2} = 0$. Aus (3) ergiebt sich folgende Gleichung der Tangente im Punkte (λ):

$$(3\lambda^2 - 1)x + \lambda(\lambda^2 - 3)y + 4a = 0,[1] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

welche, da sie kubisch in λ ist, zeigt, dafs die Kardioide eine Kurve dritter Klasse ist. Die durch Gleichung (4) dargestellte Tangente trifft die Doppeltangente im Punkte $\left(-\frac{a}{2}, \frac{3a}{2\lambda}\right)$, der vom singulären Brennpunkte (a, o) durch die Gerade $x + \lambda y = a$ projiziert wird. Nennen wir den Winkel, den sie mit der x-Axe bildet ω, so haben wir

$$\operatorname{tg} \omega = -\frac{1}{\lambda}.$$

Dies führt zu einem interessanten Schlusse; betrachten wir die drei Tangenten der Kardioide, die mit Ox den Winkel α bilden, so sind die Parameter ihrer Berührungspunkte — infolge von (4) — durch die Gleichung bestimmt

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3\lambda^2 - 1}{\lambda^3 - 3\lambda};$$

die entsprechenden Werte von ω werden durch Elimination von λ aus den beiden zuletzt geschriebenen Gleichungen erhalten; sie sind daher durch die Gleichung bestimmt

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg}^3 \omega}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \omega} = \operatorname{tg} 3\omega;$$

daraus ergeben sich für ω die folgenden drei Werte: α, $\alpha + \frac{\pi}{3}$, $\alpha + \frac{2\pi}{3}$. Folglich: **Die Tripel einander paralleler Tangenten der Kardioide schneiden die Doppeltangente derselben in Tripeln von Punkten, die vom singulären Brennpunkte aus unter Winkeln von 60^0 gesehen werden**[2]. Daraus läfst sich ein neues Verfahren der Dreiteilung eines Winkels entnehmen, womit sich ergiebt, **dafs die Kardioide, als Enveloppe ihrer Tangenten betrachtet, eine Trisektrix-Kurve ist.**

Die Bedingung der Kollinearität der drei Punkte (α), (β), (γ) ist

$$\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta + 3 = 0. \quad (5)$$

Davon machen wir sogleich eine einfache Anwendung, indem wir den Ort der Punkte einer Kardioide aufsuchen, die die Eigenschaft haben,

---

1) Mit Benutzung dieser Gleichung kann man beweisen, dafs „der Ort der Punkte, von denen man an eine Kardioide Paare zu einander senkrechter Tangenten ziehen kann, eine zerfallende Kurve ist“, wie Juel bemerkt hat (Tidskrift 1880).

2) Em. Weyr, *Sopra una proprietà metrica della cardioide* (Rend. del R. Istituto Lombardo, 2. Ser. V, 1872).

dafs die Berührungspunkte der an die Kurve von einem beliebigen derselben gezogenen Tangenten in gerader Linie liegen. Wenn nun x, y die Koordinaten eines Punktes dieses Ortes sind und $(\lambda_1), (\lambda_2), (\lambda_3)$ die Berührungspunkte der entsprechenden Tangenten, so hat man vermöge Gleichung (4)

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -\frac{3x}{y}, \quad \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 = -3, \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{x-4a}{y};$$

liegen nun diese Punkte in gerader Linie, so hat man wegen (5)

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2,$$

der gesuchte Ort ist also der Basiskreis der Kardioide[1]).

Die Kardioide ist eine Kurve vierter Ordnung und 3ter Klasse mit drei Spitzen und einer Doppeltangente, ohne Doppelpunkte und Wendepunkte, sie ist also korrelativ zu den Kurven dritter Ordnung mit Doppelpunkt, die 4ter Klasse sind, drei Wendepunkte haben und keine weitere Singularität. Kein Wunder also, wenn sie die Polarreziproke einer speziellen rationalen Kurve dritter Ordnung in Bezug auf einen geeigneten Kreis ist, nämlich der Trisektrix von Maclaurin (s. Nr. 47)[2]). Um diesen bemerkenswerten Satz zu beweisen, beachten wir, dafs mit einer einfachen Verschiebung der y-Axe die Gleichung der Trisektrix sich in der Form schreiben läfst

$$x(x^2+y^2) = 4R^2 - 3R(x^2+y^2),$$ [3])

welche dann sogleich folgende parametrische Darstellung der Kurve liefert

$$x = R\frac{1-3\lambda^2}{1+\lambda^2}, \quad y = R\frac{\lambda^3-3\lambda}{1+\lambda^2}.$$

Die Polare dieses Punktes in Bezug auf den Kreis $x^2+y^2=R^2$ hat die Gleichung

$$x(1-3\lambda^2) + y(\lambda^3-3\lambda) = R(1+\lambda^2).$$

Um die Enveloppe dieser Geraden zu finden, kombinieren wir diese Gleichung mit ihrer Abgeleiteten nach λ, nämlich

$$-6\lambda x + 3y(\lambda^2-1) = 2\lambda R.$$

Dann bekommen wir

$$x = -\frac{R}{3}\frac{\lambda^4+6\lambda^2-3}{(\lambda^2+1)^2}, \quad y = -\frac{R}{3}\frac{8\lambda}{(\lambda^2+1)^2},$$

oder auch

$$x + \frac{R}{3} = \frac{R}{3}\frac{4(1-\lambda^2)}{(1+\lambda^2)^2}, \quad -y = \frac{R}{3}\frac{8\lambda}{(\lambda^2+1)^2}.$$

1) Educational Times, LVIII, 1893, Frage 11247.

2) G. de Longchamps, *Rapprochement entre la trisectrice de Maclaurin et la cardioïde* (Prager Ber., 1897).

3) Diese Gleichung entsteht aus der in Nr. 47 gefundenen kartesischen Gleichung (2) durch Verwandlung von a in R und x in $-(x+2R)$.

Da sich diese nun aus den Gleichungen (3) ergeben, wenn man in ihnen x, y, a ersetzt bezw. durch $x + \frac{R}{3}$, $-y$, $\frac{R}{3}$, so ist damit der ausgesprochene Satz bewiesen.

Aus der Gleichung (2) ergeben sich leicht folgende Ausdrücke für den Bogen s der Kardioide, gemessen von der Spitze ab, und für den Krümmungsradius R

$$s = 8a \sin\frac{\omega}{2} \text{ [1]}, \qquad R = \frac{8a}{3}\cos\frac{\omega}{3} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Eliminiert man aus diesen ω, so findet man

$$s^2 + 9R^2 = (8a)^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

welches die natürliche (intrinseke) Gleichung der Kardioide ist. Die Gestalt derselben führt zu der Idee von allgemeineren Kurven, deren natürliche Gleichung die Gestalt hat

$$s^2 + (2n+1)^2 R^2 = b^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

wo n eine ganze Zahl, und b eine beliebige Strecke ist. Cesàro, der sie zuerst betrachtet hat, nannte sie cardioidi stellate, d. h. Stern-Kardioiden[2]). Um die gewöhnliche Darstellung zu finden, kann man sich der in der Note II am Ende dieses Werkes bewiesenen Formeln bedienen in folgender Weise: Setzt man zur Abkürzung $2n+1 = \mu$, so hat man zunächst $R = \frac{1}{\mu}\sqrt{b^2 - s^2}$, daher

$$\varphi = \mu \int \frac{ds}{\sqrt{b^2 - s^2}} = \mu \arcsin\frac{s}{b}$$

unter der Voraussetzung, dafs $\varphi = 0$ für $s = 0$ sei. Daraus folgert man, dafs $s = b\sin\frac{\varphi}{\mu}$, daher wegen Formel II der citierten Note

$$x = \frac{b}{\mu}\int \cos\varphi \cos\frac{\varphi}{\mu}\, d\varphi, \qquad y = \int \sin\varphi \cos\frac{\varphi}{\mu}\, d\varphi$$

oder

$$\frac{2\mu x}{b} = \int\left(\cos\frac{\mu+1}{\mu}\varphi + \cos\frac{\mu-1}{\mu}\varphi\right) d\varphi,$$

$$\frac{2\mu y}{b} = \int\left(\sin\frac{\mu+1}{\mu}\varphi + \sin\frac{\mu-1}{\mu}\varphi\right) d\varphi.$$

Führt man die angegebene Integration aus, so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} \frac{4(x+x_0)}{b} &= \frac{1}{n+1}\sin\frac{2(n+1)\varphi}{2n+1} + \frac{1}{n}\sin\frac{2n\varphi}{2n+1}, \\ -\frac{4(y+y_0)}{b} &= \frac{1}{n+1}\cos\frac{2(n+1)\varphi}{2n+1} + \frac{1}{n}\cos\frac{2n\varphi}{2n+1}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (9)$$

als parametrische Darstellung der Stern-Kardioide.

---

1) Diese Rektifikationsformel findet sich im wesentlichen in der im vorigen Kapitel citierten Schrift von De la Hire. Über die Schwerpunktsbestimmung einer Fläche siehe Saint-Germain *Recueil d'exercises sur la mécanique rationelle* (II. éd. Paris 1885) S. 38.

2) *Lezioni di geometria intrinseca* (Neapel 1896) S. 12.

73. Wir werden später der Kardioide wiederum begegnen als einem Spezialfall der Sinusspiralen (Nr. **171**) und der Epicykloiden (Nr. **208**). Unterdessen wollen wir uns mit einer Kurve beschäftigen, die von projektivischem Standpunkte aus sich von der Kardioide nicht unterscheidet, jedoch durch ihre Definition und ihre metrischen Eigenschaften völlig von ihr verschieden ist; es war Steiner, der die Aufmerksamkeit der Geometer auf sie lenkte, und viele derselben haben sie zum Gegenstande eifriger und erfolgreicher Studien gemacht[1]). Bei unserer Darlegung wollen wir von der durch Steiner selbst gegebenen Definition ausgehen: „Wenn man von einem Punkte P des einem Dreiecke ABC umbeschriebenen Kreises die Lote auf die Seiten fällt, so sind deren Fufspunkte A', B', C' auf einer Geraden p belegen, die man gewöhnlich die Simson'sche Gerade des Punktes P in Bezug auf das Dreieck nennt. Die Enveloppe aller dieser Geraden p, die den Punkten P jenes Kreises entsprechen, ist die Steiner'sche Kurve[2]).“ Nach einem bekannten Satze ist p die Scheiteltangente einer dem Dreiecke ABC einbeschriebenen Parabel, die P zum Brennpunkte hat, daher kann die Kurve als Enveloppe der Scheiteltangenten der einem gegebenen Dreiecke eingeschriebenen Parabeln definiert werden[3]).

Um die Gleichung der Steiner'schen Kurve zu finden, bedienen wir uns der ersten Definition und nehmen den Mittelpunkt O des dem Dreiecke ABC umbeschriebenen Kreises als Anfangspunkt; als Koordinaten der Ecken können wir dann nehmen die Ausdrücke $r\cos\alpha$, $r\sin\alpha$; $r\cos\beta$, $r\sin\beta$; $r\cos\gamma$, $r\sin\gamma$. Dann sind die Gleichungen der Seiten

$$x\cos\frac{\beta+\gamma}{2}+y\sin\frac{\beta+\gamma}{2}=r\cos\frac{\beta-\gamma}{2},$$

$$x\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}+y\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}=r\cos\frac{\gamma-\alpha}{2},$$

$$x\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+y\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=r\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Wenn nun $r\cos\varphi$, $r\sin\varphi$ die Koordinaten des Punktes P sind, so werden

$$x\sin\frac{\beta+\gamma}{2}-y\cos\frac{\beta+\gamma}{2}=r\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}-\varphi\right),$$

1) Für die bezügliche Litteratur sei auf des Verf. Werk *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche* (II. Aufl. Turin 1896) S. 74—76 verwiesen; aufser den dort citierten Arbeiten sind folgende beiden neueren zu bemerken: C. Wirtz, *Die Steiner'sche Hypocykloide* (Diss. Strafsburg 1900); F. P. Ruffini, *Della ipocicloide tricuspide* (Bologna Rendiconti 1900—1901).

2) *Über eine besondere Kurve dritter Klasse (und vierter Ordnung)* (Crelle LIII, 1856).

3) Man könnte sie auch definieren als Enveloppe der Asymptoten der einem Dreiecke ABC umbeschriebenen Hyperbeln.

$$x \sin\frac{\gamma+\alpha}{2} - y \cos\frac{\gamma+a}{2} = r \sin\left(\frac{\gamma+\alpha}{2} - \varphi\right),$$

$$x \sin\frac{\alpha+\beta}{2} - y \sin\frac{\alpha+\beta}{2} = r \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \varphi\right)$$

die Gleichungen der von P auf die Seiten gefällten Senkrechten sein, und daher sind die Koordinaten ihrer Fufspunkte A', B', C'

$$\frac{r}{2}\Big[\cos\beta + \cos\gamma + \cos\varphi - \cos(\beta + \gamma - \varphi)\Big],$$

$$\frac{r}{2}\Big[\sin\beta + \sin\gamma + \sin\varphi - \sin(\beta + \gamma - \varphi)\Big];$$

$$\frac{r}{2}\Big[\cos\gamma + \cos\alpha + \cos\varphi - \cos(\gamma + \alpha - \varphi)\Big],$$

$$\frac{r}{2}\Big[\sin\gamma + \sin\alpha + \sin\varphi - \sin(\gamma + \alpha - \varphi)\Big];$$

$$\frac{r}{2}\Big[\cos\alpha + \cos\beta + \cos\varphi - \cos(\alpha + \gamma - \varphi)\Big],$$

$$\frac{r}{2}\Big[\sin\alpha + \sin\beta + \sin\varphi - \sin(\alpha + \beta - \varphi)\Big].$$

Daraus läfst sich ableiten, dafs die Gleichung der Geraden $B'C'$ sein wird:

$$x \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma-\varphi}{2} - y \cos\frac{\alpha+\beta+\gamma-\varphi}{2} \cdot\cdot$$

$$+ r \Big\{\sin\frac{\varphi-\alpha}{2} \cos\frac{\varphi-\beta}{2} \cos\frac{\varphi-\gamma}{2} + \cos\frac{\varphi-\alpha}{2} \sin\frac{\varphi-\beta}{2} \cos\frac{\varphi-\gamma}{2} +$$

$$\cos\frac{\varphi-\alpha}{2} \cos\frac{\varphi-\beta}{2} \sin\frac{\varphi-\gamma}{2} + \sin\frac{\varphi-\alpha}{2} \sin\frac{\varphi-\beta}{2} \sin\frac{\varphi-\gamma}{2}\Big\},$$

oder auch

$$x \sin\frac{\varphi-(\alpha+\beta+\gamma)}{2} + y \cos\frac{\varphi-(\alpha+\beta+\gamma)}{2} = \frac{r}{2}\Big\{\sin\frac{3\varphi-(\alpha+\beta+\gamma)}{2} \cdot\cdot$$

$$+ \sin\frac{\varphi+\alpha-\beta-\gamma}{2} + \sin\frac{\varphi-\alpha+\beta-\gamma}{2} + \sin\frac{\varphi-\alpha-\beta+\gamma}{2}\Big\}. \quad (10)$$

Die Symmetrie dieser Gleichung in α, β, γ zeigt, dafs die Gerade $B'C'$ auch durch Punkt A' geht, somit ist schliefslich die Existenz der Simson'schen Geraden bewiesen. Bemerken wir auch noch, dafs durch Vertauschung von φ mit $\varphi + \pi$ die Gleichung (9) in die Gleichung einer zu der durch (9) dargestellten senkrechten Geraden übergeht, daher verteilen sich die Tangenten der Kurve in zu einander rechtwinklige Paare, entsprechend den Paaren gegenüberliegender Punkte des gegebenen Kreises.

Um die Enveloppe der Geraden (9) zu finden, setzen wir der Kürze wegen:

$$\varphi = 2\psi, \quad \alpha + \beta + \gamma = 2s, \quad -\alpha + \beta + \gamma = 2a, \quad \alpha - \beta + \gamma = 2b,$$
$$\alpha + \beta - \gamma = 2c.$$

Die Gleichung (9) nimmt dann folgendes Aussehen an:

$$x \sin(\psi - s) + y \cos(\psi - s)$$
$$= \frac{r}{2} \left\{ \sin(3\psi - s) + \sin(\psi + \alpha) + \sin(\psi + b) + \sin(\psi + c) \right\}.$$

Differenzieren wir nach ψ, so ergiebt sich:

$$x \cos(\psi - s) - y \sin(\psi - s)$$
$$= \frac{r}{2} \left\{ 3\cos(3\psi - s) + \cos(\psi + \alpha) + \cos(\psi + b) + \cos(\psi + c) \right\},$$

welche Gleichung mit der vorigen kombiniert ergiebt

$$\frac{2x}{r} = \sin(3\psi - s)\sin(\psi - s) + 3\cos(3\psi - s)\cos(\psi - s)$$
$$+ \sin(a + s) + \sin(b + s) + \sin(c + s),$$
$$\frac{2y}{r} = \sin(3\psi - s)\cos(\psi - s) - 3\cos(3\psi - s)\sin(\psi - s)$$
$$+ \cos(a + s) + \cos(b + s) + \cos(c + s).$$

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\sin(a + s) + \sin(b + s) + \sin(c + s)$$
$$\text{d. h.} \quad \sin(\beta + \gamma) + \sin(\gamma + \alpha) + \sin(\alpha + \beta) = \frac{2x_0}{r},$$
$$\cos(a + s) + \cos(b + s) + \cos(c + s)$$
$$\text{d. h.} \quad \cos(\beta + \gamma) + \cos(\gamma + \alpha) + \cos(\alpha + \beta) = \frac{2y_0}{r},$$

und aufserdem $\quad x - x_0 = x', \quad y - y_0 = y',$

so kann man die vorigen Gleichungen in folgende anderen umgestalten

$$\frac{2x'}{r} = 2\cos\varphi + \cos(2\varphi - 2s) \qquad \frac{2y'}{r} = 2\sin\varphi - \sin(2\varphi - 2s)$$

oder auch

$$\frac{2(x'\cos 2s + y'\sin 2s)}{r} = 2\cos(\varphi - 2s) + \cos 2(\varphi - 2s),$$
$$\frac{2(x'\sin 2s - y'\cos 2s)}{r} = 2\sin(\varphi - 2s) - \sin 2(\varphi - 2s).$$

Wenn man dann $\varphi - 2s = \frac{\omega}{3}$ setzt und die Koordinatenvertauschung ausführt, die durch

$$\xi = x'\cos 2s + y'\sin 2s, \qquad \eta = x'\sin 2s - y'\cos 2s$$

charakterisiert ist, so erhalten wir schliefslich die Gleichungen:

$$\xi = \frac{r}{2}\left(2\cos\frac{\omega}{3} + \cos\frac{2\omega}{3}\right), \quad \eta = \frac{r}{2}\left(2\sin\frac{\omega}{3} - \sin\frac{2\omega}{3}\right) \cdot \quad . \quad (11)$$

Da nun diese (s. Abschn. VI, Kap. 9) der Kurve angehören, die durch einen Punkt der Peripherie des Kreises mit dem Radius $\frac{r}{2}$ erzeugt wird, wenn dieser innerhalb eines festen Kreises mit dem

Radius $\frac{3r}{2}$ rollt, so ist die von Schläfli[1]) gemachte Bemerkung bewiesen, daſs die Steiner'sche Kurve eine dreispitzige Hypocykloide ist. Die drei Spitzen liegen auf dem Kreise mit dem Centrum O und dem Radius $\frac{3r}{2}$, während der koncentrische Kreis mit dem Radius $\frac{r}{2}$ die Kurve dreimal berührt.

Eliminiert man ω aus den Gleichungen (11), so findet man die kartesische Gleichung der Kurve als

$$(x^2+y^2)^2+4rx(3y^2-x^2)+\frac{3^2r^2}{2}(x^2+y^2)-\frac{3^2}{2^4}=0\,. \quad (12)$$

Die dreispitzige Hypocykloide ist also eine Kurve vierter Ordnung, die von der unendlich fernen Geraden in den cyklischen Punkten berührt wird. Umgekehrt: Jede Kurve vierter Ordnung und dritter Klasse, die von der unendlich fernen Geraden in den cyklischen Punkten berührt wird, ist eine dreispitzige Hypocykloide. Diese wichtige Bemerkung Cremonas[2]) kann durch folgende von Clebsch[3]) herrührende Überlegung bewiesen werden. Die Gleichung

$$\xi_1\xi_2\xi_3=\xi_1^3+\xi_2^3$$

zwischen den Koordinaten ξ einer Geraden stellt eine Kurve dritter Klasse dar, welche die dritte Seite des Fundamentaldreiecks als Doppeltangente hat, indem die Berührungspunkte die bezüglichen Ecken des Dreiecks selbst sind. Die vorige Gleichung führt alsbald zu folgender parametrischer Darstellung

$$r\xi_1=\lambda^2,\quad r\xi_2=\lambda,\quad r\xi_3=(1+\lambda^3);$$

mit anderen Worten, es ist

$$\lambda^2x_1+\lambda x_2+(1+\lambda^3)x_3=0$$

die allgemeine Gleichung der Tangenten an jene Kurve. Kombinieren wir sie mit ihrer Abgeleiteten nach λ, so ersieht man, daſs die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Kurve proportional mit $1-2\lambda^3$, $\lambda^4-2\lambda$, λ^2 sind; setzt man $\lambda=\frac{\mu}{\nu}$, so kann man schreiben

$$\frac{x_1}{\nu^4-2\mu^3\nu}=\frac{x_2}{\mu^4-2\nu^3\mu}=\frac{x_0}{\mu^2\nu^2}.$$

Nehmen wir $\mu=\varrho e^{\frac{i\varphi}{2}}$, $\nu=\varrho e^{-\frac{i\varphi}{2}}$, $\frac{x_2+x_1}{2x_3}=\frac{x}{a}$, $\frac{x_2-x_1}{2ix_3}=\frac{y}{a}$, so folgt daraus

1) J. H. Graf, *Der Briefwechsel zwischen J. Steiner und L. Schläfli* (Bern 1896) S. 206—208. Nichtsdestoweniger wird die behandelte Kurve immer die Steiner'sche Hypocykloide genannt.

2) S. die fundamentale Abhandlung *Sur l'hypocycloide à trois rebrousements* (Crelle LXIV, 1865).

3) S. die Note zu der angeführten Abhandlung von Cremona.

$$\frac{x}{a} = \cos 2\varphi + 2\cos\varphi\,, \quad \frac{y}{a} = \sin 2\varphi - 2\sin\varphi\,.$$

Da diese nun von der Form der Gleichung (11) ist, so ist der Satz von Cremona bewiesen.

74. Indem wir der Bequemlichkeit halber die Bezeichnungen ändern, wollen wir unsere Gleichung (11) folgendermafsen schreiben:

$$x = a(2\cos\lambda + \cos 2\lambda)\,, \qquad y = a(2\sin\lambda - \sin 2\lambda) \quad . \quad (12)$$

und erhalten so eine sehr nützliche parametrische Darstellung der dreispitzigen Hypocykloide. Aus dieser entnimmt man eine analoge für die Polar-Koordinaten $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\omega = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$; man findet nämlich die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \varrho^2 &= a^2(5 + 4\cos 3\lambda) \\ \operatorname{tg}\omega &= \frac{2\sin\lambda - \sin 2\lambda}{2\cos\lambda + \cos 2\lambda} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

von denen die zweite nach einigen geeigneten Umformungen folgendes Aussehen erhält:

$$\operatorname{tg}\left(\omega + \frac{\lambda}{2}\right) = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{3\lambda}{2} \cdot \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Gleichung (13) zeigt, dafs der Radius vector zwischen dem Minimum a und dem Maximum $3a$ variiert; jenes entspricht den Werten $\lambda = \frac{\pi}{3}$, π, $\frac{5\pi}{3}$, dieses den Werten $\lambda = 0$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$; die Punkte der Kurve mit dem gröfsten Radius vector sind die Spitzen, jene mit dem kleinsten Vector sind die Berührungspunkte des (dreifach berührenden) Kreises um O mit dem Radius a. Setzt man in (13) $\lambda = \frac{2k\pi}{3} \pm \alpha$ ein, so bekommt man $\varrho^2 = a^2(5 + 4\cos 3\alpha)$; da nun hierin das doppelte Vorzeichen ($\pm\,\alpha$) keinen Zeichenwechsel hervorruft, so ist klar, dafs (die drei durch den Anfangspunkt gezogenen Geraden, die mit $0x$ die Winkel bezw. 0, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ bilden, d. h.) die Spitzentangenten drei Symmetrieaxen der Kurve sind. Aus der Bemerkung, dafs die Gleichungen (13), (14) sich auch nicht ändern, wenn man λ in $\lambda + \frac{2k\pi}{3}$ und ω in $\omega + \frac{2k\pi}{3}$ $(k = 1, 2)$ verändert, erkennt man, **dafs der dreispitzigen Hypocykloide ∞^1 gleichseitige Dreiecke einbeschrieben werden können.**

Wir nehmen wieder die Gleichung (12), um daraus abzuleiten, dafs die Tangente an die Hypocykloide im Punkte (τ) folgende Gleichung hat

$$x\sin\frac{\tau}{2} + y\cos\frac{\tau}{2} = a\sin\frac{3\tau}{2}\,; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

sie bildet daher mit der x-Axe den Winkel $\pi - \frac{\tau}{2}$. Die Koordinaten dieser Tangente sind

$$\xi = -\frac{\sin\frac{\tau}{2}}{a\sin\frac{3\tau}{2}}, \qquad \eta = -\frac{\cos\frac{\tau}{2}}{a\sin\frac{3\tau}{2}}.$$

Durch Elimination von τ ergiebt sich daraus

$$\xi^2 + \eta^2 = \xi(\xi^3 - 3\eta^3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

als Tangentialgleichung der Kurve. — Die durch Gleichung (15) dargestellte Gerade schneidet, als ganz beliebige Gerade der Ebene, die Hypocykloide in vier Punkten, deren Parameter man durch Einsetzen der Werte (12) für x und y in (15) und Auflösung der resultierenden Gleichung nach λ erhält. Diese Gleichung kann nun

$$\sin\left(\frac{\tau}{2} + \lambda\right) \cdot \sin^2\frac{\tau - \lambda}{4} = 0$$

geschrieben werden, zerfällt daher in die beiden

$$\sin^2\frac{\tau - \lambda}{4} = 0, \qquad \sin\left(\frac{\tau}{2} + \lambda\right) = 0.$$

Die erstere liefert den Ausgangspunkt (τ_0) doppelt gerechnet, während die zweite zu den beiden Punkten mit den Parametern

$$\lambda_1 = \pi - \frac{\tau}{2}, \qquad \lambda_2 = 2\pi - \frac{\tau}{2} \quad \text{führt.}$$

Wir sehen also: **Die Tangente der Hypocykloide im Punkte (τ) schneidet die Kurve ferner in den Punkten $\left(\pi - \frac{\tau}{2}\right)$ und $\left(2\pi - \frac{\tau}{2}\right)$.** Der Kürze wegen wollen wir die beideren letzteren associierte Punkte nennen. Die Koordinaten solcher Punkte sind

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a\left(\cos\tau - 2\cos\frac{\tau}{2}\right) \\ y_1 &= a\left(\sin\tau + 2\sin\frac{\tau}{2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x_2 &= a\left(\cos\tau + 2\cos\frac{\tau}{2}\right) \\ y_2 &= a\left(\sin\tau - 2\sin\frac{\tau}{2}\right) \end{aligned}\right\};$$

daraus folgt

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = a\cos\tau, \qquad \frac{y_1 + y_2}{2} = a\sin\tau,$$

$$(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 = 4a^2$$

und also: **Die von zwei beliebigen associierten Punkten begrenzte Strecke ist gleich dem Durchmesser des die Hypocykloide dreifach berührenden Kreises und hat einen Punkt der Peripherie dieses Kreises zum Mittelpunkte.** Die Tangenten in diesen associierten Punkten haben die Gleichungen bezw.:

$$x\cos\frac{\tau}{4} + y\sin\frac{\tau}{4} = -a\cos\frac{3\tau}{4}, \quad x\sin\frac{\tau}{4} - y\cos\frac{\tau}{4} = a\sin\frac{3\tau}{4};$$

beachten wir die Gestalt dieser Gleichung und merken uns, dafs sie durch die Werte

$$x = -a\cos\tau\,,\qquad y = -a\sin\tau$$

befriedigt wird, so schliefsen wir: **Die Tangenten in zwei beliebigen associierten Punkten sind zu einander senkrecht und schneiden sich in einem Punkte des dreifach berührenden Kreises, der dem Mittelpunkte der von jenem Punkte begrenzten Strecke diametral gegenüber liegt.**

Da die hier untersuchte Kurve dritter Klasse ist — vgl. Gl. (16) — so gehen durch jeden Punkt (x, y) der Ebene drei ihrer Tangenten; die entsprechenden Werte des Parameters τ sind die Wurzeln τ_1, τ_2, τ_3 per Gleichung (15); wir haben daher als Gleichung jener Tangenten

$$x\sin\frac{\tau_k}{2} + y\cos\frac{\tau_k}{2} = a\sin\frac{3\tau_k}{2}\qquad (k=1,2,3)\,.$$

Durch Elimination von x und y findet man folgende Beziehung für die Parameter dreier Kurvenpunkte, deren Tangenten durch denselben Punkt gehen:

$$\begin{vmatrix} \sin\frac{\tau_1}{2} & \cos\frac{\tau_1}{2} & \sin\frac{3\tau_1}{2} \\ \sin\frac{\tau_2}{2} & \cos\frac{\tau_2}{2} & \sin\frac{3\tau_2}{2} \\ \sin\frac{\tau_3}{2} & \cos\frac{\tau_3}{2} & \sin\frac{3\tau_3}{2} \end{vmatrix} = 0,\quad \text{oder}\quad \begin{vmatrix} \sin\frac{\tau_1}{2} & \cos\frac{\tau_1}{2} & \sin^3\frac{\tau_1}{2} \\ \sin\frac{\tau_2}{2} & \cos\frac{\tau_2}{2} & \sin^3\frac{\tau_2}{2} \\ \sin\frac{\tau_3}{2} & \cos\frac{\tau_3}{2} & \sin^3\frac{\tau_3}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\xi_k = e^{i\tau_k}\qquad (k=1,2,3).$$

so wird diese Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \xi_1{}^2 & \xi_1 & \xi_1{}^3-1 \\ \xi_2{}^2 & \xi_2 & \xi_2{}^3-1 \\ \xi_3{}^2 & \xi_3 & \xi_3{}^3-1 \end{vmatrix} = 0,\quad \text{oder}\quad \xi_1\xi_2\xi_3 = 1.$$

Setzen wir nun wieder für die ξ ihre Werte ein, so finden wir

$$e^{i(\tau_1+\tau_2+\tau_3)} = 1$$

und daher
$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 2\pi.$$

Wir sehen also: **Die Summe der Parameter derjenigen drei Punkte der Kurve, deren entsprechende Tangenten in einen Punkt zusammenlaufen, ist gleich vier Rechten.**

Aus der Gleichung (15), welche die Tangente darstellt, ergiebt sich die Gleichung der Normalen als

$$x\cos\frac{\tau}{2} - y\sin\frac{\tau}{2} = 3a\cos\frac{3\tau}{2};\quad .\;.\;.\;.\;.\quad (17)$$

setzen wir daher $\tau = \pi + \bar{\tau}$, so geht sie über in

$$x \sin\frac{\bar{\tau}}{2} + y \cos\frac{\bar{\tau}}{2} = 3a \sin\frac{3\bar{\tau}}{2}.$$

Da diese nun der Form nach identisch mit (15) ist, so erkennt man die Enveloppe der Normalen, d. h. **die Evolute der dreispitzigen Hypocykloide ist eine Kurve derselben Art, jedoch von der dreifachen Gröfse**; die dreispitzige Hypocykloide ist also eine Kurve, die ihrer eigenen Evolute ähnlich ist. Wenn man in Gleichung (17) τ in $\pi - \frac{\tau}{2}$ und dann in $2\pi - \frac{\tau}{2}$ verwandelt, so erhält man die Gleichungen zweier Geraden, die durch den Punkt mit den Koordinaten $3a \cos\tau$, $3a \sin\tau$, der der Geraden (17) selbst angehört, hindurchgehen; und demnach: **die Normalen der dreispitzigen Hypocykloide in den drei Punkten, die derselben Tangente angehören, laufen in einen Punkt des der Kurve umbeschriebenen Kreises zusammen.**

Differenzieren wir (17), so erhalten wir

$$x \sin\frac{\tau}{2} + y \cos\frac{\tau}{2} = 9a \sin\frac{3\tau}{2}$$

und kombinieren wir diese Gleichung mit (17) selbst, so erhalten wir folgende Werte für die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes:

$$x_0 = 3a(2\cos\tau - \cos 2\tau), \quad y_0 = 3a(2\sin\tau + \sin 2\tau).$$

Ist nun R der Krümmungsradius, so hat man

$$R = \pm 8a \sin\frac{3\tau}{2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Wenn daher R_1 und R_2 die Krümmungsradien in den beiden associierten Punkten $\left(\pi + \frac{\tau}{2}\right)$ und $\left(2\pi - \frac{\tau}{2}\right)$ sind, so hat man

$$R_1 = \mp 8a \cos\frac{3\tau}{4}, \quad R_2 = \pm 8a \sin\frac{3\tau}{4}$$

und daher die bemerkenswerte Beziehung:

$$R_1^2 + R_2^2 = 64a^2.$$

Die Gleichungen (12) geben auch den Ausdruck für das Bogendifferential $ds = 4a \sin\frac{3\tau}{2} d\tau$, und durch Integration von $\tau = 0$

$$s = \frac{8a}{3}\left(1 - \cos\frac{3\tau}{2}\right) = \frac{16a}{4} \sin^2\frac{3\tau}{4}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Machen wir darin $\tau = \frac{2\pi}{3}$, so erhalten wir $\frac{16a}{3}$ als Länge des ganzen Bogens zwischen zwei aufeinander folgenden Spitzen und daher: **Die Gesamtlänge der Hypocykloide ist gleich dem 16fachen Radius des einbeschriebenen Kreises.** — Führen wir dagegen die Integration zwischen den Grenzen τ und $\frac{\tau}{3}$ aus, so erhalten wir

$$s = \frac{8a}{3} \cos\frac{3\tau}{2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19')$$

Durch Elimination von τ aus den Gleichungen (18) und (19') findet man

$$9s^2 + R^2 = 64a^2, \qquad (20)$$

welches die natürliche Gleichung der Hypocykloide ist. Mit Hilfe derselben Gleichung (12) kann man die Quadratur eines Flächenstückes der Hypocykloide ausführen; im Besonderen findet man: **Die ganze Fläche der Hypocykloide ist doppelt so grofs als die des einbeschriebenen Kreises.**

Die dreispitzige Hypocykloide erfreut sich noch weiterer schöner Eigenschaften, die man, wie Cremona gethan hat, durch Anwendung der allgemeinen Theorie der ebenen Kurven auffinden kann. Man kann sie jedoch auch durch direkte geometrische Betrachtungen[1]) als auch durch Rechnung[2]) nachweisen. Es ist uns jedoch versagt noch weiter uns mit dieser Kurve zu beschäftigen, wir schliefsen daher dieses Kapitel, jedoch nicht ohne vorher zu bemerken, dafs die Kurven vierter Ordnung mit drei Spitzen (von denen die Kardioide und die Hypocykloide Spezialfälle sind) ferner von Padula[3]) und später von Siebeck[4]) untersucht wurden[5]). Dieser erzeugte sie (einer Idee von H. Schröter folgend) durch die Schnitte entsprechender Tangenten an zwei Kegelschnitten, indem er als entsprechend solche zwei Tangenten ansah, deren Berührungspunkte mit einem Schnittpunkte der beiden Kurven in gerader Linie liegen.

Achtes Kapitel.

Einige Fufspunktkurven vierter Ordnung der dreispitzigen Hypocykloide.

75. Die im vorigen Kapitel untersuchte dreispitzige Hypocykloide ist nicht nur wichtig wegen der grofsen Anzahl schöner Eigenschaften, die sie darbietet, sondern auch weil sie den Ausgangspunkt für andere bemerkenswerte Kurven bildet. Das vorliegende Kapitel, welchem die Aufgabe zufällt, mit denjenigen von diesen Kurven bekannt zu machen,

---

1) Intrigila, *Studio geometrico sull' ipocicloide tricuspide* (Giorn. di Matem. XXIII, 1885); C. Wirtz, *Die Steiner'sche Hypocycloide* (Diss. Strassburg, 1900).

2) Painvin, *Note sur l'hypocycloïde à trois rebroussements* (Nouv. Ann. 2. Ser. IX, 1870); Simon, *Analytische Geometrie* (Leipzig 1900) XIII. Abschnitt.

3) *Intorno le curve di 4⁰ grado che hanno tre punti di regresso di prima specie* (Annali di Tortolini III, 1852).

4) *Über die Erzeugung der Curven dritter Klasse und vierter Ordnung durch Bewegung eines Punktes* (Crelle LXVI, 1866).

5) M. s. auch die Abh. von E. Beltrami, *Su alcuni teoremi di Feuerbach e di Steiner* (Mem. dell' Acc. di Bologna, 2. Reihe V, 1875).

die von der vierten Ordnung sind, möge dies beweisen. Wir schicken zunächst folgende Bemerkung voraus: Wenn auf der Peripherie eines Kreises (mit dem Centrum O und dem Radius r) ein Punkt D gegeben ist (Taf. IV, Fig. 30), und man nimmt nach entgegengesetzten Richtungen von D aus zwei Bogen derart, dafs $arc\, DS = 2\, arc\, DS'$, so ist die Enveloppe aller Geraden SS' eine dreispitzige Hypocykloide. — Setzen wir $arc\, DS = \alpha$, so hat die Gerade SS', wenn O der Anfang, OD die x-Axe ist, die Gleichung

$$x \cos\frac{\alpha}{2} + y \sin\frac{\alpha}{2} = r \cos\frac{3\alpha}{2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Da nun diese dieselbe Gestalt hat, wie (15) des vorigen Kapitels, so ist die Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes evident.

Wenn man nun die Sehne SS' nach beiden Seiten verlängert, derart, dafs $ST = S'T' = SS'$, so ist der Ort der Punkte T' die dreispitzige Hypocykloide, jedoch der Ort der Punkte T eine neue Kurve, deren analytische Darstellung man folgendermafsen erhält: Sei H (s. dieselbe Figur) der Mittelpunkt der Sehne SS'; da man nun von dem Punkte O nach T, sowohl auf dem geradlinigen Wege OT als auch auf dem gebrochenen OHT gehen kann, so hat man, indem man auf die Axen projiziert:

$$x = \overline{OH} \cos\frac{\alpha}{2} - \overline{HT} \sin\frac{\alpha}{2}, \quad y = \overline{OH} \sin\frac{\alpha}{2} + \overline{HT} \cos\frac{\alpha}{2};$$

nun ist $OH = r \cos\frac{3\alpha}{2}$, $TH = 3r \sin\frac{3\alpha}{2}$, daher

$$x = r\left[\cos\frac{3\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2} - 3 \sin\frac{3\alpha}{2} \sin\frac{\alpha}{2}\right],$$

$$y = r\left[\cos\frac{3\alpha}{2} \sin\frac{\alpha}{2} + 3 \sin\frac{3\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2}\right],$$

oder einfacher

$$x = r(2\cos 2\alpha - \cos\alpha), \quad y = r(2\sin 2\alpha + \sin\alpha). \quad . \quad (2)$$

Setzt man $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = t$, so erhält man für x und y rationale gebrochene Ausdrücke vierter Ordnung, welche zu dem Schlusse berechtigen, dafs die Kurve, um die es sich handelt, eine Kurve vierter Ordnung mit drei Knoten und drei einen Winkel von 120^0 mit einander bildenden Symmetrieaxen ist. Wiewohl diese Kurve Stoff zu vielerlei Untersuchungen gegeben hat[1]), so wollen wir uns hier doch nicht mit einer weiteren Untersuchung derselben aufhalten.

Wir gehen vielmehr zur Betrachtung der Fufspunktkurve einer dreispitzigen Hypocykloide in Bezug auf einen Punkt des einbeschriebenen Kreises über. Sie ist eine Kurve, die den von G. de Long-

1) Angegeben in der Abhandlung von Brocard, *Le trifolium* (Journ. de math. spéc., 1891) S. 17 des Auszuges.

champs[1]) ihr gegebenen Namen Trèfle oblique (schiefes Dreiblatt) trägt, der auch von Brocard angewendet wird, dem Verfasser einer ausgezeichneten Monographie über dieselbe[2]). Die Gleichung derselben könnte man unschwer vermittelst der Gleichung (1) einer Tangente der Hypocykloide erhalten. Wir ziehen es jedoch vor, sie zu erhalten, indem wir von folgender (von De Longchamps angegebenen) Definition, durch welche sie allgemein erhalten werden kann, ausgehen: „Gegeben ein Kreis mit dem Centrum O, ein Punkt P seiner Peripherie und eine feste Gerade r (Taf. IV, Fig. 31); man ziehe von P eine beliebige Sehne PR; der um R mit dem Radius PR beschriebene Kreis möge die durch R zu r gezogene Parallele in den beiden Punkten M, M' schneiden, deren Ort dann ein „schiefes Dreiblatt“ ist[3]).“

Um die Gleichung desselben zu finden, nehmen wir ein Polarsystem mit P als Pol und dem Durchmesser des gegebenen Kreises POD als Polaraxe; nennen wir den Winkel desselben mit der Geraden r α, den Radius des genannten Kreises a, und ϱ, ω, die Koordinaten eines beliebigen Punktes M, dann ist

$$PR = 2a \cos(2\omega - \alpha), \qquad \varrho = PM = 2PR \cdot \cos(\omega - \alpha),$$

daher ist
$$\varrho = 4a \cos(2\omega - \alpha) \cos(\omega - \alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

oder wenn man lieber will:

$$\varrho = 2a \cos\omega + 2a \cos(3\omega - 2\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$

die gewünschte Gleichung. Geht man zu kartesischen Koordinaten über, so wird diese

$$\frac{(x^2+y^2)^2}{2a} = x(x^2+y^2) + x(x^2-3y^2)\cos 2\alpha + y(x^2-3y^2)\sin 2\alpha \quad . \quad . \quad (4)$$

Aus derselben ergiebt sich: Das schiefe Dreiblatt ist eine Kurve vierter Ordnung mit P als dreifachem Punkte; die zugehörigen Tangenten bilden mit der Polaraxe die Winkel $\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}, \frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2} + \alpha$, somit sind zwei derselben zu einander senkrecht und die dritte ist zur festen Geraden senkrecht. Von der unendlich fernen Geraden wird das Dreiblatt in den cyklischen Punkten der Ebene geschnitten. Aus den Plücker'schen Formeln geht hervor, dafs die betrachtete Kurve von der sechsten Klasse ist und sechs Wendepunkte sowie vier Doppeltangenten besitzt, eine derselben ist, wie gesagt, die unendlich ferne Gerade, zwei andere sind die parallel zu der festen Geraden gehenden Tangenten an den gegebenen Kreis, die letzte ist reell und im End-

1) *Sur le trifolium* (Journ. de math. spéc. 1887).

2) S. die vor. Note.

3) Es ist leicht einzusehen, dafs diese Konstruktion als eine besondere, auf den gegebenen Kreis angewandte Transformation angesehen werden kann.

lichen gelegen (s. die Figur). Wir überlassen es dem Leser mit Benutzung der vorigen Gleichung zu verifizieren, dafs der gegebene Kreis das Dreiblatt aufser im Punkte P und in den cyklischen Punkten der Ebene, noch in den Ecken ABC eines gleichseitigen Dreiecks schneidet, dafs ferner das Dreiblatt durch die Punkte Q, Q' geht, in denen die von D zur festen Geraden gezogene Parallele von dem Kreise mit dem Centrum D und dem Radius DP geschnitten wird, und dort von den Senkrechten, die von den genannten Punkten auf den Durchmesser PD gefällt sind, berührt wird. Setzt man:

$$\varrho_1 = 2a \cos \omega, \qquad \varrho_2 = 2a \cos 3\left(\frac{2\alpha}{3} - \omega\right),$$

so wird Gleichung (3′) $\qquad \varrho = \varrho_1 + \varrho_2;$

nun stellt von den eben genannten Gleichungen die erste den gegebenen Kreis dar, während die zweite jene spezielle „Rosenkurve“ darstellt, die unter dem Namen „gleichseitiges Kleeblatt“ bekannt ist. Man kann somit das schiefe Dreiblatt konstruieren, indem man die Vectoren eines Kreises zu denen eines gleichseitigen geeignet gelegenen Kleeblattes addiert[1]).

76. Jedem Werte des Winkels α entspricht ein besonderes Dreiblatt. Besonders erwähnenswert sind diejenigen, die entstehen, wenn $\alpha = 0$ oder $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist. Die Polargleichung des ersteren ist (wenn der Kürze halber $4a = d$ gesetzt wird)

$$\varrho = d \cdot \cos \varphi \cdot \cos 2\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

oder auch

$$\varrho = d \cos \varphi - d \cos \varphi \sin^2 \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5')$$

während die der zweiten Kurve lautet

$$\varrho = 4a \sin \omega \cdot \sin 2\omega \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Die durch die Gleichung (5) und (6) dargestellten Kurven wurden von G. de Longchamps gefunden, der sie bezw. Trifolium droit (gerades Dreiblatt) und Feuille double droit (gerades Zweiblatt) nannte; er gab auch eine besondere Art der Erzeugung für die erstere an, sowie ein Verfahren, welches wir noch darlegen werden, um eine noch allgemeinere Kurve als die zweite zu finden.

I. „Gegeben sei eine Strecke $OO' = d$ (s. Taf. IV, Fig. 32). Man ziehe durch O einen beliebigen Strahl, auf welchen man das Lot $O'M$ fällt; M' sei symmetrisch zu M in Bezug auf OO' und P sei der

1) Eine andere Erzeugung ist in der Cuestion 32, die von Brocard im *Progréso* (Bd. I, S. 294) vorgelegt und im Bd. III, S. 241 u. 261 gelöst wurde, enthalten. Sie hat folgenden Wortlaut: „Un hilo de longitud d está fijo á un punto A de una circumferencia de radio a, y lleva en su otro extrano un peso M que lo tiende. El hilo pasa per un pequeño anillo B que se mueve á lo largo de la circumferencia OA. Hallar el lugar de los puntos M.“

Fuſspunkt des von M' auf OM gefällten Lotes; der Ort der Punkte P ist ein gerades Dreiblatt[1]." Um die Gleichung desselben zu finden, nehmen wir O als Pol und OO' als Polaraxe, nennen H den Schnittpunkt von MM' mit OO'; man hat dann successive:

$$OM = d\cos\omega, \qquad MH = OM \cdot \sin\omega = d\sin\omega\cdot\cos\omega,$$

$$MM' = 2d\sin\omega\cdot\cos\omega, \quad PM = MM'\cdot\sin\omega = 2d\sin^2\omega\cdot\cos\omega,$$

und da nun $\varrho = OP = OM - PM$, ergiebt sich

$$\varrho = d\cos\omega - 2d\cos\omega\cdot\sin^2\omega,$$

welche Gleichung mit (5') übereinstimmt. Die zugehörige kartesische Gleichung

$$(x^2+y^2)^2 - dx(x^2-y^2) = 0$$

läſst erkennen, daſs die Kurve aus drei Blättern besteht, von denen zwei zu einander in Bezug auf OO' symmetrisch sind, das dritte ist selbst symmetrisch in Bezug auf diese Gerade; die Tangenten an die Kurve in dem dreifachen Punkte O sind die y-Axe und die Winkelhalbierer der Axenwinkel; auſser der unendlich fernen Geraden sind Doppeltangenten der Kurve die drei Geraden $x + \frac{d}{8} = 0$, $y \pm \frac{d}{4} = 0$.

Das gerade Dreiblatt hat eine sehr groſse Ähnlichkeit der Gestalt mit einer rationalen Kurve vierter Ordnung, die vor 150 Jahren von G. Cramer betrachtet wurde, der sie als „une espèce de trèfle" bezeichnete, das auf folgende Weise erzeugt werden könne[2]: „Gegeben ein Kreis mit dem Centrum C und dem Radius r, sowie ein Punkt O seiner Peripherie; man nehme als Axen zwei Geraden durch O, die mit OC die Winkel $\frac{\pi}{4}$ bilden; ist nun NP als Ordinate eines beliebigen Punktes des Kreises gezeichnet, so zeichne man den Punkt M derart, daſs $MP^2 = ON\cdot NP$ und betrachte dessen geometrischen Ort. Die Gleichung desselben ist ersichtlich

$$\left.\begin{aligned} & y^2 = x\left\{\sqrt{r^2-\left(x-\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2}-\frac{r}{\sqrt{2}}\right\} \\ \text{oder}\quad & x^4+y^4-2ax(x^2-y^2) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (7)$$

wenn man zur Vereinfachung $r = a\sqrt{2}$ setzt. Das Cramer'sche Dreiblatt ist demnach eine Kurve vierter Ordnung mit O als dreifachem Punkte, der Geraden $x + a(\sqrt{2}-1) = 0$ als Doppeltangente u. s. w.; sie geht aber nicht durch die cyklischen Punkte.

II. „Gegeben ein rechter Winkel AOB, auf dessen Schenkeln die Punkte A und B markiert sind. Auf eine beliebige durch B gezogene Gerade fälle man das Lot AM (Taf. V, Fig. 33); wenn nun

1) G. de Longchamps, *Essai sur la géometrie de la règle et de l'équerre* (Paris 1890) S. 125.

2) *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Genf 1750) S. 421.

MH senkrecht zu OA und HP senkrecht zu AM, so ist der Ort der Punkte P ein schiefes Zweiblatt[1]." Um dessen Gleichung zu finden, bezeichnen wir die Entfernungen OA, OB mit a, b, nehmen A als Pol und AO als Polaraxe. Projizieren wir den Linienzug $AOBM$ auf AM, so erhalten wir

$$AM = a \cos \omega + b \sin \omega .$$

Anderseits haben wir

$$\varrho = AP = AH \cdot \cos \omega = AM \cdot \cos^2 \omega ,$$

daher schliefslich

$$\varrho = a \cos^3 \omega + b \sin \omega \cos^2 \omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

die gesuchte Gleichung ist. Die entsprechende kartesische lautet

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 (ax + by) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Das schiefe Zweiblatt hat einen dreifachen Punkt in A; die entsprechenden Tangenten sind die y-Axe, doppelt gezählt, und die Gerade $ax + by = 0$. Im Spezialfalle $a = 0$ werden (8) und (9) zu

$$\varrho = b \cdot \sin \omega \cos^2 \omega \quad . \quad . \quad (8'). \qquad (x^2 + y^2)^2 = b x^2 y \quad . \quad . \quad (9')$$

Die erstere verwandelt sich in Gleichung (6), wenn man b in $8a$, ω in $\frac{\pi}{2} - \omega$ verwandelt, während die zweite Gleichung beweist, dafs die dargestellte Kurve symmetrisch zur y-Axe ist; daher der Name gerades Zweiblatt, den sie erhalten hat (s. Taf. V, Fig. 34).

Aus (9') kann man ableiten, indem man x und y vertauscht und statt b 4α setzt

$$y = \pm \sqrt{\alpha x} \pm \sqrt{\alpha x - x^2} ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9'')$$

daher gehört das gerade Zweiblatt zur Klasse derjenigen Kurven, denen das Kap. 10 gewidmet ist. Es löst eine von Montucci in den *Nouvelles Annales* im Jahre 1857 (S. 449) vorgelegte Frage, und ist identisch mit der Duplicatrix-Kurve, die von demselben Geometer in der Arbeit *Résolution de l'équation du 5e degré* (Paris 1869) angewendet wird. Wir bemerken noch, dafs die Gleichung (9'') für die Untersuchung des geraden Zweiblattes sehr nützlich ist[2]): sie führt alsbald zur Bestimmung der Fläche der Kurve

$$2 \left\{ \int_0^\alpha \left(\sqrt{\alpha x} + \sqrt{\alpha x - x^2} \right) dx - \int_0^\alpha \left(\sqrt{\alpha x} - \sqrt{\alpha x - x^2} \right) dx \right\}$$
$$= 4 \int_0^\alpha \sqrt{\alpha x - x^2}\, dx = \frac{\pi \alpha^2}{2} .$$

Es soll nicht übergangen werden, dafs in der *Introduction* von Cramer sich noch eine Kurve findet, deren Gestalt dem geraden

1) G. de Longchamps, *Essai* S. 122.
2) Vgl. Elgé, *Sur le folium double* (Journ. de Math. spéc. 1896).

Zweiblatt sehr ähnlich ist. Ihre Erzeugung ist folgende[1]): „Gegeben ein Kreis mit dem Centrum C und dem Radius r, einer seiner Durchmesser OD und die Tangente in dem Endpunkte D; man nehme eine Strecke MN, die parallel zu OD zwischen der Peripherie und der Tangente belegen ist, trage auf der zugehörigen Geraden das Stück $NP = \sqrt{ON \cdot NM}$ ab, und betrachte den Ort des Punktes P.“ Dieser hat zur Gleichung $x^4 + y^4 = 2axy^2$ und eine einfache Diskussion beweist die Ähnlichkeit in der Gestalt mit dem geraden Zweiblatt.

77. Wir haben in den beiden vorigen Nummern gesehen, dafs das allgemeine Dreiblatt oder Trifolium als Spezialfälle das gerade Dreiblatt und das gerade Zweiblatt hat, während das reguläre Dreiblatt, dessen wir beiläufig am Schlusse von Nr. **75** Erwähnung gethan haben, nicht dazu gehört. Nun hat Brocard bemerkt[2]), dafs es noch eine andere Fufspunktkurve der dreispitzigen Hypocykloide giebt, deren Spezialfälle die sämtlichen drei Kurven sind und noch andere. Es ist die Fufspunktkurve in Bezug auf einen Punkt A der Spitzentangenten. Um die Gleichung derselben zu bilden, bezeichnen wir mit a die Abscisse des Punktes A und beachten, dafs das von A auf die Gerade (1) gefällte Lot die Gleichung hat

$$(x - a) \sin\frac{\alpha}{2} - y \cos\frac{\alpha}{2} = 0.$$

Die Gleichung der Brocard'schen Fufspunktkurve erhalten wir nun durch Elimination von α aus dieser Gleichung und aus (1). Nun giebt diese Gleichung

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{y}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}}, \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}},$$

so dafs, wenn man (1) folgendermafsen schreibt

$$x \cos\frac{\alpha}{2} + y \sin\frac{\alpha}{2} = r\left[\cos^3\frac{\alpha}{2} - 3\cos\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right],$$

sich alsbald folgende analytische Darstellung der fraglichen Kurve ergiebt

$$[x(x-a) + y^2][(x-a)^2 + y^2] = r(x-a)[(x-a)^2 - 3y^2]. \quad (10)$$

Verlegen wir den Anfang nach A und gehen dann zu Polarkoordinaten über, so erhalten wir die anderen Gleichungen

$$(x^2 + y^2 + ax)(x^2 + y^2) = rx(x^2 - 3y^2). \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

$$\varrho = (r - a)\cos\omega - 4r\cos\omega\sin\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

oder

$$\varrho = -(a + 3r)\cos\omega + 4r\cos^3\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12')$$

Gleichung (11) läfst erkennen, dafs die Brocard'sche Fufspunktkurve eine rationale cirkulare Kurve vierter Ordnung ist mit A als drei-

1) Cramer, *Introduction* S. 413.
2) S. die oben citierte Monographie S. 26 ff. des Auszuges.

fachem Punkte; von den zugehörigen Tangenten ist eine (die y-Axe) immer reell, die anderen (symmetrisch zu Ox) sind es, wenn A innerhalb des mit r um O beschriebenen Kreises liegt; in diesem Falle besteht die Kurve aus drei (reellen) Blättern, die zu je zweien drei gemeinsame Tangenten haben; diese und die unendlich ferne Gerade sind Doppeltangenten der Kurve u. s. w.

Die Gleichungen (12) und (12') hingegen lassen die hervorragenderen Spezialfälle sehr gut erkennen

1) Wenn $a + 3r = 0$, so wird (12') $\varrho = 4r \cos^3 \omega$, welche Gleichung, wie wir Abschn. V, Kap. 11 sehen werden, eine sekundäre Proportionatrix darstellt.

2) Wenn $a = r$, wird (12)
$$\varrho = -4r \cos \omega \sin^2 \omega = -2r \sin \omega \sin 2\omega,$$
welches, wie wir gesehen haben, die Gleichung eines geraden Zweiblattes ist.

3) Machen wir in (12) $r - a = d$, $2r = d$, so bekommen wir die Gleichung eines geraden Dreiblattes.

4) Setzen wir endlich $a = 0$, so wird (12')
$$\varrho = r(4\cos^3 \omega - 3 \cos \omega) = r \cos 3\omega,$$
die Gleichung eines regulären Trifoliums.

Somit ist unsere Behauptung am Anfange dieser Nummer bewiesen und zu gleicher Zeit eine gemeinsame Art der Erzeugung für alle vier speziellen Kurven angegeben.

Neuntes Kapitel.

Die Cartesischen Ovale.

78. Werfen wir einen Blick auf die vier vorhergehenden Kapitel, so erkennen wir leicht das sie verknüpfende Band. Nach der Betrachtung der Konchoide des Nikomedes (Kap. 5) beschäftigten wir uns mit den Verallgemeinerungen, die sie erfahren kann, insbesondere mit den Kreis-Konchoiden (Kap. 6); da eine derselben eine dreispitzige Kurve vierter Ordnung ist, so wurden wir veranlafst, eine andere spezielle Kurve mit derselben Eigenschaft zu betrachten, nämlich die dreispitzige Hypocykloide (Kap. 7), und darauf gewisse Kurven vierter Ordnung, die sich von dieser herleiten (Kap. 8).

Nachdem wir nun diese Gruppe erschöpft haben, nehmen wir die chronologische Anordnung wieder auf, von der wir uns nur dann frei machen, wenn der logische Zusammenhang es erfordert, und knüpfen an eine Bemerkung von Descartes im II. Buche seiner

Géométrie an. Daselbst teilt er, um an einem neuen Beispiele die von ihm erfundenen neuen Methoden zu illustrieren, die Definition und die Haupteigenschaften mit „de certaines ovales que vous verrez être très-utiles pour la théorie de la catoptrique"[1]). Es sind diejenigen Kurven, die man gewöhnlich die Cartesischen Ovale nennt[2]). Descartes giebt von ihnen folgende Erzeugung, indem er diejenigen Betrachtungen, die zu ihrer Entdeckung geführt haben, verheimlicht:

„Es seien zwei Punkte F, G gegeben und eine Gerade r, die FG in A schneidet (Taf. V, Fig. 35); man beschreibe um F einen Kreis mit beliebigem Radius, und B sei einer der beiden Schnitte desselben mit der Geraden FG. Man bestimme nun auf r einen Punkt C derart, dafs $\frac{AC}{AB} = \lambda$, wo λ eine Konstante (den Brechungsindex) bedeutet; „à savoir celle qui mésure les réfractions, si on veut s'en servir pour la dioptrique". Man nehme auf r auch die Strecke $AR = AG$ und beschreibe um G als Mittelpunkt und mit dem Radius CR einen zweiten Kreis, der den schon beschriebenen in M schneidet. Der Ort der Punkte M ist ein Cartesisches Oval."

Aus dieser ziemlich komplizierten Konstruktion kann man leicht eine elegante Eigenschaft ableiten, die zur Charakterisierung der hier betrachteten Kurven sehr geeignet ist. Beachten wir nämlich, dafs infolge der Konstruktion

$$FM = FB = FA + AB = FA + \frac{1}{\lambda} AC,$$
$$GM = RC = AC - AR = AC - AG,$$

so hat man ferner:

$$\lambda \cdot FM - GM = \lambda \cdot AF - AG;$$

oder wenn man der gröfseren Symmetrie wegen $\lambda = -\frac{\mu}{\nu}$ setzt

$$\mu \cdot MF + \nu \cdot MG = \mu \cdot AF - \nu \cdot AG;$$

nun ist die rechte Seite eine bekannte Gröfse; setzen wir daher

$$\mu \cdot AF - \nu \cdot AG = l, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

so erhalten wir $$\mu \cdot MF + \nu \cdot MG = l, \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

---

1) *La géométrie de René Descartes* (Nouv. éd. Paris 1886) S. 41 ff.

2) Vallée (*Mémoire sur la vision*, Mém. des Savants étr. XII, 1854) gebraucht den Namen Optoïde, der jedoch bald in Vergessenheit geriet. — Betr. der Bibliographie s. Liguine, *Liste des travaux sur les ovales de Descartes* (Bull. des Sciences mathématiques 2. Ser. VI, 1882). — Wir fügen noch hinzu, dafs De Mairan andere Kurven vierter Ordnung betrachtete, die in der mathem. Theorie des Lichts Anwendung finden; so sind die anaklastischen (Strahlenbrechungs-) Kurven mit der Gleichung $\frac{x^2y^2 + y^2(b+y)^2}{x^2y^2 + a^2(b+y)^2} = \frac{m^2}{n^2}$. (S. die Abh. *Sur la refraction des corps* in den Mém. de l'Acad. des Sciences, Paris 1740).

welche Gleichung aussagt: **Ein Cartesisches Oval ist der Ort derjenigen Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten, multipliziert mit gegebenen Zahlen, eine konstante Summe ergeben**[1]). Ein Vergleich von (2) mit (1) zeigt, daſs das Oval durch den Punkt A geht; wird $\mu = \nu$, so läſst (2) erkennen, daſs dann das Oval zu einer Ellipse mit den Brennpunkten F und G wird, und wenn $\nu = -\mu$ eine Hyperbel, welche Fälle wir aus unseren Betrachtungen beständig ausschlieſsen.

Eine unmittelbare Folgerung aus Gleichung (2) ist die, daſs das Cartesische Oval zu derjenigen Kategorie von Kurven gehört, die gebildet wird von den Örtern der Punkte, deren Abstände von n festen Polen, multipliziert mit beliebigen Konstanten, eine konstante Summe geben. Man erhält nun bekanntlich die Normale eines solchen Ortes im Punkte M, wenn man von M aus zu diesen Polen hin Strecken zeichnet, die jenen Konstanten proportional sind, und deren Resultierende konstruiert[2]). Insbesondere um für das Oval die Normale im Punkte M zu konstruieren, nehmen wir auf den Geraden MF und MG zwei Punkte P und Q derart, daſs $\frac{MP}{\mu} = \frac{MQ}{\nu}$ und vervollständigen das Parallelogramm $PMQN$; seine Diagonale MN wird die Normale sein. Wenn wir nun die Winkel FMN und GMN mit i und r bezeichnen, so haben wir $\frac{MP}{\sin r} = \frac{MQ}{\sin i}$, welche Gleichung mit der vorigen verglichen ergiebt: $\frac{\sin r}{\sin i} = \frac{\mu}{\nu} = \lambda$. Dies zeigt, daſs, wenn ein Cartesisches Oval die Trennungslinie zweier Medien bildet, deren Brechungsindex gleich λ ist, ein von F ausgehendes Lichtstrahlenbüschel sich in ein Büschel von Strahlen verwandelt, die in G zusammenlaufen[3]); daher die Wichtigkeit der besprochenen Kurve für die Optik, und die Erklärung dafür, daſs man die beiden Punkte F und G gewöhnlich die Brennpunkte nennt, sowie der Name aplanetische Linie (d. h. Linie ohne Abweichung), den man dieser Kurve gegeben hat.

79. Nehmen wir den Brennpunkt F als Pol, nennen die Entfernung FG h, und die Polarkoordinaten ϱ, ω, so nimmt (2) folgendes Aussehen an:

$$\mu\varrho + \nu\sqrt{\varrho^2 - 2\varrho h \cos\omega + h^2} = l,$$

oder

$$(\nu^2 - \mu^2)\varrho^2 + 2\varrho(\mu l - \nu^2 h \cos\omega) + \nu^2 h^2 - l^2 = 0. \quad . \quad (3)$$

1) Die Gl. (2) ist eigentlich die bipolare Gleichung des Ovals für ein Koordinaten-System, das die festen Punkte F und G als Pole hat. Von diesem Gesichtspunkte aus ist diese Gleichung schon reichlich ausgebeutet worden.

2) Peano, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (Torino 1887) S. 140.

3) Zu denselben Schlüssen gelangte Frenet (*Recueil d'exercises sur le calcul infinitésimal*, 3. Aufl. Paris 1873, S. 221), indem er einige allgemeine Formeln anwandte; somit lieferte er analytisch, was Cartesius synthetisch darlegte.

In dem speziellen Falle, dafs $\nu = \frac{l}{h}$, vereinfacht sich diese Gleichung und wird

$$\varrho = \frac{2h\nu^2}{\nu^2 - \mu^2}\cos\omega - \frac{2\mu l}{\nu^2 - \mu^2}$$

und, wegen Gleichung (3) in Nr. **70**, besagt diese Gleichung: **Die Pascal'sche Schnecke ist ein specielles Cartesisches Oval.**

An dieser Stelle dürfte es angebracht sein zu bemerken, dafs Chasles glaubte eine geometrische Transformation gefunden zu haben, durch die ein Kreis in ein Cartesisches Oval übergehe[1]), während diese nur eine Pascal'sche Schnecke giebt[2]). Wenn man nämlich auf den Kreis $\varrho^2 - 2a\varrho\cos\omega + b^2 = 0$ die durch die Formeln $\varrho = \sqrt{m\varrho_1}$, $\omega = \frac{\omega_1}{2}$ gekennzeichnete Transformation anwendet, so erhält man die Kurve mit der Gleichung:

$$[m^2(x^2+y^2) - 2ma^2x + b^4] - 4m^2(a^2-b^2)^2(x^2+y^2) = 0;$$

diese ist eine Schnecke mit dem Punkte $x = \frac{b^2}{m}$, $y = 0$ als Doppelpunkt. Wenn man dagegen auf die Schnecke mit der Gleichung

$$\varrho_1 = a + b\cos\omega_1$$

die Transformation $\omega = \omega_1$, $\varrho = \frac{\varrho_1 \pm \sqrt{\varrho_1{}^2 - c^2}}{2}$ anwendet, so erhält man die Kurve mit der Polargleichung:

$$\varrho^2 - \varrho(a + b\cos\omega) + \frac{c^2}{4} = 0,$$

und diese Kurve ist somit ein Cartesisches Oval[3]).

Die aus den vorhergehenden Betrachtungen sich ergebende Konstruktion der Ovale bietet ein erheblich geringeres Interesse, als die andere, die wir nun darlegen wollen: Wenn a', b' die Koordinaten von F sind und a'', b'' die von G, so kann man Gleichung (2) schreiben

$$\mu\sqrt{(x-a')^2+(y-b')^2} + \nu\sqrt{(x-a'')^2+(y-b'')^2} = l; \quad . \quad (4)$$

nun ist es immer möglich, auf unendlich viele Weisen zwei Längen r' und r'' zu bestimmen derart, dafs

$$\mu r' + \nu r'' = l.$$

Infolgedessen kann (4) geschrieben werden als

$$\frac{\sqrt{(x-a')^2+(y-b')^2} - r'}{\sqrt{(x-a'')^2+(y-b'')^2} - r''} = -\frac{\nu}{\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

1) *Aperçu historique,* Note XXI.

2) Der Irrtum von Chasles wurde schon 1850 beseitigt von Cayley (*Addition au mémoire sur quelques transmutations des lignes courbes,* Journ. de Math. XV), und neuerdings von M. d'Ocagne (*Sur un mode de génération des ovales de Descartes* C. R. XCVII, 1883).

3) Cayley, *Note on the theorie of cartesians* (Quarterly Journ. XV, 1878); vgl. auch den vorhergehenden Aufsatz desselben Verf.: *On the mechanical description of a cartesian* (Das. XIII, 1875).

Nun giebt der Zähler auf der linken Seite den Abstand des Punktes (x, y) von dem Kreise Γ' mit dem Mittelpunkte (a', b') und dem Radius r' an; eine ähnliche Bedeutung hat der Nenner in Bezug auf den Kreis Γ'' mit dem Centrum (a'', b'') und dem Radius r''. Man folgert daraus, mit Newton: **Ein Cartesisches Oval kann als Ort der Punkte betrachtet werden, deren Abstände von zwei festen Kreisen in einem gegebenen Verhältnisse stehen**[1]).

Aus diesem Satze läfst sich eine andere von Chasles entdeckte Erzeugung ableiten, die durch folgenden Satz wiedergegeben wird: Gegeben zwei Kreise Γ' und Γ'' und ein Punkt O ihrer Centrale $O'O''$. Läfst man um O eine Gerade t rotieren, welche die Peripherieen in den Punkten $P_1', P_2'; P_1'', P_2''$ schneidet, so treffen sich die Radien $O'P_1'$ und $O'P_2'$ von Γ' mit den Radien $O''P_1''$ und $O''P_2''$ von Γ'' in vier Punkten M, deren Ort ein Cartesisches Oval ist. Betrachtet man nämlich das Dreieck $MO'O''$, das von der Geraden t in den Punkten O, P_1', P_1'' geschnitten wird, so ist $\frac{O'O}{O''O} \cdot \frac{O''P_1''}{MP_1''} \cdot \frac{MP_1'}{O'P_1'} = 1$, und daher (wenn r', r'' die Radien der gegebenen Kreise sind) $\frac{MP_1'}{MP_1''} = \frac{O''O}{O'O} \cdot \frac{r'}{r''} = const.$; und diese Beziehung führt, auf Grund des Newton'schen Satzes, leicht zu dem Schlusse auf den Chasles'schen Satz. Dieser Satz, wenngleich nur ein Corollar des vorigen, ist nicht nur wichtig, weil er eine leichte Weise die Kurve punktweise zu zeichnen liefert, sondern auch weil er zu einer sehr guten Konstruktion der Tangente führt: schon Chasles machte die Bemerkung, dafs die Tangente in M und die Tangenten an Γ' und Γ'' in den entsprechenden Punkten in ein und denselben Punkt zusammenlaufen. Aus demselben Satze kann man auch entnehmen, dafs die vollständige Cartesische Kurve nicht aus einem einzigen Ovale besteht (wie Descartes und seine unmittelbaren Nachfolger glaubten), sondern wie Chasles bemerkte, aus zwei konjugierten Ovalen, die keinen Punkt im Endlichen gemeinsam haben.

Die Gleichung (4) führt uns auch zu einer stereometrischen Erzeugung der betrachteten Kurve[2]). Betrachten wir nämlich zwei Rotationskegel mit parallelen Axen, so kann man dieselben durch folgende Gleichungen dargestellt erhalten:

$$(x - a')^2 + (y - b')^2 = \frac{r'^2(h' - z)^2}{h'^2},$$

$$(x - a'')^2 + (y - b'')^2 = \frac{r''^2(h'' - z)}{h''^2};$$

---

1) *Philosophiae naturalis Principia mathematica* Buch I, Satz XIV.

2) F. J. (Gabriel Marie), *Exercises de géométrie déscriptive* (3. Aufl. Tours et Paris, 1893) S. 693. Augenscheinlich ist diese Erzeugung ein Spezialfall der zu Anfang von Nr. 58 für alle elliptischen Kurven vierter Ordnung angegebenen.

die Projektion der Schnittlinie dieser beiden Oberflächen auf die xy-Ebene wird nun durch eine Gleichung dargestellt werden, die sich ergiebt, wenn man aus den letzten Gleichungen z eliminiert; dies giebt:

$$h' - h'' = \frac{h'}{r'}\sqrt{(x-a')^2 + (y-b')^2} - \frac{h''}{r''}\sqrt{(x-a'')^2 + (y-b'')^2}.$$

Da nun diese Gleichung dieselbe Gestalt wie (4) hat, so schliefst man: **Die Schnittlinie zweier Rotationskegel mit parallelen Axen projiziert sich auf eine zu diesen Axen senkrechte Ebene in ein Cartesisches Oval.**

Dies sind wohl die interessantesten, jedoch nicht die einzigen Arten, die aplanetischen Kurven zu erzeugen; wir können uns jedoch mit der Darlegung derselben nicht weiter aufhalten und verweisen den, der die übrigen kennen lernen will, auf die Note XXI des *Aperçu historique.*

80. Die interessantesten Eigenschaften der Cartesischen Ovale ergeben sich aus der Untersuchung ihres Verhaltens im Unendlichen. Um dieses zu bestimmen, nehmen wir wieder die Gleichung (4) und setzen der Einfachheit halber $a' = -a'' = a$, $b' = b'' = 0$; setzen wir ferner $x + iy = \frac{\xi}{\zeta}$, $x - iy = \frac{\eta}{\zeta}$, so wird diese

$$\mu\sqrt{(\xi - \alpha\zeta)(\eta - \alpha\zeta)} + \nu\sqrt{(\xi + \alpha\zeta)(\eta + \alpha\zeta)} = \lambda\zeta,$$

oder, wenn wir die Wurzeln wegschaffen,

$$\begin{aligned}&[\mu^2(\xi - \alpha\zeta)(\eta - \alpha\zeta) - \nu^2(\xi + \alpha\zeta)(\eta + \alpha\zeta)]^2 \\ &- 2l^2\zeta^2[\mu^2(\xi - \alpha\zeta)(\eta - \alpha\zeta) + \nu^2(\xi + \alpha\zeta)(\eta + \alpha\zeta)] + l^4\zeta^4 = 0. \quad (6)\end{aligned}$$

Diese zeigt, dafs die beiden Punkte ($\xi = 0$, $\zeta = 0$), ($\eta = 0$, $\zeta = 0$), d. h. die beiden cyklischen Punkte der Ebene Doppelpunkte der Kurve (6) sind. Die Tangenten in dem ersteren (in ξ, η, ζ ausgedrückt) werden gemeinsam durch die Gleichung

$$[\mu^2(\xi - \alpha\zeta) - \nu^2(\xi + \alpha\zeta)]^2 = 0$$

dargestellt, daher ist dieser Punkt eine Spitze[1]), und die Spitzentangente hat die Gleichung $\xi = \frac{\mu^2 + \nu^2}{\mu^2 - \nu^2}\alpha\zeta$; in kartesischen Koordinaten dagegen wird sie durch $x + iy = \frac{\mu^2 + \nu^2}{\mu^2 - \nu^2}a$ wiedergegeben.

Ebenso ist der andere Kreispunkt auch eine Spitze und die kartesische Gleichung der zugehörigen Tangente $x - iy = \frac{\mu^2 + \nu^2}{\mu^2 - \nu^2}a$.

---

1) Diese wichtige Bemerkung rührt von Cayley her (s. die o. a. *Addition au mémoire sur quelques transmutations des lignes courbes*), der somit die Behauptung von Chasles, dafs die cyklischen Punkte Doppelpunkte des Ovals seien, berichtigte. Infolgedessen ist es von der 6., nicht, wie der berühmte französische Geometer annahm, von der 8. Klasse.

Die beiden so gefundenen Spitzentangenten schneiden sich in dem reellen Punkte mit den Koordinaten

$$x = \frac{\mu^2 + \nu^2}{\mu^2 - \nu^2} a, \quad y = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

und dieser ist ein aufserordentlicher mehrfacher Brennpunkt der Kurve.

Um die gewöhnlichen Brennpunkte zu finden, suchen wir diejenigen Tangenten auf, die sich von dem Punkte $\xi = 0$, $\zeta = 0$ an das Oval (6) ziehen lassen. Setzen wir zu dem Zwecke in Gleichung (6) $\zeta = k\xi$; die resultierende Gleichung ist teilbar durch ξ^2, und wir wählen k so, dafs nach Abscheidung dieses Faktors man eine Gleichung in $\frac{\xi}{\zeta}$ mit einer zweifachen Wurzel hat. Damit dies eintrete, mufs k der Bedingung genügen

$$(p^2 - q^2)(kl^2 + 2ap) = 0,$$

wo wir der Kürze wegen

$$\mu^2(1 - ak) - \nu^2(1 + ak) = p, \quad \mu^2(1 - ak) + \nu^2(1 + ak) = q$$

gesetzt haben. Nun zerfällt diese Gleichung in folgende drei

$$p - q = 0, \quad p + q = 0, \quad kl^2 + 2ap = 0,$$

welche für $\frac{1}{k}$ die drei Werte geben

$$a, \quad -a, \quad a\frac{\mu^2 + \nu^2}{\mu^2 - \nu^2} - \frac{l^2}{2a}\frac{1}{\mu^2 - \nu^2}.$$

Folglich kann man von dem cyklischen Punkte $\xi = 0$, $\zeta = 0$ an das Oval (6) drei Tangenten ziehen, die bezw. die drei Gleichungen haben

$$x + iy = a, \quad x + iy = -a, \quad x + iy = a\frac{\mu^2 + \nu^2}{\mu^2 - \nu^2} - \frac{l^2}{2a}\frac{1}{\mu^2 - \nu^2};$$

ebenso sind

$$x - iy = a, \quad x - iy = -a, \quad x - iy = a\frac{\mu^2 + \nu^2}{\mu^2 - \nu^2} - \frac{l^2}{2a}\frac{1}{\mu^2 - \nu^2}$$

die Tangenten von dem anderen cyklischen Punkte. Es folgt daraus, dafs die Kurve als Brennpunkte die folgenden drei Punkte besitzt

$$x = a,\ y = 0; \quad x = -a,\ y = 0; \quad x = a\frac{\mu^2 + \nu^2}{\mu^2 - \nu^2} - \frac{l^2}{2a}\frac{1}{\mu^2 - \nu^2},\ y = 0. \quad (8)$$

Die beiden ersten sind nichts weiter als die Fundamentalpunkte F und G, die daher nicht nur Brennpunkte im optischen Sinne, sondern auch im Plücker'schen Sinne sind; der dritte ist ein neuer Brennpunkt H, auf den Chasles zuerst die Geometer aufmerksam gemacht hat[1]), der jedoch auch nicht dem Scharfsinne

1) *Aperçu historique*, Note XXI.

Descartes entgangen zu sein scheint[1]). Wir wollen nun zeigen, dafs sich die Kurve in Bezug auf ihre drei Brennpunkte ganz gleichartig verhält. Zu dem Zwecke nehmen wir eine Koordinatenverschiebung vor, indem wir als neuen Anfangspunkt den singulären Brennpunkt der Kurve nehmen; in Bezug auf diesen haben die Punkte F, G, H als Koordinaten bezw.

$$\alpha = -\frac{2a\nu^2}{\mu^2-\nu^2}, \quad \beta = -\frac{2a\mu^2}{\mu^2-\nu^2}, \quad \gamma = -\frac{l^2}{2a}\frac{1}{\mu^2-\nu^2}.$$

Beachten wir nun, dafs

$$\alpha+\beta+\gamma = -\frac{4a^2(\mu^2+\nu^2)+l^2}{2a(\mu^2-\nu^2)},$$

$$\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta = \frac{4a^2\mu^2\nu^2+l^2(\mu^2+\nu^2)}{(\mu^2-\nu^2)^2},$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{2al^2\mu^2\nu^2}{(\mu^2-\nu^2)^3},$$

so erhält man als neue Gleichung des Ovals die folgende:

$$[x^2+y^2-(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)]^2+4\alpha\beta\gamma[2x-(\alpha+\beta+\gamma)]=0,\text{[2])} \quad (9)$$

deren vollständige Symmetrie in Bezug auf die Konstanten α, β, γ das behauptete gleichartige Verhalten der Kurve in Bezug auf die drei Brennpunkte beweist.

Eine unmittelbare Folgerung aus dieser Thatsache ist, dafs für alle Punkte M des Ovals wir noch zwei andere ähnliche Beziehungen wie (2) haben, nämlich folgender Art:

$$\mu' \cdot MG + \nu' \cdot MH = l', \quad \mu'' \cdot MH + \nu'' \cdot MF = l'';$$

jede dieser Beziehungen mit (2) kombiniert zeigt, **dafs zwischen den Abständen eines Punktes M eines Cartesischen Ovals von den drei Brennpunkten F, G, H eine homogene Relation mit konstanten Koeffizienten besteht von folgendem Typus:**

$$f \cdot MF + g \cdot MG + h \cdot MH = 0.\text{[3])}$$

1) Vgl. P. Tannery, *Les „excerpta" ex M.SS. R. Descartes* (Abh. zur Geschichte der Mathematik IX, 1899, S. 509). — Es soll hier noch hervorgehoben werden, dafs die betrachtete Kurve aufserhalb ihrer Ebene unzählig viele Brennpunkte besitzt, die eine Kurve dritter Ordnung, die in der durch FGH senkrecht zur Ebene des Ovals gehenden Ebene liegt, ausfüllen (s. Darboux, *Théorèmes sur l'intersection d'une sphère et d'une surface du second ordre,* Nouv. Ann. 2. Ser. III, 1864).

2) Panton, *The educational Times,* Question 2622.

3) Die Koeffizienten f, g, h werden als Funktion von α, β, γ folgendermafsen ausgedrückt

$$f = (\beta-\gamma)\sqrt{\alpha}, \quad g = (\gamma-\alpha)\sqrt{\beta}, \quad h = (\alpha-\beta)\sqrt{\gamma}.$$

Die so gefundene trinomische Gleichung kann für eine mechanische Zeichnung des Ovals verwendet worden. S. Zeuthen, *Om mekanisk konstruktion af Descartes ovaler ved Hjälf af Snore* (*Tidskrift,* 4. Ser. VI, 1882.)

Aber auch die Gleichung (9) kann sehr bequem zur Untersuchung des Cartesischen Ovals verwendet werden. Sie läſst z. B. erkennen, daſs $x = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$ die Gleichung der einzigen Doppeltangente ist, welche die Kurve besitzt und daſs die zugehörigen Berührungspunkte auf dem Kreise $x^2 + y^2 = \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta$ liegen. Sie läſst ferner erkennen, daſs man, um die Tangenten einer bestimmten Richtung an die Kurve (9) zu finden, diese mit folgender Gleichung kombinieren muſs:

$$\frac{[x^2 + y^2 - (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)]x + 2\alpha\beta\gamma}{[x^2 + y^2 - (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)]y} = \tau, \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

wo τ eine gegebene Konstante ist. Nun sind die beiden Gleichungen (9), (10) äquivalent mit folgenden

$$2\alpha\beta\gamma - (\tau y - x)[x^2 + y^2 - (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)] = 0,$$
$$\alpha\beta\gamma + (\tau y - x)^2[2x - (\alpha + \beta + \gamma)] = 0;$$

und da aus diesen die neue Gleichung

$$2(\tau y - x)[2x - (\alpha + \beta + \gamma)] + x^2 + y^2 - (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = 0 \quad . \quad (11)$$

hervorgeht, so **liegen die Berührungspunkte der sechs zu einer bestimmten Richtung parallelen Tangenten eines Cartesischen Ovals auf einem Kegelschnitte.** — Man beachte ferner, daſs τ in (11) linear auftritt, und so ersieht man, daſs die ∞^1 durch (11) dargestellten Kegelschnitte ein Büschel bilden, dessen Grundpunkte die Schnitte der Hyperbel

$$3x^2 - y^2 - 2(\alpha + \beta + \gamma)x + (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = 0$$

mit den beiden Geraden

$$y = 0 \quad \text{und} \quad x = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \quad \text{sind.}$$

Die Gleichung (9) führt uns schlieſslich noch zu einer wichtigen Folgerung. Wenn α, β, γ die Wurzeln der Gleichung sind

$$\omega^3 - p_1\omega^2 + p_2\omega - p_3 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

so läſst sich (9) schreiben

$$(x^2 + y^2 - p_2)^2 - 4p_3(2x - p_2) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (9')$$

vorausgesetzt also, daſs (12) drei reelle Wurzeln ω hat, so stellt (9′) ein Cartesisches Oval dar; läſst man jedoch diese Voraussetzung fallen und nimmt bloſs an, daſs die Zahlen p_1, p_2, p_3 reell sind, so stellt die Gleichung (9) eine noch allgemeinere reelle Kurve vierter Ordnung dar; man hat sie, die Salmon'sche Bezeichnung adoptierend, eine Cartesische Kurve genannt. Von den drei in gerader Linie liegenden Brennpunkten, die eine solche Kurve besitzt, ist einer reell und die beiden anderen konjugiert imaginär.

Kehren wir noch ein letztes Mal zum Cartesischen Oval zurück, um noch folgende drei Sätze zum Schlusse anzuführen:

1) Ein Cartesisches Oval besitzt acht Wendepunkte, die auf einer cirkularen Kurve dritter Ordnung liegen[1]).
2) Die Summe der Flächen der beiden konjugierten Ovale ist gleich dem doppelten Inhalt desjenigen Kreises, der den dreifachen Brennpunkt zum Centrum hat und durch die Berührungspunkte der Doppeltangente der Kurve geht[2]).
3) Ein beliebiger Bogen des Cartesischen Ovals ist gleich der Summe dreier Ellipsenbögen[3]).

Zehntes Kapitel.

Einige polyzomale symmetrische Kurven vierter Ordnung.

81. Wenn $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ die Gleichungen dreier Kegelschnitte in kartesischen Koordinaten sind, so stellt die Gleichung

$$\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2} + \sqrt{f_3} = 0, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

wo die Wurzeln immer mit beiden Vorzeichen genommen werden sollen, eine Kurve vierter Ordnung dar; denn, wenn man die Gleichung (1) rational macht, so wird sie zu

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 - 2f_2f_3 - 2f_3f_1 - 2f_2f_1 = 0.$$

Diese Kurve gehört, wie jede Kurve vierter Ordnung, zur Klasse der Polyzomal-Kurven, von denen wir noch im 6. Kap. des V. Abschn. handeln werden. Wenn im Besonderen f_1 und f_2 quadratische Funktionen nur von x sind und $f_3 = y^2$ ist, so gilt dasselbe von den Kurven mit der Gleichung

$$y = \sqrt{f_1} + \sqrt{f_2}, \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

bei welchen es sich lohnt zu verweilen, da sich unter diesen einige spezielle Kurven finden, die aus verschiedenen Gründen bemerkenswert sind.

Welcher Art auch die durch f_1 und f_2 dargestellten quadratischen Funktionen von x sein mögen, die Gleichung (2) stellt immer eine Kurve vierter Ordnung dar, die symmetrisch zur x-Axe ist.

---

1) S. Roberts, *On the ovals of Descartes* (Proc. of the London math. Soc. III, 1869—71).

2) Panton, *The educational Times,* Question 4297.

3) Dieser Satz wurde von Genocchi in der Zeitschrift *Il cimento* v. 15. Okt. 1855 veröffentlicht (vgl. *Resumé de différentes recherches sur les ovales de Descartes et quelques autres courbes,* Mathésis IV, 1884); er wurde ziemlich viel später wieder gefunden von Darboux (*Sur la rectification des ovales de Descartes.* C. R. LXXXVII, 1878).

Umgekehrt gehört aber nicht jede derartig symmetrische Kurve zu der Klasse, die (2) zur allgemeinen Gleichung haben. Die allgemeine Gleichung einer Kurve vierter Ordnung, die symmetrisch zur x-Axe ist, lautet nämlich

$$y^4 + y^2\varphi + \psi = 0,$$

wo φ und ψ Funktionen 2ten bezw. 4ten Grades von x sind. Nun folgt aus dieser Gleichung:

$$y = \sqrt{\frac{-\varphi + \sqrt{\varphi^2 - 4\psi}}{2}},$$

oder auch $$y = \sqrt{-\frac{1}{4}\varphi + \frac{1}{2}\sqrt{\psi}} + \sqrt{-\frac{1}{4}\varphi + \frac{1}{2}\sqrt{\psi}};$$

damit diese letztere aber die Form (2) habe, ist notwendig und hinreichend, dafs ψ das Quadrat einer quadratischen Funktion χ von x ist. Wir schliefsen demnach, dafs

$$y^4 + y^2\varphi + \chi^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

oder

$$y = \sqrt{-\frac{1}{4}\varphi + \frac{1}{2}\chi} + \sqrt{-\frac{1}{4}\varphi - \frac{1}{2}\chi} \quad . \; . \; . \; . \quad (3')$$

eine polyzomale, in Bezug auf die x-Axe symmetrische Kurve vierter Ordnung darstellt, welcher Art auch die quadratischen Funktionen φ und χ von x sein mögen. Sind α und β die Wurzeln der Gleichung $\chi = 0$, so hat die Kurve die Punkte $(x = \alpha,\ y = 0)$ und $(x = \beta,\ y = 0)$ als Doppelpunkte; einer derselben liegt im Unendlichen, wenn die Funktion χ auf den ersten Grad herabgeht; aufserhalb der Axe hat die Kurve keine singulären Punkte, daher, wenn sie rational ist, mufs einer derselben ein Berührungsknoten (Berührungspunkt zweier Kurvenzweige) sein, insbesondere tritt dieser Umstand ein, wenn φ und χ Funktionen in x von niederem Grade als 2 sind.

Die Umformung der Gleichung (3) in (3′) ist oft nützlich; zunächst vor allem führt sie zu einer Konstruktion der Kurve vermittelst der beiden Kegelschnitte

$$y_1 = \sqrt{-\frac{1}{4}\varphi + \frac{1}{2}\chi}, \qquad y_2 = \sqrt{-\frac{1}{4}\varphi - \frac{1}{2}\chi},$$

indem sich ergiebt $y = y_1 + y_2$; zweitens führt sie zur Quadratur der Kurve, indem man hat

$$\int y \cdot dx = \int dx \sqrt{-\frac{1}{4}\varphi + \frac{1}{2}\chi} + \int dx \sqrt{-\frac{1}{4}\varphi - \frac{1}{2}\chi},$$

und die beiden Integrale auf der rechten Seite sich in bekannter Weise berechnen lassen. Die Nützlichkeit der Bildung der Form (3′) der Gleichung (3) wurde von Jacob Bernoulli[1]) angegeben für einen

1) *Acta eruditorum,* 1687, S. 525.

Spezialfall, in welchem es ihm gelang eine von Leibniz[1]) gestellte Aufgabe zu lösen, nämlich die Quadratur der Kurve mit der Gleichung

$$y^4 - 6a^2y^2 + 4x^2y^2 + a^4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Diese ist in der That vom Typus (3) und kann auch geschrieben werden

$$y = \sqrt{2a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Die Untersuchung dieser neuen Gleichung giebt folgende Konstruktion der Kurve, die man dem eben genannten Bernoulli verdankt: Gegeben ein Quadrat $OACB$ (Taf. V, Fig. 36) mit der Seite a; man beschreibe zwei Kreise um den gemeinsamen Mittelpunkt O, die die Seite bezw. die Diagonale des Quadrates zum Radius haben; eine Parallele zu OB schneide die beiden Kreise und die Gerade OA in den Punkten L, M, Q; man trage auf ihr $QP = LM$ ab. Der Ort des Punktes P in Bezug auf die Geraden OA und OB als Koordinataxen, wird dann durch obige Gleichung dargestellt. Er besteht aus zwei verschiedenen Blättern, die zu einander symmetrisch sind in Bezug auf OA und beide symmetrisch in Bezug auf BO. Die innerhalb des Winkels AOB gelegene Fläche des halben Blattes, wenn man alle Wurzeln positiv nimmt, wird gemessen durch

$$\int_0^a \left(\sqrt{2a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx - \int_0^a \left(\sqrt{2a^2 - x^2} - \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$$
$$= 2\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi a^2}{2};$$

somit ist die Fläche eines jeden Blattes gleich dem Inhalte des kleineren der beiden obengenannten Kreise, beide Blätter zusammen sind gleich dem des gröfseren.

82. Die vornehmsten Kurven vierter Ordnung, die in dieses Kapitel gehören, sind diejenigen, die der Pater Gregorius a Sancto Vincentio im X. Teile seines umfangreichen *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni* (Antwerpiae 1647) behandelt hat. Folgende ist die wörtliche Definition, die er (S. 840) dafür gegeben hat: „Parabolam virtualem voco, cujus ordinatim applicatae, si ad rectam lineam ponantur, aut a recta linea dividantur bifariam, veram producunt parabolam. Porro illam pleraeque virtualem habet proprietatem, ut linea bisecans ordinatim in illis applicata vera sit parabola; sed inversa.“ Der Verfasser hat zu dieser Definition eine unumgänglich notwendige Ergänzung gegeben, indem er nicht weniger als sechs Methoden angegeben hat die Kurven zu zeichnen; wir werden darüber berichten, ferner die Gleichungen der entsprechenden Kurven geben und einige Folgerungen ziehen, die sich daraus ergeben:

1) *Leibniz* ed. Gerhardt, III (Halle 1855, S. 39), Brief v. 4. März 1696.

I. Gegeben ein Kreis mit dem Centrum H und dem Durchmesser d, sowie ein bestimmter Durchmesser desselben AC (s. Taf. V, Fig. 37); man ziehe durch A eine beliebige Sehne AG, dann von G die Parallele zum Durchmesser AC, welche die Tangente des Kreises in A im Punkte E trifft und nehme auf ihr $EP = GC$. Der Ort von P wird eine virtuelle Parabel sein[1]).

Nimmt man A als Koordinatenursprung und den Durchmesser AC als y-Axe, so sieht man sogleich, dafs der Ort von P folgender parametrischer Darstellung fähig ist $x = d \sin\omega \cdot \cos\omega$, $y = d \cos\omega$; eliminieren wir ω, so ergiebt sich die Gleichung des Ortes selbst, nämlich

$$d^2(y^2 - x^2) = y^4 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

oder auch
$$y = \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{dx}{2}} + \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{dx}{4}} \quad \ldots \ldots \quad (5')$$

Die so erhaltene Kurve findet sich wieder in der *Introduction* von Cramer (S. 470), wo auch eine Anwendung derselben angegeben ist (das. S. 496); es ist jedoch nicht angegeben, dafs die Erfindung derselben G. a Sto. Vincentio zukommt. Sie findet sich dann noch in der *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie der Ebene* von Magnus (Berlin 1833, S. 286), wo die Kurve in folgender Weise konstruiert wird: „Gegeben ein Kreis mit dem Centrum O, dem Radius a und dem Durchmesser AB; von einem beliebigen Punkte M seiner Peripherie aus ziehe man MN senkrecht zu AB, dann von N das Lot NQ auf den Radius OM und trage dann auf NM, $NP = NQ$ ab.“ Der Ort von P hat dann als Gleichung $a^2y^2 + x^4 = a^2x^2$; er ist also eine virtuelle Parabel, die sich von (5) nur durch die Vertauschung der Axen und die Konstantenbezeichnung unterscheidet[2]). Magnus bemerkt dazu: „die Kurve hat eine der Lemniskate ähnliche Gestalt“; Schlömilch[3]) sagt, nachdem er die vorige Konstruktion angegeben hat, „die Kurve hat die Form einer Schleife (∞)“. Diese Bemerkungen stimmen mit folgenden beiden Thatsachen überein: die eine, dafs die durch die Gleichung $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ dargestellte Kurve von Montferrier Lemniskate genannt worden ist[4]), die andere, dafs ein neuerer Bearbeiter, zum Unterschiede von einer berühmten Kurve, von der wir später (in

---

1) *Opus geometricum,* Prop. CCXVI (II, S. 482).

2) Dieselbe Kurve wurde neuerdings u. a. von Schoute erhalten (*Sur la construction des courbes unicursales par points et tangentes,* Archives néerlandaises XX, S. 40 des Auszuges) durch Anwendung einer speziellen Maclaurin'schen Transformation (Nr. 48).

3) *Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis.* I. T. (3. Aufl. Leipzig 1878) S. 87.

4) *Dictionnaire des sciences mathématiques* (Bruxelles 1838) S. 170.

Nr. **93**) handeln werden, sie Lemniskate des Gerono[1]) nannte; in Frankreich heifst sie Huit (Achterkurve)[2]).

Es ist nicht unwichtig zu bemerken, dafs in dem Briefwechsel zwischen Huygens und R. de Sluse[3]) häufig von der virtualen Parabel die Rede ist, dafs jedoch daselbst dieser Name einer allgemeineren Kurve erteilt wird, nämlich allen denjenigen, die eine Gleichung von folgendem Typus haben

$$(a^2 - x^2)\,x^2 = b^2 y^2, \text{[4])} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

oder

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{by}{2}} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{by}{2}}. \quad \ldots \ldots \quad (6')$$

Beachten wir, dafs die Gleichung (6) durch folgende beiden ersetzt werden kann

$$x = a \cdot \cos\varphi, \qquad y = \frac{a^2}{2b}\sin 2\varphi,$$

so ist klar, dafs die betrachteten Kurven in folgender Weise konstruiert werden können: „Man beschreibe um den Anfangspunkt als gemeinsames Centrum zwei Kreise mit den Radien a und $\frac{a^2}{2b}$; im ersteren ziehe man einen Radius OA, der mit Ox den beliebigen Winkel φ bildet, und im zweiten den Radius OB, der mit derselben den Winkel 2φ bildet; die durch A zu Oy gezogene Parallele schneide die durch B zu Ox in einem Punkte P, dessen Ort durch die Gleichung (6) dargestellt wird. Die Kurve hat im Koordinatenanfang einen doppelten Inflexionsknoten und schneidet die x-Axe in den Endpunkten des Durchmessers des ersten Kreises; der unendlich ferne Punkt von Oy ist ein Berührungsknoten mit der unendlich fernen Geraden als zugehöriger Tangente. Die Tangenten an den zweiten Kreis parallel zu Ox sind Doppeltangenten; sie begrenzen zugleich mit denen des ersten Kreises die parallel zu Oy ein Rechteck, dessen Inhalt

$$R = 2a\frac{a^2}{b} = \frac{2a^3}{b}.$$

Bezeichnet man nun mit A die Gesamtfläche der Kurve, so ist

$$\frac{1}{4}A = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} y\,dx = \frac{a^3}{2b}\int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi$$

$$= \frac{a^3}{b}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cdot d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi \cdot d\varphi\right) = \frac{a^3}{b}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{a^3}{3b},$$

1) Vgl. *Intermédiaire* IV, 1897, S. 98, 190 u. 285.

2) Aubry, *De l'usage des figures de l'espace pour la définition et la transformation de certaines courbes* (Journ. de math. spéc. 4. Ser. IV, 1895) S. 267. *Exercises de géométrie descriptive* par F. J. (Gabriel-Marie) 3. Aufl. S. 397, 649, 669, 702, 712.

3) Um die bezügl. Stellen zu finden, sehe man nach im Inhaltsverzeichnis der *Oeuvres de Huygens*.

4) Diese Definition steht im Briefe von R. de Sluse v. 19. Okt. 1657 (*Oeuvres de Huygens* II, 1889, S. 70).

und daher ist $A = \frac{2}{3} \cdot \frac{2a^3}{3b} = \frac{2}{3} R$, eine bemerkenswerte von de Sluse entdeckte Beziehung[1]). — Aus (6) ergiebt sich ferner

$$y - x\frac{dy}{dx} = \frac{x^4}{b^2 y}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

daher hat die von de Sluse untersuchte Kurve folgende Eigenschaft: „Die Strecke zwischen dem Anfang und demjenigen Punkte der x-Axe, in welchem sie von der Tangente im Punkte (x, y) geschnitten wird, wird durch den Ausdruck $\frac{x^4}{b^2 y}$ ausgedrückt. Umgekehrt, integrieren wir die letzte Gleichung, so erhalten wir alle Kurven, die eine derartige Eigenschaft haben. Setzen wir nun $y = tx$, so läſst sich die Integration leicht ausführen und führt zurück zur Gleichung (6); also sind die von de Sluse betrachteten Kurven nichts anderes, als die Integralkurven von (7); von diesem Standpunkte aus wurden sie neuerdings von Schneider[2]) betrachtet, der auſserdem die Rektifikation derselben durch elliptische Integrale ausführte; in speziellen Fällen läſst sich diese Aufgabe auch elementar lösen[3]).

II. Es seien zwei Kreise gegeben (Taf. V, Fig. 38), der kleinere hat als Durchmesser eine Sehne AC des gröſseren; eine beliebige Sehne AB des gröſseren Kreises schneide die Peripherie des kleineren weiterhin in D, von D ziehe man DE senkrecht auf AC und trage auf dieser die Strecke $EP = AB$; der Ort der Punkte P ist eine virtuelle Parabel[4]).

Nimmt man die Gerade AC als x-Axe, ihre Mittelsenkrechte zur y-Axe, und nennt φ den von der veränderlichen Sehne mit der festen gebildeten Winkel, so findet man

$$x = 2a\cos^2\varphi, \qquad y = 2(a\cos\varphi + b\sin\varphi),$$

und demnach nach Elimination von φ

$$y = \sqrt{2ax} + \sqrt{4b^2 - \frac{2b^2}{a}x},$$

---

1) S. den auf vor. S. Note 4 citierten Brief.

2) S. die Schrift *Über eine der Lemniskate der Gestalt nach ähnliche Kurve* (Progr. Elbing, 1874).

3) Dies trifft z. B. ein für die Kurve $8a^2y^2 = x^2(a^2 - 2x^2)$. (*The educational Times* LXV, 1897, Quest. 13168). Diese ist nämlich folgender parametrischer Darstellung fähig $x = \frac{a}{\sqrt{2}}\sin\varphi$, $y = \frac{a}{8}\sin 2\varphi$; daher ist $\frac{ds}{d\varphi} = \frac{a}{4}(\cos 2\varphi + 2)$ und $s = \frac{a\cdot\sin 2\varphi}{8} + \frac{a\cdot\varphi}{2}$ ohne Hinzufügung der Konstanten, indem man $s = 0$ für $\varphi = 0$ setzt. Im Speziellen, setzt man $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so ergiebt sich $\frac{\pi a}{4}$ für die Länge des vierten Teils der ganzen Kurve.

4) *Opus geometricum.* Theor. CCXX (II, S. 845).

welche die Gleichung der Kurve ist; sie ist rational; der Punkt $x = \frac{2ab^2}{a^2 + b^2}$, $y = 0$ ist Doppelpunkt derselben; der unendlich ferne Punkt von Ox ist ein Berührungsknoten.

III. Gegeben ein Kreis mit dem Centrum C (Taf. V, Fig. 39) ein Punkt A seiner Peripherie und eine durch A gehende Gerade g. Man ziehe durch A eine beliebige Kreissehne AG, ferner GH senkrecht zu g, auf dieser nehme man die Strecke $HP = AG$; der Ort der Punkte P ist eine virtuelle Parabel[1]).

Nimmt man die Gerade g als x-Axe, und das von C auf diese gefällte Lot als y-Axe, nennt r den Radius des Kreises, 2φ den variabelen Winkel ACG und α den gegebenen Winkel ACO, so findet man leicht:

$$x = r \sin\alpha + 2r \sin\varphi \cdot \cos(\alpha - \varphi), \qquad y = 2r \sin\varphi .$$

Nach Elimination von φ ergiebt sich dann, dafs

$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{r} = \sqrt{\cos^2\alpha - \frac{(1 - \sin\alpha)(x - r\sin\alpha)}{r}} \\ + \sqrt{\cos^2\alpha - \frac{(1 + \sin\alpha)(x - r\sin\alpha)}{r}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

die Gleichung der Kurve ist. Diese ist rational, hat A als Doppelpunkt und den unendlich fernen Punkt von Ox als Berührungsknoten.

IV. Gegeben ein Kreis mit dem Durchmesser CD und ein Punkt A seiner Peripherie; man ziehe eine beliebige Sehne AB (s. Taf. V, Fig. 40) und trage auf der durch B zu CD gezogenen Senkrechten die Strecke $PP' = AB$ ab, derart, dafs sie von dem Durchmesser CD halbiert wird; der Ort der Punkte P, P' ist eine virtuelle Parabel[2]).

Nehmen wir den Mittelpunkt O des gegebenen Kreises als Anfang, den gegebenen Durchmesser als x-Axe und nennen r den Radius des Kreises, α und 2φ die Winkel AOC und AOB, so findet man alsbald $x = r \cdot \cos(\alpha - 2\varphi)$, $y = r \cdot \sin\varphi$, und demnach durch Elimination von φ

$$\sqrt{2}\,\frac{y}{r} = \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{r^2 + rx} + \cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{r^2 - rx} . \quad . \; . \; . \quad (10)$$

Die so dargestellte Kurve ist augenscheinlich von derselben Art wie die vorhergehende.

V. Gegeben zwei Kreise mit dem gemeinsamen Centrum O (Taf. V, Fig. 41) und einem Durchmesser DF des gröfseren, eine beliebige Sehne DE des gröfseren schneide den kleineren in B; zieht man EG senkrecht zu DF und trägt das Stück $GP = BE$ auf GE ab, so ist der Ort der Punkte P eine virtuelle Parabel[3]).

---

1) *Opus geometricum.* Theor. CCXXII (II, S. 846).
2) Das. Theor. CCXXIV (II, S. 847). 3) Das. Theor. CCXXIX (II, S. 852).

Sind R und r die Radien der beiden Kreise und φ der Winkel EDF, und nimmt man D als Anfang, DF als x-Axe, so findet man leicht:

$$x = 2R\cos^2\varphi, \quad y = -R\cos\varphi + \sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi} \quad . \quad (11)$$

und nach Elimination von φ

$$y = \sqrt{\frac{Rx}{2}} + \sqrt{\frac{Rx}{2} + r^2 - R^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Diese Gleichung zeigt, dafs die Kurve durch Addition entsprechender Ordinaten der beiden Parabeln $y^2 = \frac{Rx}{2}$, $y^2 = \frac{Rx}{2} + r^2 - R^2$ konstruiert werden kann. Diese Bemerkung ist wichtig, indem die von G. a Sancto Vincentio angegebene Konstruktion nur einen Zug der Kurve liefert, während doch diese sich ins Unendliche erstreckt; diese neue Erzeugung hingegen liefert alle Punkte der Kurve, die im Unendlichen auf der x-Axe einen dreifachen Punkt hat; diese Axe doppelt gezählt und die unendlich ferne Gerade sind die zugehörigen Tangenten.

VI. Gegeben zwei Kreise mit den beiden Durchmessern AC und DF auf derselben Geraden (s. Taf. V, Fig. 42); eine beliebige Sehne DE des einen schneide den anderen in B; von E ziehe man EG senkrecht zu DF, auf welcher man $GP = BE$ abträgt. Der Ort der Punkte P ist eine virtuelle Parabel[1]).

Die Konstruktion ist offenbar eine Verallgemeinerung der vorhergehenden. Die Gleichung der entsprechenden Kurve erhält man mit denselben Axen und Bezeichnungen wie bei der ersteren in der Form

$$y = (d - 2R)\sqrt{\frac{x}{2R}} + \sqrt{\frac{d^2x}{2R} + r^2 - d^2}, \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

wo d die Abscisse des Mittelpunktes von AC ist. Auch für die Konstruktion dieser Kurve kann die Verwendung zweier Parabeln dienlich sein; der unendlich ferne Punkt der Abscissenaxe ist Berührungsknoten, und der mit der Abscisse $\frac{d^2 - r^2}{2(d - R)}$ ist Doppelpunkt.

83. Die virtuellen Parabeln erlangten keine sonderliche Berühmtheit, wahrscheinlich weil sie von einem Mathematiker erdacht worden sind, dessen Ruhm durch unglückliche Versuche den Kreis zu quadrieren, befleckt war. Aber man begegnet ihnen, oder wenigstens einigen verwandten polyzomalen symmetrischen Kurven vierter Ordnung, die sich auf andere als die oben aufgeführten sechs Arten erzeugen lassen, im Verlaufe von Untersuchungen oder in Arbeiten, die, wie wir zeigen werden, höchst beachtenswert sind.

1) *Opus geometricum.* Theor. CCXXX (II, S. 853).

Huygens hat zuerst dem berüchtigten Fatio de Duiller und dann dem Leibniz — Brief vom 23. Febr. 1691[1]) — die Aufsuchung derjenigen Kurve aufgegeben, deren Subtangente durch $\frac{y^2\sqrt{a^2-x^2}}{ax}$ ausgedrückt wird. Dieses Problem ist gleichbedeutend mit der Integration der Differentialgleichung

$$-y\frac{dx}{dy}=\frac{y^2\sqrt{a^2-x^2}}{ax};$$

nun lassen sich in dieser die Variabeln leicht trennen, und man findet dann als allgemeine Gleichung der gesuchten Kurven

$$a^2-x^2=\left(\frac{y^2-\varepsilon k^2}{2a}\right)^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

wo $\varepsilon=\pm 1$ bedeutet, und k^2 die durch die Integration eingeführte Konstante ist. Es giebt demnach unzählige Kurven, die die Aufgabe lösen; dies bemerkte Leibniz[2]), welcher die Aufmerksamkeit seines Korrespondenten auf zwei Fälle lenkte: $k=0$ und $k=2a$, $\varepsilon=-1$. Ein anderer bemerkenswerter Fall wird erhalten, wenn man beachtet, dafs die Gleichung (14) oder

$$y^4+2\varepsilon k^2y^2+4a^2x^2-4a^4+k^4=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14')$$

nur dann einer symmetrischen, polyzomalen Kurve vierter Ordnung angehört, wenn $k^2=2a^2$; nehmen wir dann $\varepsilon=-1$, um eine reelle Kurve zu erhalten, so bekommt (14') die Gestalt:

$$y=\sqrt{a^2+ax}+\sqrt{a^2-ax}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14'')$$

deren Verwandtschaft mit (12) und (13) nicht hervorgehoben zu werden braucht. Schreiben wir sie folgendermafsen

$$y\sqrt{2}=\sqrt{2a(a+x)}+\sqrt{2a(a-x)},$$

so erkennt man: Wird ein Kreis um O mit dem Durchmesser $AA'=2a$ beschrieben und ein Punkt M auf seiner Peripherie angenommen, so hat man, wenn N der Fufspunkt des von M auf AA' gefällten Lotes ist und $ON=x$,

$$AM+A'M=\sqrt{2a(a+x)}+\sqrt{2a(a-x)},$$

und daher stimmt die Kurve $y=AM+A'M$ nicht mit (14'') überein — wie Huygens angegeben hat[3]) — aber dennoch ist sie mit ihr affin.

Auf eine spezielle virtuelle Parabel führt auch ein anderes Problem, das ebenfalls von Huygens gestellt wurde[4]): Die Kurve zu bestimmen,

1) *Leibniz* ed. Gerhardt. II (Berlin 1850) S. 82.

2) Briefe an Huygens v. 20./30. Febr. und 10./20. Apr. 1691. (Das. S. 83 u. 90).

3) Brief an Leibniz v. 26. März 1691 (Das. S. 86).

4) Desgl. v. 24. Aug. 1690 (Das. S. 46).

deren Subtangente durch $\frac{y^2}{2x} - 2x$ ausgedrückt wird. (Vgl. die Note 2 auf Seite 91). Je nach dem Vorzeichen, welches man der Subtangente erteilt, führt dies Problem zu einer der folgenden Differentialgleichungen

$$(y^2 - 4x^2)dy + 2xy\,dx = 0, \quad (y^2 - 4x^2)dx - 2xy\,dx = 0;$$

beide sind homogen, lassen sich daher leicht integrieren und geben

$$y^4 = c^2(y^2 - 2x^2) \quad . \quad . \quad (15) \qquad y^6 = c^6 + 6x^2y^4, \quad . \quad . \quad (16)$$

welche Gleichungen von den beiden oben genannten Geometern erhalten wurden. Die erste dieser beiden, wenn man x und y vertauscht, gehört zum Typus von (6); schreibt man sie

$$y = \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{cx}{\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{c^2}{4} - \frac{cx}{\sqrt{2}}},$$

so ist die Analogie mit den durch Gleichung (12) und (13) dargestellten Kurven offenbar, und man erkennt, wie Leibniz richtig bemerkte, die Möglichkeit die Quadratur derselben auszuführen[1]). Übrigens kann die Quadratur der Kurve (15) auch aus der citierten Gleichung $\int x\,dy = \frac{1}{c\sqrt{2}}\int y\sqrt{c^2 - y^2}\,dy$ erhalten werden, welche Methode den Vorzug hat, auch auf die Kurven mit der Gleichung $y^4 = c^2(2x^2 - y^2)$, die von Leibniz abgeleitet sind, angewandt werden zu können, indem in (15) c in ic verwandelt wird, ebenso auf die von Craig[2]) betrachteten von der Gleichung $y^4 + a^2y^2 = b^2x^2$.

84. Andere polyzomale symmetrische Kurven vierter Ordnung finden sich in der *Introduction* von Cramer; eine solche ist die von folgender Gleichung

$$y^4 + 2x^2y^2 + x^4 - 6axy^2 - ax^3 + a^2x^2 = 0.^{3)} \quad . \quad . \quad (17)$$

Schreibt man sie in der Form

$$y = \sqrt{2ax - x^2} + \sqrt{ax},$$

so erkennt man, dafs sie mit Hilfe eines Kreises und einer Parabel konstruiert werden kann.

Von derselben Art ist die auf folgende Weise erzeugte Kurve[4]): Man betrachte zwei Kreise, die sich gegenseitig im Punkte A von innen berühren (Taf. V, Fig. 43), der eine habe den doppelten Radius $2a$ der anderen; durch eine Senkrechte zur Centrale werden vier Strecken bestimmt, von denen jede einen Endpunkt auf dem einen

1) Brief an Huygens v. 27. Jan. u. v. 20./30. Febr. 1691 (Das. S. 75 u. 84).

2) Vgl. A. de Moivre, *Specimen of the use of fluxions in the solution of geometric problems* (Philos. Trans. 1693, Nr. 216).

3) *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Genf 1750) S. 239.

4) Das. S. 435.

und den zweiten auf dem anderen Kreise hat; die Mittelpunkte dieser gehören der Kurve vierter Ordnung mit der Gleichung an: (A als Anfang, die Centrale als x-Axe genommen)

$$2y = \sqrt{x(2a-x)} + \sqrt{x(4a-x)},$$

welche demnach von der besagten Art ist. A ist ein Berührungsknoten der Kurve.

Eine andere von Cramer[1]) betrachtete Kurve hat als Gleichung

$$x^4 + y^4 - 2a^2y^2 - 2b^2x^2 + b^4 = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

dieselbe kann auch geschrieben werden

$$y = \sqrt{\frac{a^2 - b^2 + x^2}{2}} + \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - x^2}{2}}$$

und gehört daher ebenfalls einer polyzomalen Kurve vierter Ordnung an, die sich vermittelst einer Ellipse und einer koaxialen Hyperbel konstruieren läfst. Man könnte sie Doppel-Herz-Kurve nennen, weil sie, wie Cramer bemerkt „semble à la figure de deux coeurs, qui se pénètrent l'un l'autre par la point."

Ferner ist in demselben Werke noch folgende Aufgabe behandelt[1]): „Gegeben ein Kreis mit dem Centrum C, dem Radius R, ein Punkt O und eine durch ihn gehende Gerade r (Taf. VI, Fig. 44). Von einem beliebigen Punkte N des Kreises fälle man das Lot NM auf r und nehme auf diesem $PM = ON$; den Ort des Punktes P zu finden." Nimmt man r als x-Axe, O als Anfang, und bezeichnet die Koordinaten von C mit a und b, so kann man die von N nehmen als $a + R \cdot \cos\varphi$ und $b + R \cdot \sin\varphi$, und daher werden die von P sein:

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + R^2 + 2R(a\cos\varphi + b\sin\varphi)}, \qquad y = b + R\sin\varphi.$$

Nach Elimination von φ ergiebt sich, dafs

$$x^4 + 4bx^2y + 4(a^2 + b^2)y^2 - 2(a^2 - b^2 + R^2)x^2 \\ - 4b(a^2 + b^2 - R^2)y + (a^2 + b^2 - R^2)^2 = 0 \quad . \quad . \quad (18)$$

die Gleichung des betr. Ortes ist. In dem speziellen Falle, dafs O auf der Peripherie des Kreises liegt, ist $R^2 = a^2 + b^2$, und daher wird dann die Gleichung

$$x^4 - 4(a^2 + by)x^2 + 4(a^2 + b^2)y^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Über die entsprechende Kurve bemerkt Cramer: „la courbe répresente en quelque sorte une bésace." Schreiben wir die vorige Gleichung so

$$x = \sqrt{a^2 + y(b + \sqrt{a^2 + b^2})} + \sqrt{a^2 + y(b - \sqrt{a^2 + b^2})}$$

und wenden die allgemeinen Bemerkungen der Nr. **81** an, so gelangt

1) *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Genf 1750) S 436 —38. 2) Das. S. 450.

man zur Konstruktion der Besace (Quersackkurve) vermittelst zweier Parabeln.

Noch auf eine letzte polyzomale Kurve vierter Ordnung, die man als Spezialfall der Watt'schen Kurve (s. Nr. **106**)[1]) ansehen kann, wollen wir hinweisen[2]). Sie ist der Ort des Punktes M einer Strecke von konstanter Länge l, deren Endpunkte N und P sind, von denen der erste eine Gerade g, der zweite einen Kreis mit dem Centrum O und dem Radius R beschreibt. Um ihre Gleichung zu finden, nehmen wir O als Anfang und das von O auf g gefällte Lot als x-Axe; nennt man d die Länge des letzteren, setzt $\frac{PM}{MN} = \frac{\mu}{\nu}$ und bezeichnet mit φ und ψ die Winkel des Radius OM und der Strecke MN mit der Abscissenaxe, so hat man:

$$x = R\cos\varphi + \frac{\mu l}{\mu + \nu}\cos\psi, \qquad y = R\sin\varphi + \frac{\mu l}{\mu+\nu}\sin\psi,$$
$$d = R\cos\varphi + l\cos\psi,$$

durch Elimination von φ und ψ ergiebt sich dann

$$y = \frac{1}{\nu}\sqrt{\nu^2R^2 - [(\mu+\nu)x - \mu d]^2} + \frac{\mu}{(\mu+\nu)\nu}\sqrt{\nu^2 l^2 - (\mu+\nu)^2(d-x)^2} \quad (20)$$

als Gleichung dieses Ortes; er kann daher im allgemeinen vermittelst zweier Ellipsen konstruiert werden; wenn aber $l = d + R$ und $\mu = \nu$, wird eine derselben ein Kreis; er kann ferner verschiedene Formen annehmen, die sich aus der Diskussion der Gleichung ergeben[3]). Besonders interessant ist der Fall $d = 0$, d. h. wenn die Gerade g durch den Mittelpunkt des Kreises geht; die Kurve wird dann eine Ellipse, und man hat damit eine sehr einfache mechanische Erzeugung derselben, die zur Konstruktion eines Ellipsographen benutzt werden kann.

---

1) Von diesem Gesichtspunkte aus betrachtet findet sich die Kurve in dem *Essai d'une théorie du parallelogramme de Watt* von A. J. H. Vincent (Mém. de la soc. de Lille 1837), woselbst die Namen Sélénoide und Hémicycle zwei speziellen Formen derselben gegeben sind und die — nach Vincent — Anwendung in der Architektur finden könnten. — Die Gleichung der Kurve findet sich auch im *Manuel des candidats à l'Ecole polytechnique* (I, Paris 1857, S. 331) von E. Catalan.

2) S. einen im *Journ. de math. spéc.* 1870 veröffentlichten Aufsatz, wiedergegeben im *Progréso* I, 1891, S. 221—23.

3) D. Jozé Ruiz Castizo Ariza, *Estudio analytico de un lugar geometrico de cuarto orden* (Madrid 1889).

Elftes Kapitel.

Rationale Kurven vierter Ordnung mit einem Berührungsknoten.

85. Gerard van Gutschoven, Schüler und Mitarbeiter des Cartesius, war von 1640—59 Professor der Mathematik in Löwen, dann der Anatomie, Chirurgie und Botanik daselbst. Auf ihn weist R. F. de Sluse in einem Briefe an Huygens vom 18. April 1662 hin[1]) als auf denjenigen, der folgende Aufgabe gestellt habe: „Gegeben eine Gerade r und einer ihrer Punkte O (Taf. VI, Fig. 45); den Ort eines Punktes M zu finden, derart, daſs wenn man OM zieht und dann MN senkrecht dazu und r in N schneidend, MN gleich einer gegebenen Strecke a wird.“ Nimmt man O als Pol und die Gerade r als Polaraxe, so ist die Polar-Gleichung der Gutschoven'schen Kurve ersichtlich

$$a \cdot \cos \omega = \varrho \cdot \sin \omega; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

der Ort selbst wird in kartesischen Koordinaten dargestellt durch die Gleichung

$$a^2 x^2 = (x^2 + y^2) y^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

welche sich in dem Briefe von Huygens an de Sluse vom 25. Sept. 1662 findet[2]). Sie beweist, daſs eine Kurve vierter Ordnung vorliegt, die durch die Kreispunkte der Ebene geht, die symmetrisch in Bezug auf die Koordinatenaxen ist und im Anfange einen sog. Berührungsknoten hat; im Unendlichen hat die Kurve auſserdem einen Doppelpunkt, mit den beiden Geraden $x = \pm a$ als zugehörigen Tangenten; diese beiden Geraden begrenzen zugleich einen Streifen der Ebene, innerhalb dessen sich sämtliche reelle Punkte der Kurve befinden[3]). Der Anfang ist auſserdem ein auſserordentlicher einfacher Brennpunkt der Kurve. Wegen ihrer Ähnlichkeit mit dem griechischen Buchstaben $\varkappa$ ist sie die Kappa-Kurve[4]) genannt worden; sie ist von der sechsten Klasse und daher nicht, wie man geglaubt hat, polarreziprok zu sich selbst in Bezug auf einen Kegelschnitt[5]).

In dem vorhin erwähnten Briefe führt Sluse eine Konstruktion der Tangente an die Kappa-Kurve an, die nicht schwer zu beweisen ist. Aus (1) ergiebt sich folgende parametrische Darstellung der Kurve

$$x = a \frac{\cos^2 \omega}{\sin \omega}, \quad y = a \cos \omega;$$

---

1) *Oeuvres de Huygens* IV (Haag 1891) S. 207.

2) Das. S. 238.

3) Von projektivem Standpunkte aus ist daher diese Kurve nicht verschieden von der Konchoide des Nikomedes (s. Nr. 66).

4) Aubry, *De l'usage des figures de l'espace pour la définition et la transformation de certaines courbes* (Journ. de math. spéc. 4. Ser. IV, 1895, S. 201).

5) Die genannte irrige Ansicht zu beseitigen, war ein Artikel von Genocchi bestimmt (Nouv. Ann. XIV, 1855, S. 248—53).

wenn daher die Kurventangente im Punkte M die Gerade r in T schneidet, so ist

$$OT = x - y\frac{dx}{dy} = -a\frac{\cos^2\omega}{\sin^3\omega},$$

und daher $$TN = ON - OT = \frac{a}{\sin\omega} + a\frac{\cos^2\omega}{\sin^3\omega} = \frac{a}{\sin^3\omega}.$$

Andrerseits, wenn P der Fufspunkt des von M auf P gefällten Lotes ist, hat man

$$ON = \frac{a}{\sin\omega}, \qquad NP = a\cdot\sin\omega,$$

und daher $$TN\cdot NP = \overline{ON}^2,$$

d. h. — wie Sluse sagt — „NP, NO, NT sunt in continua proportione“; ist also M gegeben, so findet man alsbald den Punkt T und damit die Tangente in M.

In dem oben erwähnten Briefe von Huygens ist fernerhin eine bemerkenswerte Formel für die Quadratur aufgestellt, deren Darlegung angebracht sein dürfte. Wir ziehen zu dem Zwecke MQ senkrecht zu Oy, bezeichnen mit $\mathfrak{S}$ die Fläche des gemischtlinigen Dreiecks, dessen Seiten die Geraden OQ, QM und der Bogen OKM der Kappa-Kurve sind. Infolge von Gleichung (3) wird dann

$$\mathfrak{S} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\omega} a\frac{\cos^2\omega}{\sin\omega}(-a\sin\omega)\cdot d\omega = -\frac{a^2}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\omega}(1+\cos 2\omega)d\omega$$
$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right) - \frac{a^2}{4}\sin 2\omega.$$

Wird nun der Bogen MR des Kreises mit dem Centrum N beschrieben und nennt man $\overline{\mathfrak{S}}$ die Fläche des halben Kreissegmentes $MPRS$, so erhält man

$$\overline{\mathfrak{S}} = \frac{1}{2}a^2\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right) - \frac{1}{2}a\sin\omega\cdot\cos\omega = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right) - \frac{a^2}{4}\sin 2\omega;$$

demnach ist $\mathfrak{S} = \overline{\mathfrak{S}}$, wie Huygens behauptet hat. — Wir können noch hinzufügen, dafs wenn wir $\omega = 0$ setzen, wir $\frac{\pi a^2}{4} = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$ als Ausdruck für das Dreieck erhalten, das begrenzt wird von der y-Axe, einem Bogen der Kappa-Kurve und der zugehörigen Asymptote; ein derartiges Dreieck ist also gleich einem Kreise mit dem Durchmesser a. Infolge dessen ist der Teil der Ebene innerhalb der Kappa-Kurve unendlich grofs.

Die Definition der Kappa-Kurve, von der wir ausgegangen sind, führt uns zu einer sehr einfachen Art die Kurve zu zeichnen. Man denke sich ein Winkelscheit LMN (bei M rechtwinklig) dessen Kathete $MN = a$ ist; läfst man dasselbe sich in der Weise bewegen,

dafs die andere Kathete LM immer durch den Punkt O geht, und die gegenüberliegende Ecke N die x-Axe durchläuft, so beschreibt der Scheitel des rechten Winkels ersichtlich die Kappa-Kurve. Die Kurven-Normale in M geht infolge dessen durch den Punkt V, in welchem das in O auf LM errichtete Lot die von N zu Ox gezogene Senkrechte schneidet[1]).

Barrow hat in seinen *Lectiones geometricae* — veröffentlicht 1670 — eine andere Konstruktion für die Kappa-Kurve angegeben[2]). Man trage auf der Polaraxe ein Stück $OA = a$ ab und errichte in A zu ihr die Senkrechte; ein beliebiger durch den Pol gezogener Strahl schneide diese in B. Trägt man nun auf diesem $OM = AB$ ab, so ist der Ort des Punktes M eine Kappa-Kurve. — Diese Konstruktion zeigt, dafs der Ort offenbar die Gleichung hat

$$\varrho = a \cdot \operatorname{tg} \omega , \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

die sich von (1) nur dadurch unterscheidet, dafs ω in $\frac{\pi}{2} - \omega$ verwandelt ist.

Theoretisch und auch wohl praktisch wichtiger ist noch eine andere Definition der Kurve, die wir durch Modifikation der anfänglichen erhalten. Beschreiben wir einen Kreis um den Mittelpunkt N mit dem Radius NM, so ist die Gerade OM eine Tangente desselben und also: **Die Kappa-Kurve ist der geometrische Ort der Berührungspunkte der Tangenten, die man von einem Punkte einer festen Geraden an die unendlich vielen Kreise von gegebenem Radius, die ihren Mittelpunkt auf dieser Geraden haben, ziehen kann.**

Die Betrachtung der Gleichung (4) führt uns von selbst auf allgemeinere Kurven, nämlich die durch die Gleichung

$$\varrho = a \operatorname{tg} \mu \omega \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

dargestellten, wo μ eine gegebene Zahl bedeutet. Dieselben sind algebraisch, wenn μ eine rationale Zahl ist, und bieten ziemlich verschiedene Gestalten dar, welche den Namen Noeuds (Knotenkurven), den französische Geometer ihnen gegeben haben, rechtfertigen[3]). Abgesehen vom Falle $\mu = 1$, führt uns die Annahme $\mu = \frac{1}{2}$ zu einer bekannten Kurve, nämlich der Strophoide (s. Nr. **37**, Gl. (2)); für $\mu = 2$ erhalten wir schon eine neue Kurve, die von der sechsten Ordnung ist und Moulin à vent (Windmühle) genannt wurde[4]).

---

1) Diese Konstruktion kann auch durch einfache Berechnung der polaren Subnormale bestätigt werden.

2) *The mathematical works* of J. Barrow, herausg. v. Whewell (Cambridge 1860) S. 247.

3) Aubry a. O. S. 251. — Wenn μ eine ganze Zahl ist, so ist die Knotenkurve von der Ordnung $2(\mu + 1)$.

4) G. de Longchamps, *Cours de problèmes de géometrie analytiques* B. I (Paris 1873) S. 137.

Die Knotenkurven sind nicht die einzigen Verallgemeinerungen, welche die Kappa-Kurven erfahren können. Schon Sluse bemerkte, dafs das Gutschoven'sche Problem sich verallgemeinern lasse, indem man annimmt, dafs der Winkel OMN statt eines rechten Winkels, einen konstanten Wert α habe. Es entsteht dann die Kurve, die in Polar- bezw. kartesischen Koordinaten die Gleichung hat

$$\varrho = a\frac{\sin(\omega+\alpha)}{\sin\omega}, \qquad a^2(x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2 = (x^2+y^2)y^2 \quad . \quad (6)$$

und die man die schiefe Kappa-Kurve zum Unterschiede von der ursprünglichen oder geraden Kappa-Kurve nennt. Der Name projective Kappa-Kurve[1]) wurde dann allen Kurven vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt und einem Berührungsknoten gegeben. Schliefslich kann auch die Kurve mit der Polargleichung

$$\varrho = \frac{al\sin\omega}{l\cos\omega + a}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

der man, wie der Gutschoven'schen Kurve bei einigen Problemen der darstellenden Geometrie begegnet[2]), als eine Verallgemeinerung der Kappa-Kurve angesehen werden, insofern als Gleichung (7) in (4) übergeht, wenn man $l = \infty$ setzt.

86. Von projektivischem Standpunkte aus unterscheidet sich die Kappa-Kurve kaum von einer anderen Kurve viel neueren Datums, die wegen ihrer Gestalt und ihrem Entdecker zu Ehren die Külp'sche Konchoide heifst[3]). Ihre Entstehungsweise ist folgende: „Gegeben ist der Quadrant OAC eines Kreises mit dem umbeschriebenen Quadrate $OABC$ (Taf. VI, Fig. 46); durch den Mittelpunkt ziehe man eine beliebige Gerade, die den Quadrantenbogen in G und die eine Seite des Quadrates in F schneidet. Die durch F zu der anderen Seite gezogene Parallele und die durch G zu der ersteren schneiden sich in einem Punkte P, dessen Ort der eine Bogen der fraglichen Konchoide ist; die anderen drei sind die zu ihm symmetrischen in Bezug auf den Mittelpunkt des Quadranten und die ihn begrenzenden Radien.“

Nimmt man als Koordinataxen diese beiden Radien und nennt den Winkel der beliebigen Geraden mit dem ersteren φ, den Radius des Quadranten a, so erhält man sogleich folgende parametrische Darstellung der in Rede stehenden Konchoide:

$$x = a\cdot\cos\varphi, \qquad y = a\cdot\operatorname{tg}\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

---

1) V. Retali, *Sopra una corrispondenza* $[m, n]$ (Rend. del R. Ist. Lomb. 2. Ser. XXXII, 1899).

2) De la Gournerie, *Traité de géométrie descriptive*. 3. Teil (Paris 1885), S. 151.

3) Külp, *Über eine besondere Art der Konchoide (Muschellinie)* (Archiv. XLVIII, 1868).

und demnach durch Elimination von φ

$$x^2 y^2 = a^2(a^2 - x^2)\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Aus dieser Gleichung entnimmt man, dafs die Külp'sche Konchoide einen Berührungsknoten im unendlich fernen Punkte von Oy, welche Axe zugleich die zugehörige Tangente ist, aufserdem einen isolierten Punkt im Unendlichen von Ox hat. Die Kurve liegt ganz innerhalb des Streifens der Ebene, der von den beiden Geraden $x = \pm a$ begrenzt wird; sie hat vier reelle Wendepunkte mit den Abscissen $\pm a\sqrt{\frac{2}{3}}$; im übrigen sind bemerkenswerte Eigenschaften an ihr nicht bemerkt worden.

Eine andere mit einem Berührungsknoten versehene rationale Kurve vierter Ordnung entsteht bei folgender Konstruktion: „Gegeben ein Kreis (Taf. VI, Fig. 47 a, b) mit dem Centrum O, dem Radius r, und ein Punkt A seiner Ebene. Man ziehe einen beliebigen Radius OM und bestimme dessen Schnittpunkt P mit dem in A auf AM errichteten Lote. Variiert man den Radius, so variiert auch der Punkt P und beschreibt eine Linie, die man die Jerabek'sche Kurve nennt[1])." Um deren Gleichung zu finden, nehmen wir O als Pol und OA als Polaraxe, nennen a den Abstand OA, ψ den Winkel OAM, ϱ und ω die Koordinaten von P. Aus der Betrachtung der Figur ergeben sich dann folgende Relationen:

$$\varrho = OP = r - PM = r - \frac{AM}{\cos\psi}, \qquad AM = a\frac{\sin\omega}{\sin\psi},$$

daher

$$\varrho = r - a\frac{\sin\omega}{\sin\psi\cdot\cos\psi}.$$

Da nun ferner

$$AM = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\omega}\,,$$

so hat man

$$\frac{1}{\sin\psi} = \frac{AM}{a\sin\omega} = \frac{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\omega}}{a\cdot\sin\omega},$$

und deswegen

$$\frac{1}{\cos\psi} = \frac{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\omega}}{r - a\cdot\cos\omega}.$$

Setzt man diese Werte in den schon gefundenen Ausdruck für ϱ ein und reduziert, so erhält man die Gleichung

$$\varrho = a\frac{r\cos\omega - a}{r - a\cos\omega}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

welche zeigt, dafs die Jerabek'sche Kurve rational ist und symmetrisch in Bezug auf OA. Gehen wir zu kartesischen Koordinaten über, so wird diese

$$r^2(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)(x - a)^2. \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Diese zeigt, dafs die Kurve selbst eine cirkulare Kurve vierter Ordnung

1) Mathésis, Question 314, gelöst in B. V, 1885, S. 110—116.

ist[1]), die O als aufserordentlichen Brennpunkt hat; A ist der Berührungsknoten, die zugehörige Tangente ist senkrecht zu OA. Die Kurve zeigt verschiedene Gestalt, jenachdem $a \lesseqgtr r$. Wenn $a < r$, d. h. A innerhalb des gegebenen Kreises liegt, so ist O ein Knotenpunkt und die entsprechenden Tangenten bilden mit OA einen Winkel, dessen Cosinus $\frac{a}{r}$ ist; die Kurve liegt ganz innerhalb des Kreises. Wenn hingegen $a > r$, so ist O ein isolierter Punkt und die Kurve besitzt zwei unendliche Zweige, die zu Asymptoten die beiden durch A gehenden Geraden haben, die mit der Polaraxe einen Winkel vom Cosinus $\frac{r}{a}$ bilden und vom Pole dem Abstand $\frac{r^2}{\sqrt{r^2 - a^2}}$ haben.

87. Während die Külp'sche Konchoide und die Jerabek'sche Kurve aufser dem Berührungsknoten noch einen Doppelpunkt haben, hat die, von der jetzt die Rede sein wird, eine Spitze.

Es sei ein Kreis gegeben mit dem Mittelpunkte O (Taf. VI, Fig. 48), dem Radius $\frac{a}{2}$, zwei aufeinander senkrechte Durchmesser desselben AB, CD und schliefslich eine Gerade r parallel zu CD. Man ziehe durch A einen beliebigen Strahl, der r in M schneidet, dann von M die Parallele zu AB, welche die Peripherie des Kreises in N schneidet und schliefslich durch N die Parallele zu CD. Ist nun P der Schnitt dieser mit dem Strahle AM, so ist der Ort von P eine derjenigen Kurven, die von G. de Longchamps quartiques pyriformes genannt wurden[2]). Es ist vorteilhaft, aus dieser Konstruktion ein Verfahren herzuleiten, um die Punkte der Kurve zu finden, die eine gegebene Abscisse AK haben (A als Anfang, AB als x-Axe genommen): Man bestimme die Punkte N und N', in denen der gegebene Kreis die vom Punkte K zu r parallel gezogene Gerade schneidet, dann die Punkte M und M', in denen diese von den durch N und N' zu AB gezogenen Parallelen getroffen wird; projiziert man nun die Punkte M und M' von A aus auf die Gerade NN, in P und P', so sind diese die gesuchten Punkte. — Bezeichnet man den Abstand AH des Punktes A von der Geraden r mit b, nennt den variabelen Winkel $MAB = \varphi$ und x, y die Koordinaten von P, so ist $MH = b \cdot \operatorname{tg} \varphi$. Ferner ist offenbar

$$\overline{NK}^2 = \overline{MH}^2 = AK \cdot KB,$$

und daher

$$b^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi = x(a - x).$$

1) Dasselbe Resultat ergiebt sich auch, wenn man beachtet, dafs die Ausgangskonstruktion die Kurve als erzeugt von zwei Strahlenbüscheln in der Korrespondenz [2, 2] mit den Centren in den Punkten O und A erscheinen läfst.

2) *Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre* (Paris 1890) S. 129.

Es ist aber $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, und daher

$$x^4 - ax^3 + b^2y^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

die Gleichung der gesuchten Kurve. Diese selbst ist also von der vierten Ordnung, symmetrisch in Bezug auf Ox, und vollständig innerhalb des Quadrates gelegen, dessen Seiten den gegebenen Kreis in A, B, C, D berühren. Der Punkt A ist eine Spitze der Kurve, AB die zugehörige Tangente; der unendlich ferne Punkt des Durchmessers CD ist dagegen der Berührungsknoten, die unendlich ferne Gerade ist die zugehörige Tangente; Wendepunkte sind die beiden Punkte mit den Abscissen $a\frac{3-\sqrt{3}}{4}$ und Kulminationspunkte die mit der Abscisse $\frac{3a}{4}$ und den Ordinaten $\pm\frac{a}{2}$.

Bemerkenswert ist der Spezialfall $b = a$[1]; dann berührt r den Kreis und Gleichung (12) wird zu

$$x^4 - ax^3 + a^2y^2 = 0;$$

wenn man nun in dieser y in $\frac{by}{a}$ verwandelt, so geht sie wieder auf (12) zurück; daher ist die allgemeine „quartique pyriforme" eine dem soeben betrachteten Spezialfalle affine Kurve. — Es möge noch ein anderer Spezialfall betrachtet werden: nämlich $a = 2b$; die entsprechende Kurve heifst Toupie (Kreiselkurve), wegen ihrer Gestalt so genannt, und wird folgendermafsen konstruiert[2]: Gegeben ein Kreis Γ (mit dem Durchmesser $2b$) bezogen auf zwei Axen Ox, Oy; man projiziere einen beliebigen Punkt M von Γ in A und B auf die Axen, fälle MH senkrecht auf AB und trage $MP = MH$ auf der Verlängerung von BM ab; der Ort der Punkte P ist die Kreiselkurve.

Die Gesamtfläche der allgemeinen Kurve ist

$$= 2\int_{x=0}^{x=a} y \cdot dx = \frac{2}{b}\int_0^0 x\sqrt{ax - x^2}\, dx\ ^{3)} = \frac{\pi a^3}{8b};$$

im speziellen Falle $a = b$, wird dieser Ausdruck $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$ und zeigt, dafs dann die Kurvenfläche gleich der Hälfte des gegebenen Kreises ist.

Ebenfalls De Longchamps verdankt man die Betrachtung einer anderen Kurve vierter Ordnung mit Spitze, die von projektivischem

---

1) Er wurde von Ossian Bonnet 1844 betrachtet (Nouv. Ann. III, S. 75).

2) Schlömilch, *Compendium der höh. Analysis* I, 5. Aufl. (Braunschweig 1881) S. 87; G. de Longchamps, *Cours de problèmes de géométrie analytique* I (Paris 1898) S. 137; s. auch S. 177.

3) Wegen Berechnung dieses Integrals sehe man Schlömilch, *Übungsbuch zum Studium der höh. Analysis* II (2. Aufl. 1874) S. 22.

Standpunkte aus der vorigen analog ist. Wegen ihrer Gestalt (s. Taf. VI, Fig. 49) wurde sie von ihrem Erfinder mit dem Namen Apienne (von ἄπιον = Birne) belegt[1]). Man erhält sie aus einem Kreise, der in kartesischen Koordinaten dargestellt wird durch die Gleichung

$$X^2 + Y^2 - 2R \cdot Y - 2R \cdot X + R^2 = 0$$

vermittelst der (semi-reziproken kartesischen) Transformation, die durch die Formeln

$$X = x, \qquad Yy = R^2$$

dargestellt wird[2]). Die „Birnkurve" hat demnach folgende Gleichung:

$$y^2(x - R)^2 - 2R^3y + R^4 = 0;$$

sie läſst sich auch parametrisch darstellen, nämlich so:

$$\frac{x}{R} = 1 + \cos\varphi, \qquad \frac{y}{R} = \frac{1}{1 + \sin\varphi}.$$

Infolgedessen ist sie eine rationale Kurve vierter Ordnung, und symmetrisch in Bezug auf die Gerade $x = R$. Der unendlich ferne Punkt dieser Geraden ist eine Spitze derselben mit dieser Geraden als Spitzentangente. Hingegen ist der unendlich ferne Punkt von Ox ein Berührungsknoten mit dieser Axe als Tangente. Für alle reellen Punkte der Kurve hat man $-a \leqq x \leqq +a$ und $y \geqq \frac{a}{2}$.

Sämtliche in diesem Kapitel betrachteten Kurven hatten auſser einem Berührungsknoten noch einen Doppelpunkt oder eine Spitze; dasselbe gilt auch für die Kurve mit folgender Gleichung

$$x = \frac{b - y}{b}\sqrt{a^2 - y^2},$$

deren Konstruktion Giordano Riccati in seiner Arbeit gezeigt hat, die den sonderbaren Titel hat *Teorema: il nullo imaginario non può confondersi col reale* (Mem. della Soc. Ital. della Scienze, IV, 1788); im folgenden Kapitel werden wir nun eine Familie von Kurven kennen lernen, deren Mitglieder, ähnlich wie einige der virtuellen Parabeln, jedes die erste der obigen Singularitäten besitzt.

1) *Cours de problèmes de géométrie analytique* II. (Paris 1899) S. 393.

2) Um den Punkt $M(XY)$, der dem Punkte $m(x, y)$ entspricht, zu finden, beschreibe man mit dem Radius R um den Mittelpunkt O den Kreis Γ, man ziehe von m die Parallele zu OX, so findet man den Pol in Bezug auf Γ; die von ihm zu Ox gezogene Parallele schneidet die von m zu Oy gezogene Parallele in M, wie leicht ersichtlich.

Zwölftes Kapitel.

Die Konchalen.

88. Der Ort der Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten oder zwei festen Geraden oder von einem Punkte und einer Geraden in einem gegebenen Verhältnisse stehen, ist ein Kreis, ein Geradenpaar oder ein Kegelschnitt. Wenn man unter den gegebenen Bedingungen das Verhältnis ersetzt durch die Summe oder Differenz, so erhält man einen centrischen Kegelschnitt, eine Gerade oder eine Parabel. Wenn man hingegen statt dessen das Produkt einführt, so erhält man: 1) Eine Cassinische Kurve, wenn die festen Elemente zwei Punkte sind; mit dieser werden wir uns im nächsten Kapitel beschäftigen. 2) Eine Hyperbel, wenn es zwei Geraden sind. 3) Wenn die festen Elemente ein Punkt F und eine Gerade r sind, eine Kurve, von der schon Schlömilch die Gleichung sowie einige Eigenschaften gefunden hat[1]), deren methodische Untersuchung jedoch erst vor wenigen Jahren von G. Huber[2]) ausgeführt wurde, der auch den Vorschlag machte, sie Konchale zu nennen wegen der Gestaltähnlichkeit, die sie bisweilen mit der Konchoide des Nikomedes hat.

Nimmt man als x-Axe die vom Punkte F auf die Gerade r gefällte Senkrechte FA und als Anfang den Mittelpunkt der Strecke $FA = 2a$, so sieht man alsbald, wenn man mit ak das konstante Produkt bezeichnet, dafs

$$(x + a)^2[(x - a)^2 + y^2] = a^2k^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

die Gleichung der Konchale ist.

Sie ist demnach eine Kurve vierter Ordnung symmetrisch in Bezug auf die x-Axe. Die Abscissen der vier Punkte, in denen diese von der Kurve geschnitten wird, sind $\pm a\sqrt{a(a \pm k)}$, während die Ordinaten der beiden Punkte, in denen die Kurve die y-Axe schneidet, gleich $\pm\sqrt{k^2 - a^2}$ sind; dies zeigt, dafs von jenen vier Punkten 4 oder 2 reell sind, jenachdem $k \lesseqgtr a$, während diese beiden reell oder imaginär sind, jenachdem $k \gtreqless a$. In dem Zwischenfalle $k = a$ wird Gleichung (1) zu

$$y^2(x + a)^2 + x^2(x^2 - 2a^2) = 0; \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

sie hat nunmehr im Anfang einen Knotenpunkt mit den Tangenten $y = \pm x\sqrt{2}$ und schneidet die x-Axe ferner in den Punkten mit den

1) *Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis,* I. T. (3. Aufl. Leipzig 1878) S. 97.

2) *Die Konchalen, ihre orthogonalen Trajectorien und die Cissoiden vierter Ordnung* (Monatshefte VI, 1895).

Abscissen $x = \pm a\sqrt{2}$. Im allgemeinen Falle geht die Kurve durch die cyklischen Punkte der Ebene und besitzt aufserdem im Unendlichen von Oy einen Berührungsknoten; die entsprechende Tangente hat zur Gleichung $x + a = 0$, ist also die Gerade r. Die Konchale bietet verschiedene Gestalten dar, je nach der relativen Gröfse der Konstanten a und k: Im Speziellen

wenn $k < a$, besteht sie aus zwei unendlichen Zweigen und einem Ovale;
„ $k = a$, „ „ „ einer Serpentine und einem Zweige mit Knoten;
„ $k > a$, „ „ „ zwei unendlichen Zweigen.

Die Quadratur der Konchale hängt im allgemeinen von elliptischen Funktionen ab, die Rektifikation von hyperelliptischen; für die rationalen Konchalen kann das erste Problem jedoch elementar gelöst werden, während das zweite die alleinige Anwendung der elliptischen Funktionen verlangt. Die Tangente an die Konchale in einem Punkte P kann durch Spezialisierung eines allgemeinen von A. Hurwitz[1]) gegebenen Verfahrens erhalten werden; man gelangt dann zu folgender Konstruktion: Man verbinde P mit F und errichte in F die Senkrechte p zu PF; ebenfalls verbinde man P mit dem Punkte (pr) und suche den zu dieser Geraden, in Bezug auf die beiden Geraden p und r, konjugiert harmonischen Strahl; dieser wird parallel zur gesuchten Tangente sein.

Wenn man die Konstante k variiert, so stellt die Gleichung (1) ∞^1 Kurven dar; die Differentialgleichung ihrer orthogonalen Trajektorien ist

$$dy\,[2x(x-a) + y^2] - y(x+a)\,dx = 0.$$

Durch Integration erhält man:

$$\frac{y^4 - 4axy^2}{[y^2 - 2a(x-a)]^2} = const.; \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

demnach sind diese Trajektorien rationale Kurven vierter Ordnung mit F als gemeinsamem Doppelpunkt und Berührungsknoten im unendlich fernen Punkte von Ox; die unendlich ferne Gerade ist die zugehörige Tangente.

89. Steiner hat folgendes allgemeine Problem gestellt[2]): „Gegeben in einer Ebene Π eine Kurve C_n und ein fester Punkt P; den Ort solcher Punkte M von Π zu finden, dafs die Berührungspunkte zweier von M an die Kurve C_n gezogenen Tangenten mit dem Punkte P in gerader Linie liegen.“ Dieses Problem kann nun leicht gelöst werden, wenn die gegebene Kurve eine Konchale ist und der feste

---

1) *Über Tangentenkonstruktionen* (Math. Ann. XXII, 1883).
2) *Ges. Werke*, B. II (Berlin 1884) S. 599.

Punkt der (zu ihrer Definition benutzte) Punkt F ist. Man gelangt zu einer neuen Kurve vierter Ordnung, die symmetrisch in Bezug auf eine Axe ist, nämlich zu der durch folgende Gleichung dargestellten:

$$[k^2 - (a+x)^2]\,y^2 = (x^2 + k^2 - a^2)^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Diese Kurve besitzt zwei Doppelpunkte auf der x-Axe, nämlich die mit den Abscissen $\pm\sqrt{a^2 - k^2}$; sie sind daher reell nur dann, wenn $k < a$; einer von ihnen ist dann ein Knoten, der andere ein isolierter Punkt. Auf der y-Axe hat sie zwei einfache Punkte mit den Ordinaten $\pm\sqrt{k^2 - a^2}$; diese sind reell nur, wenn $k > a$; sie hat dann zwei Asymptoten, deren Gleichungen $x + a \pm k = 0$ sind; es sind diese die Tangenten in dem unendlich fernen Knotenpunkte, welchen die Kurve besitzt. Diese hat also drei Doppelpunkte und ist demnach rational. — Wenn $k = a$, so zerfällt unsere Kurve (4) in die beiden

$$x = 0, \quad (2a + x)\,y^2 + x^3 = 0,$$

d. h. in die y-Axe und eine Cissoide des Diokles. Dieser Umstand macht es ratsam, im allgemeinen Falle die Kurve (4) als Cissoide vierter Ordnung zu bezeichnen. In dem Falle nun, dafs diese Kurve zwei reelle Doppelpunkte im Endlichen hat, kann sie auch ohne Beziehung auf die Konchale konstruiert werden und zwar auf eine Weise, die angegeben zu werden verdient.

„Auf der x-Axe eines kartesischen Koordinatensystems bezeichnen wir einen Punkt $A\ (-a, 0)$ und beschreiben um diesen mit dem Radius $k < a$ einen Kreis Γ (Taf. VI, Fig. 50). Wir ziehen an diesen die Tangenten OM_1 und OM_2 und beschreiben um den Anfangspunkt O mit dem Radius $OM_1 = OM_2 = \sqrt{a^2 - k^2} = s$ einen Kreis. Die Peripherie dieses neuen Kreises schneidet die x-Axe in zwei Punkten, von denen der eine S_1 aufserhalb, der andere S_2 innerhalb von Γ liegt. Ist nun CC' eine beliebige durch S_2 gehende Sehne von Γ, so ziehe man die Geraden CQ und $C'Q'$ senkrecht zu Ox und bestimme deren Schnittpunkte P, P' mit dem von S_1 auf die Gerade CC' gefällten Lote S_1V. Der Ort der Punkte P, P' ist die durch Gleichung (4) dargestellte Cissoide vierter Ordnung.“

Sind nämlich x, y die Koordinaten des Punktes P, so bezeichnet $-x$ die Strecke OQ und y die Strecke PQ. Da nun

$$\triangle\, CVP \sim S_1QP \sim CQS_2,$$

so bestehen die Beziehungen

$$\frac{QS_1}{QP} = \frac{CV}{PV}, \quad \frac{CV}{PV} = \frac{CQ}{QS_2} \quad \text{und daher} \quad \frac{QS_1}{QP} = \frac{CQ}{QS_2}.$$

Daraus folgt: $$CQ = \frac{s - x}{y}(-s - x) = \frac{x^2 - s^2}{y}.$$

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke ACQ ergiebt sich nun

$$CQ^2 = QA^2 - AQ^2 = k^2 - (-x - a)^2 = k^2(x + a)^2,$$

demnach $$\left(\frac{x^2 - s^2}{y}\right)^2 = k^2 - (x + a)^2$$

oder $$y^2[k^2 - (x + a)^2] = (x^2 - a^2 + k^2)^2$$

als Gleichung des Punktes P. Da sie identisch mit (4), so ist die Richtigkeit der Konstruktion bewiesen.

Dreizehntes Kapitel.

Die Cassinische Kurve.

90. Johann Dominicus Cassini hat für astronomische Zwecke eine besondere Kurve erdacht, die, wenngleich sie auch in keiner Beziehung den Bedingungen des Problems, für welches sie erfunden wurde, entspricht, dennoch von vielen Gelehrten untersucht wurde, die dann schöne Eigenschaften an ihr entdeckten. Um über den Ursprung der Kurve zu berichten, ist am besten, folgenden Abschnitt aus den *Eléments d'astronomie* von Jakob Cassini[1]) anzuführen: „Depuis l'observation exacte de la grandeur apparente des Diamètres du Soleil, mon Père a trouvé une autre courbe différente de l'Ellipse, qui sert a réprésenter fort exactement les mouvements vrais du Soleil, et ses divers distances à la Terre. Il suppose, que la Terre étant placée à l'un des foyers de cette courbe, le Soleil la parcoure par son mouvement propre, de manière que tirant de son centre aux deux foyers de la courbe deux lignes droites le rectangle fait sur ces deux lignes soit toujours egal au rectangle fait sur la plus grande et la plus petite distance du Soleil à la Terre[2]).“

Die so definierte Kurve heifst die Cassinische Kurve oder Cassinische Ellipse, oder auch Cassinisches Oval; andere nennen sie allgemeine Lemniskate[3]) oder einfacher Lemniskate[4]) mit Hinzufügung der Beiwörter gleichseitige[5]) für die Bernoullische, die wir im folgenden Kapitel behandeln werden, elliptische für die aus

---

1) Paris 1749. S. 149. S. auch die Artikel von D'Alembert in der *Encyclopédie méthodique* B. I (Paris-Liège 1784) S. 632.

2) Eine andere Art, die hier betrachtete Kurve mit Fragen aus der Mechanik des Himmels in Verbindung zu bringen, sieht man aus der Schrift von E. Oekinghaus, *Die Cassinische Linie in ihrer Beziehung zur Bewegung der Himmelskörper* (Wochenschrift für Astronomie, 2. Ser. XXXI).

3) Steiner, *Einfache Konstruktion der Tangente an die allgemeine Lemniskate* (Crelles Journ. XIV, 1835).

4) Vechtmann, *Diss. inaug. phil. de curvis lemniscatae* (Göttingen 1843).

5) Haton de la Goupillière, *Thèse de mécanique* (Paris 1857) S. 9.

zwei Zügen, hyperbolische für die aus einem einzigen bestehende Cassinische Linie[1]). Wir werden dem ersteren dieser Namen den Vorzug geben, da alle anderen sich nur auf eine einzelne der Formen beziehen, welche die Kurve darbieten kann, wenn wir nicht den Namen Cassinoide gebrauchen wollen, den Montucla vor mehr als hundert Jahren schon einer gerechtfertigten Kritik unterzog[2]), und der wahrscheinlich von d'Alembert für den Gebrauch in der *Encyclopédie* gebildet wurde.

Nehmen wir als Abscissenaxe eines rechtwinkligen kartesischen Systems die Verbindungslinie der beiden festen Punkte F_1F_2 und als Anfang den Mittelpunkt O der Strecke F_1F_2, so sieht man alsbald, dafs, wenn $2a$ den Abstand F_1F_2 und c^2 den Inhalt des gegebenen Rechtecks bedeutet, die Gleichung der Kurve ist

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+a)^2+y^2}=c^2,$$

oder

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)+a^4-c^4=0.^{3)} \quad . \quad . \quad (1)$$

Die Cassinische Kurve ist demnach von der vierten Ordnung und symmetrisch in Bezug auf zwei zueinander senkrechte Axen. Sie schneidet die Gerade F_1F_2 in zwei Punkten A_1, A_2, die immer reell sind, mit der Abscisse $\pm\sqrt{a^2+c^2}$, sowie in zwei weiteren Punkten B_1, B_2 mit der Abscisse $\pm\sqrt{a^2-c^2}$, die daher nur dann reell sind, wenn $a^2>c^2$. Die y-Axe dagegen wird immer in zwei imaginären geschnitten und zwei anderen, die nur dann reell sind, wenn $a^2<c^2$. Daraus ergiebt sich, dafs die Cassinische Kurve aus zwei Zügen besteht, wenn $a^2>c^2$, aus einem einzigen, wenn $a^2<c^2$. Den Fall $a^2=c^2$ schliefsen wir vorläufig aus, da wir uns mit diesem im folgenden Kapitel beschäftigen werden. Wir heben hervor, dafs die Kurve zwei Doppeltangenten hat, nämlich die Geraden $\pm y=\frac{c^2}{2a}$; die zugehörigen Berührungspunkte haben die Abscissen $x=\frac{\pm\sqrt{4a^4-c^4}}{2a}$, sind daher nur

1) J. A. Serret, *Note sur les fonctions elliptiques de I espèce* (Liouvilles Journ. VIII, 1843).

2) „.... quelques auteurs se sont avisé de nommer cette ellipse la Cassinoide, voulant par cette terminaison greque dire en un mot la figure ou la courbe de M. Cassini; mais ce nom est tout-à-fait inepte. On dit Sphéroide, Conchoïde, etc. pour qui ressemble à une sphère, à une coquille etc. C'est le seul sens de mot greque εἶδος d'ou ces mots et leurs semblables sont derivés. Ainsi la Cassioïde ne voulant pas dire la courbe de M. Cassini, la figure ressemblant à M. Cassini. Si l'utilité de cette courbe en astronomie eut répondu aux idées de cet astronome, il eût fallu nommer l'ellipse Cassinienne, comme on dit ellipse Apollonienne, et non Apollonoïde.“ *Histoire de mathématique*, nouv. éd. B. II. S. 565.

3) Wir erinnern daran, dafs wir diese Gleichung schon benutzt haben (in Nr. 61) um zu zeigen, dafs die Cassinische Kurve eine spirische Linie ist.

dann reell, wenn $c < a\sqrt{2}$; in dem Grenzfalle $c = a\sqrt{2}$ fallen die beiden Berührungspunkte zusammen, und wir haben eine Undulationstangente. Aus letzterem geht hervor, daſs nur, wenn $c > a\sqrt{2}$ die Cassinische Kurve eine ovalähnliche Gestalt hat und nur dann die Ellipse zweiter Ordnung in der graphischen Darstellung der Bahnkurve der Gestirne ersetzen könnte.

Um das Verhalten der Cassinischen Kurve im Unendlichen kennen zu lernen, setzen wir $x + iy = \frac{\xi}{\zeta}$, $x - iy = \frac{\eta}{\zeta}$. Die Gleichung (1) wird dann

$$(\xi^2 - a^2\zeta^2)(\eta^2 - a^2\zeta^2) - c^4\zeta^4 = 0 \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Diese Gleichung zeigt, daſs die Cassinische Kurve in dem cyklischen Punkte $\xi = 0$, $\zeta = 0$ als Tangenten die beiden Geraden $\xi \pm a\zeta = 0$ hat; jede der beiden schneidet die Kurve in vier mit dem bezüglichen Berührungspunkte zusammenfallenden Punkten; dasselbe gilt für den Punkt $\eta = 0$; $\zeta = 0$. Man schlieſst daraus: **Die beiden Kreispunkte sind Inflexions-Doppelpunkte für die Cassinische Kurve**[1]. Die entsprechenden Tangenten haben die Gleichungen

$$x + iy \pm a = 0, \qquad x - iy \pm a = 0$$

und schneiden sich in den beiden reellen Punkten mit den Koordinaten $(\pm a, o)$; es sind die beiden Punkte F_1 und F_2, die sich somit als auſserordentliche Brennpunkte der Kurve ergeben. Um die gewöhnlichen Brennpunkte zu finden, suchen wir diejenigen Tangenten von (2), welche durch den Punkt $\xi = 0$, $\zeta = 0$ gehen; setzen wir dazu $\xi = k\zeta$, dividieren die entstehende Gleichung durch ξ^2 und suchen diejenigen Werte auf, die man dem k erteilen muſs, damit die resultierende Gleichung eine doppelte Wurzel $\frac{\eta}{\xi}$ habe. Wir finden dann unschwer $k = \pm\sqrt{a^2 - \frac{c^4}{a^2}}$, und daher haben die vom ersten Kreispunkte gezogenen Tangenten die Gleichungen

$$x + iy = \frac{\pm\sqrt{a^4 - c^4}}{a},$$

und ähnlich die vom zweiten

$$x - iy = \frac{\pm\sqrt{a^4 - c^4}}{a},$$

Diese beiden konjugiert imaginären Geradenpaare schneiden sich noch in zwei reellen Punkten, und zwar sind deren Koordinaten

$$y = 0, \qquad x = \pm\frac{\sqrt{a^4 - c^4}}{a}, \qquad \text{wenn } a^2 > c^2$$

und $$y = \pm\frac{\sqrt{c^4 - a^4}}{a}, \qquad x = 0, \qquad \text{wenn } a^2 < c^2$$

---

1) Cayley, *Note on the cassinian* (Messenger IV, 1875).

Sie liegen daher auf der Verbindungslinie der aufserordentlichen Brennpunkte, wenn die Kurve aus zwei Zügen besteht, dagegen auf der Mittelsenkrechten dieser Linie, wenn sie aus einem einzigen Zuge besteht.

91. Wenn die Cassinische Kurve aus zwei geschlossenen Zügen besteht, kann man, ohne imaginäre Gröfsen einzuführen, die Gleichung (1) in folgender Form schreiben:

$$\frac{\sqrt{(x-\sqrt[4]{a^4-c^4})^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+\sqrt[4]{a^4-c^4})^2+y^2}}{\sqrt{x^2-(y-\sqrt[4]{a^4-c^4})^2}+\sqrt{x^2+(y+\sqrt[4]{a^4-c^4})^2}}=\sqrt{\frac{a^2+\sqrt{a^4-c^4}}{a^2-\sqrt{a^4-c^4}}},$$

und diese drückt folgenden Satz von Wangerin aus: „Wenn man auf den Axen einer aus zwei geschlossenen Zügen bestehenden Cassinischen Kurve, bei welcher der Abstand der aufserordentlichen Brennpunkte $=2a$ und das konstante Produkt der Abstände dieser beiden Punkte von der Kurve $=c^2$, die Strecken OX_1, OX_2, OY_1, OY_2 gleich $\sqrt[4]{a^4-c^4}$ abträgt, so kann die Kurve selbst als Ort solcher Punkte M definiert werden, für welche $\frac{MX_1\cdot MX_2}{MY_1\cdot MY_2}=Const.$[1]).“

In höchst einfacher Weise kann unsere hier betrachtete Kurve in einem bipolaren Koordinatensystem dargestellt werden, wenn F_1 und F_2 die beiden Pole sind, nämlich durch die Gleichung

$$\varrho_1\cdot\varrho_2=c^2.$$

Sie kann jedoch auch leicht dargestellt werden durch eine Gleichung zwischen dem Winkel $F_1MF_2=\Theta$ und dem Radius vector ϱ, der vom Mittelpunkte O der Strecke F_1F_2 aus zu dem variabeln Punkte M der Kurve geht. Es ist nämlich

$$\overline{F_1F_2}^2=\overline{MF_1}^2+\overline{MF_2}^2-2MF_1\cdot MF_2\cdot\cos\Theta,$$

$$MF_1\cdot MF_2=c^2,\qquad \overline{MF_1}^2+\overline{MF_2}^2=2a^2+2\varrho^2,$$

woraus sich ergiebt

$$\varrho^2=a^2+c^2\cdot\cos\Theta,\quad\ldots\ldots\ldots\quad(3)$$

welche Gleichung der Cassinischen Kurve sich in einigen Fällen als nützlich erweist[2]).

Die Definition der Cassinischen Kurve, von der wir ausgingen, eignet sich schlecht für die Zeichnung der Kurve, die punktweise Konstruktion ist jedoch in ziemlich bequemer Weise ausführbar, wenn man sich des folgenden, bis jetzt nicht bemerkten Satzes bedient: „Gegeben ein Kreis mit dem Centrum O und dem Radius r (Taf. VI,

1) *Über eine Eigenschaft der Lemniskate* (Archiv der Math. LV, 1873). Dieser ist ein Spezialfall eines allgemeinen Satzes von Darboux; siehe *Sur une classe remarquable de courbes et surfaces algébriques,* 2. Tirage (Paris 1896) Art. 28 u. 32.

2) Oekinghaus, *Die Lemniskate* (Das. II, Ser. VII u. VIII, 1889).

Fig. 51, a, b, c), einer seiner Durchmesser $F_1 F_2$ und zwei Punkte A_1, A_2 auf seiner Verlängerung in gleichem Abstande von O. Man ziehe durch A_1 (oder A_2) eine beliebige Gerade, die den gegebenen Kreis in M und N schneidet. Die beiden Kreise mit den Mittelpunkten F_1 und F_2 und den Radien $A_1 M$ und $A_1 N$ (oder bezw. $A_2 M$ und $A_2 N$) schneiden sich in zwei Punkten P, deren Ort eine Cassinische Kurve ist."

Um dies zu beweisen nehmen wir O als Anfang, $F_1 F_2$ als x-Axe; ist d der Abstand von A_1 und A_2 von O und ω der Winkel der beliebigen Geraden mit der x-Axe, so ist offenbar

$$\left.\begin{matrix} A_1 M \\ A_1 N \end{matrix}\right\} = d \cdot \cos\omega \pm \sqrt{r^2 - d^2 \sin^2\omega};$$

daher werden die Gleichungen der beiden variabelen Kreise, von denen im obigen Satze die Rede war, sein bezw.

$$x^2 + y^2 - 2rx = d^2(\cos^2\omega - \sin^2\omega) - 2d\cos\omega\sqrt{r^2 - d^2\sin^2\omega},$$

$$x^2 + y^2 + 2rx = d^2(\cos^2\omega - \sin^2\omega) + 2d\cos\omega\sqrt{r^2 - d^2\sin^2\omega}.$$

Eliminieren wir ω, so erhalten wir den Ort der Punkte P. Dann sind diese beiden Gleichungen äquivalent mit den folgenden

$$x^2 + y^2 = d^2(\cos^2\omega - \sin^2\omega), \qquad rx = d \cdot \cos\omega\sqrt{r^2 - d^2\sin^2\omega};$$

die erste liefert

$$\cos^2\omega = \frac{x^2 + y^2 + d^2}{2d^2}, \quad \sin^2\omega = \frac{d^2 - x^2 - y^2}{2d^2};$$

daher wird die zweite

$$(x^2 + y^2)^2 - 2r^2(x^2 - y^2) + d^2(2r^2 - d^2). \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Diese Gleichung, indem sie die Gestalt von (1) hat, beweist den obigen Satz. Da sie sich nicht ändert, wenn man das Vorzeichen von d wechselt, so erhält man dieselbe Cassinische Kurve, wenn man statt des Punktes A_1 den Punkt A_2 benutzt. Gleichung (4) wird völlig identisch mit (1), wenn man $r = a$, $d = \sqrt{a^2 + c^2}$ setzt.

Demnach (zufolge des oben Bewiesenen) hat der feste Kreis zum Durchmesser die Verbindungslinie der beiden aufserordentlichen Brennpunkte, und die beiden festen Punkte sind die beiden stets reellen Punkte, welche die Kurve auf dieser Verbindungslinie hat; sie besteht aus einem oder zwei Zügen, jenachdem $d \gtrless r\sqrt{2}$.

92. Für die Konstruktion der Tangenten und Normalen der Cassinischen Kurve sind verschiedene Methoden angegeben worden. Unter denjenigen, welche die Normale liefern, scheint diejenige den Vorzug zu verdienen, zu der uns eine geometrische Überlegung führt[1]);

1) Peano, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (Turin 1887) S. 142.

sie lautet folgendermafsen: Um in einem Punkte M der Kurve, deren Brennpunkte F_1 und F_2 sind, die Normale zu konstruieren, trage man auf dem Vector MF_2 das Stück $MG_2 = MF_1$ und auf MF_1 das Stück $MG_1 = MF_2$ ab. Wenn nun N die vierte Ecke des Parallelogramms ist, das MG_1 und MG_2 als anstofsende Seiten hat, so ist MN die Normale in M zur Kurve. Als Folgesatz ergiebt sich daraus eine von Steiner[1]) ohne Beweis angegebene Konstruktion der Tangente. — Bezeichnen wir mit ϱ_1 und ϱ_2 die beiden Vectoren F_1M und F_2M und die Winkel NMF_1 und NMF_2 mit φ_1 und φ_2, so ist ersichtlich

$$\frac{\varrho_1}{\sin\varphi_1} = \frac{\varrho_2}{\sin\varphi_2}.$$

Wir ziehen nun die Senkrechten in F_1, F_2, M bezw. zu MF_1, MF_2, MN und nennen T_1', T_2 die Schnitte der dritten (welche die Tangente ist) mit den beiden ersteren. Dann erhalten wir aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken MF_1T_1 und MF_2T_2

$$MT_1 = \frac{\varrho_1}{\sin\varphi_1}, \qquad MT_2 = \frac{\varrho_2}{\sin\varphi_2},$$

und demnach wegen der vorigen Gleichung $MT_1 = MT_2$. Wir schliefsen daraus mit Steiner: Wenn man in F_1 und F_2 zu den beiden Vectoren MF_1 und MF_2 die Senkrechten errichtet und dann durch M diejenige Gerade zieht, welche, von diesen begrenzt, in M halbiert wird, so wird letztere die Tangente in M an die Cassinische Kurve sein, deren Brennpunkte F_1, F_2 sind.

Eine leichte Rechnung liefert folgenden Ausdruck für den Krümmungsradius R in einem Punkte (ϱ) der Kurve[2])

$$R = \frac{2c^2\varrho^3}{a^4 - c^4 + 3\varrho^4},$$

und da nach Einführung von Polarkoordinaten die Gleichung (1) sich schreiben läfst

$$\varrho^4 - 2a^2\varrho^2\cos 2\omega + a^4 - c^4 = 0, \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

so hat man auch $$R = \frac{c^2\varrho}{\varrho^2 + a^2\cdot\cos 2\omega}. \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Es ergiebt sich daraus, dafs die Wendepunkte der Cassinischen Kurve bestimmt werden durch ihre Schnittpunkte mit der Kurve $\varrho^2 + a^2\cdot\cos 2\omega = 0$, welche eine Bernoullische Lemniskate ist (siehe Nr. **93**), und da diese unabhängig von der Konstanten c, so haben alle Cassinischen Kurven, welche dieselben aufserordent-

---

1) S. die vorhin citierte Abh. *Einfache Konstruktion der Tangente an die allg. Lemniskate.*

2) Vgl. z. B. Schlömilch, *Uebungsbuch zum Studium der höh. Analysis* I. (3. Aufl. Leipzig 1878) S. 96.

lichen Brennpunkte gemeinsam haben, ihre Wendepunkte auf einer mit diesen konfokalen Lemniskate. — Wir wollen noch erwähnen, dafs die erste Polare des Anfangspunktes in Bezug auf die Kurve (1) zerfällt in die unendlich ferne Gerade und die Hyperbel mit der Gleichung $a^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4$; da man nun durch Elimination von c aus dieser Gleichung und Gl. (1) findet $\varrho^2 - a^2 \cos 2\omega = 0$, so ist der Ort der Berührungspunkte für die Tangenten an alle Cassinischen Kurven mit denselben aufserordentlichen Brennpunkten, gezogen von dem gemeinsamen Mittelpunkte aus, ebenfalls eine Bernoullische Lemniskate.

Bezüglich der Quadratur und Rektifikation der Cassinischen Kurve wollen wir folgende Resultate anführen:

1) Die Berechnung der Fläche der Cassinischen Kurve hängt von elliptischen Integralen ab; die von der ganzen Kurve umschlossene Fläche wird durch Integrale erster Gattung ausgedrückt, wenn die Kurve aus zwei Zügen besteht, durch Integrale der zweiten Gattung, wenn sie aus einem einzigen besteht[1]).

2) Jeder Bogen einer Cassinischen Linie kann durch die Summe zweier elliptischer Integrale mit komplementären Moduln ausgedrückt werden[1]); die natürliche Gleichung der Cassinischen Kurve enthält daher elliptische Integrale[2]) und erweist sich infolge dessen als von geringerer praktischer Wichtigkeit.

Vierzehntes Kapitel.

Kurven vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten.

93. Wir haben uns noch mit einem bemerkenswerten Spezialfalle der Cassinischen Kurven zu beschäftigen, der entsteht, wenn man in den vorigen Entwickelungen $c = a$ setzt. Alsdann wird die Gleichung (1) aus Nr. **90**

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Sie findet sich zum erstenmal in einem berühmten Artikel, der in den *Acta eruditorum* vom September 1694 steht, unter dem Titel *Jacobi Bernoulli Constructio curvae accessus et recessus aequabilis, ope rectificationis curvae cujusdam algebraicae, addenda nuperae solutionis mensis Junii.* Daselbst erscheint die entsprechende Kurve als analytisches Hilfsmittel und wird bezeichnet als „curva quatuor dimensio-

1) J. A. Serret, *Note sur les fonctions elliptiques de 1. espèce* (Liouvilles Journ. VIII, 1843).

2) Cesàro, *Lezioni di geometria intrinseca* (Neapel 1896) S. 42.

num quae hac aequatione exprimitur $xx + yy = a\sqrt{xx - yy}$, quaeque circum axe BG $[2a]$ constituta formam refert jacentis notae octonarii ∞, seu complicitae in nodum fasciae, sive lemnisci[1]), d'un noeud de ruban Gallis[2])." Von dieser Ähnlichkeit der Gestalt spricht auch Johann Bernoulli in dem Briefe an Varignon, der sich im *Journal des Savants* vom 2. Dez. 1697 findet, wo die Rede ist von der „courbe, que mon frère comparait autrefois à un noeud de ruban"[3]), jedoch war sie noch nicht mit dem Namen Lemniskate bezeichnet, der bestimmt war, für immer in dem Wörterbuche der Mathematiker festen Fuſs zu fassen infolge des oben angeführten Artikels des älteren Bernoulli. — Die Lemniskate hat ständig die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sich gezogen, nicht wegen der Anwendungen, denen sie ihre Entstehung verdankt, sondern wegen der wichtigen Untersuchungen, die der Graf Fagnano an ihr anstellte[4]); er beschäftigte sich mit der Rektifikation derselben und gelangte zu Schlüssen, die in geeigneter Weise entwickelt und verallgemeinert den Kern der Theorie der elliptischen Funktionen bilden; wir erinnern nur daran, daſs er bewies, daſs jeder Lemniskatenbogen algebraisch in n gleiche Teile geteilt werden kann, wenn n eine der Formen $2 \cdot 2^m$, $3 \cdot 2^m$, $5 \cdot 2^m$ hat.

Die Geometer der Epoche Fagnano's scheinen die Lemniskate mehr als Ausgangspunkt analytischer Untersuchungen betrachtet zu haben, als um geometrische Eigenschaften an ihr zu entdecken; zu dieser Ansicht führt uns die Thatsache, daſs lange Zeit hindurch der Umstand unbekannt blieb, daſs die Bernoullische Lemniskate ein Specialfall der Cassinischen Kurve ist. Um diese überraschende Unkenntnis zu beweisen, mögen folgende Worte genügen, mit denen der Artikel über die Lemniskate, den D'Alembert für die *Encyclopédie méthodique* schrieb, abschlieſst: „Il peut y avoir plusieurs autres courbes en 8 de chiffre. Voyez, par exemple, Ellipse de Cassini: mais celle dont nous venons de parler est la plus simple[5])." Die Identität der beiden Kurven wurde im Jahre 1806 öffentlich bewiesen von G. Saladini[6]); es scheint jedoch, daſs sie schon 24 Jahre

1) Von λημνίσκος, Schleife in Form einer 8.

2) S. *Jac. Bernoulli opera* I. (Genf 1744) S. 609; vgl. ebenfalls 611.

3) *Joh. Bernoulli opera* I. S. 213.

4) *Produzioni matematiche* II. (Pesaro 1750) S. 356 ff., 413 und 415. Vgl. auch D. Bierens de Haan, *Dissertatio mathem. inaug. de Lemniscata Bernoulliana* (Amsterdam 1874) §. 5; Enneper, *Elliptische Functionen* (2. Aufl., Halle 1890) S. 531 ff.; Bellacchi, *Introduzione storica alla teoria delle funzioni ellittiche* (Florenz 1894) S. 12 ff.

5) *Encyclopédie méthodique* II. (Paris und Lüttich, 1785) S. 266.

6) S. die Abhandlung *Della discesa de gravi per la lemniscata e della dimostrazione che questa curva è una della famiglia dell' elissi Cassiniane* (Mem. dell' Ist. Ital. I, II. Teil, Bologna 1806).

früher von Pietro Ferroni bemerkt worden sei[1]), in dem nunmehr vergessenen Werke *Magnitudo exponentialium* etc. (1782), dem es jedenfalls nicht zu danken ist, dafs diese Thatsache heute allgemein bekannt ist.

94. Die Gleichung (1) zeigt, dafs der Anfang ein Doppelpunkt der Kurve ist, dessen Tangenten die Halbierungslinien der Axenwinkel sind; diese sind auch Inflexionstangenten; erinnern wir uns dessen, was wir für die Cassinischen Linien im allgemeinen und über ihr Verhalten im Unendlichen nachgewiesen haben (Nr. **90**), so können wir die Behauptung aufstellen: **Die Bernoullische Lemniskate ist eine Kurve vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten, zwei derselben liegen in den cyklischen Punkten der Ebene.** Vermittelst derselben Gleichung wird auch leicht bewiesen: **Die Lemniskate ist die Fufspunktkurve einer gleichseitigen Hyperbel in Bezug auf das Centrum** (vgl. Nr. **95**); und ferner **ist sie diejenige Kurve, die man erhält, wenn man eine gleichseitige Hyperbel einer Inversion unterzieht, deren Pol in das Centrum derselben fällt.** — Eine Gleichung von der Form (1) erhält man ebenfalls, wenn man z aus folgenden beiden Gleichungen eliminiert:

$$x^2 + y^2 = p^2 - 2pz; \qquad y^2 + z^2 = r^2.$$

Demnach ist die Bernoullische Lemniskate die Orthogonalprojektion der Schnittlinie eines Cylinders und eines geeignet gelegenen Rotationsparaboloides[2]). Andere Arten, die Lemniskate zu erzeugen oder zu beschreiben ergeben sich, wenn man beachtet, dafs sie sowohl ein Spezialfall der Cassinischen Kurve (s. Taf. VII, Fig. 51 *b*) als auch der Booth'schen Lemniskate (s. Nr. **65**, besonders die Maclaurin'sche Konstruktion, Taf. III, Fig. 26 *b*) und der Watt'schen Kurve (Nr. **107**) ist, und dafs man daher auf sie alle Erzeugungsmethoden jener Kurven anwenden kann.

Durch Einführung von Polarkoordinaten ϱ, ω, wird Gleichung (1) zu

$$\varrho^2 = 2a^2 \cos 2\omega \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Davon wollen wir sogleich eine Anwendung machen. Nennen wir den Winkel der Normalen im Punkte (x, y) zur Kurve (1) mit der x-Axe ν, so haben wir

$$\operatorname{tg} \nu = -\frac{dx}{dy} = -\frac{a^2 + (x^2 + y^2)}{a^2 - (x^2 + y^2)} \frac{x}{y},$$

oder auch wegen (2)

$$\operatorname{tg} \nu = -\frac{\sin\omega\,(1 + 2\cos 2\omega)}{\cos\omega\,(1 - 2\cos 2\omega)} = \frac{3\sin\omega - 4\sin^3\omega}{4\cos^3\omega - 3\cos\omega} = \frac{\sin 3\omega}{\cos 3\omega} = \operatorname{tg} 3\omega;$$

---

1) S. P. Ferroni, *Prodromo d'osservazioni sopra il trattato di calcolo integrale pubblicato in Parigi dal sig. Marchese de Condorcet* (Memoria delle Società ital. delle Scienze V, 1790).

2) G. Stiner, *Die Bernoullische Lemniscate, dargestellt als Orthogonalprojection von Raumkurven* (Progr. Frauenfeld, 1897).

woraus sich ergiebt:

$$\nu = 3\omega, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

eine sehr bemerkenswerte Beziehung, die von Vechtmann[1]) entdeckt ist, und die nicht nur eine leichte Konstruktionsmethode für die Normale in einem beliebigen Punkte der Lemniskate liefert (und daher auch für die Tangente), sondern auch beweist, dafs das Problem der Dreiteilung des Winkels der Hauptsache nach identisch mit dem ist, an eine Lemniskate eine Normale bezw. Tangente von gegebener Richtung zu ziehen. So z. B. sind die Punkte, in denen die Normale parallel zu der Halbierungslinie des Winkels der positiven Axen ist, diejenigen, für welche ω die Werte hat $\frac{\pi}{12}, \frac{9\pi}{12}, \frac{12\pi}{12}$, so sind die Punkte, für welche $\omega = \pm \frac{\pi}{6}$ die Kulminationspunkte u. s. w.

Dieselbe Gleichung (2) kann auch zum Beweise eines Satzes von Steiner dienen[2]): Zeichnen wir zu dem Zwecke (der Leser möge sich die Figur selbst herstellen) aufser den Brennpunkten F_1, F_2 und den Endpunkten A_1, A_2 der Lemniskatenaxe noch die zu F_1, F_2 konjugiert harmonischen Punkte in Bezug auf das Punktpaar A_1, A_2 nämlich $F_1' F_2'$. Da nun

$$OF_1 = OF_2 = a, \qquad OA_1 = OA_2 = a\sqrt{2},$$
$$OF_1 \cdot OF_1' = OA_1^2, \qquad OF_2 \cdot OF_2' = OA_2^2,$$

so ist $OF_1' = OF_2' = 2a$. Man ziehe nun durch O einen beliebigen Strahl r, der mit der Axe den Winkel ω bildet, und die Kurve in M_1 und M_2 schneidet, projiziere auf diesen die Punkte F_1', F_2' in H_1 und H_2, bestimme ebenfalls die Schnitte von r mit dem Kreise, dessen Durchmesser $F_1' F_2'$ ist; dann hat man

$$H_1M_1 \cdot H_2M_2 = \overline{OH_1}^2 - \overline{OM_1}^2 = (2a\cos\omega)^2 - \varrho^2$$
$$= 4a^2\cos^2\omega - 2a^2\cos 2\omega = 2a^2.$$

Demnach ist das Rechteck $H_1M_1 \cdot H_2M_2$ konstant, und zwar, wie wir sogleich darthun werden, **gleich der Gesamtfläche der Kurve.**

Bezeichnen wir mit A_ω die vom Radius vector beschriebene Fläche der Kurve, wenn der Polarwinkel von 0 bis ω geht, so haben wir wegen Gleichung (2)

$$A_\omega = \frac{1}{2}\int_0^\omega \varrho^2 d\omega = a^2\int_0^\omega \cos 2\omega \cdot d\omega = \frac{a^2}{2}\sin 2\omega;$$

im speziellen ist

$$A_{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2};$$

---

1) *Diss. inaug. phil. de curvis lemniscatae* (Göttingen 1843).

2) *Aufgaben und Lehrsätze* (Crelles Journ. XIV, 1835).

da nun die ganze Fläche $= 4\, A_{\frac{\pi}{4}}$, so ergiebt sich, dafs sie gleich $2a^2$ ist, wie schon oben angegeben wurde und wie Fagnano zuerst bewiesen hat[1]).

Den für A_ω gefundenen Ausdruck kann man auch schreiben

$$A_\omega = A_{\frac{\pi}{2}} \sin 2\omega \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Diese Beziehung führt zur Lösung folgender Aufgabe: „Auf der Lemniskate einen Radius vector zu finden, der den ersten Quadranten in zwei Flächenstücke teilt, die in einem gegebenen Verhältnisse $\frac{\lambda}{\mu}$ stehen[2])." Indem nämlich

$$\frac{A_\omega}{A_{\frac{\pi}{4}} - A_\omega} = \frac{\lambda}{\mu},$$

so hat man wegen (4)

$$\frac{\sin 2\omega}{1 - \sin 2\omega} = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \text{und daher} \quad \sin 2\omega = \frac{\lambda}{\lambda + \mu},$$

wodurch dann ω bestimmt ist. Wenn z. B. $\lambda = \mu$, so ist

$$\sin 2\omega = \frac{1}{2}, \quad \text{daher} \quad \omega = \frac{\pi}{12};$$

der Radius vector hat daher als Endpunkt einen solchen (s. oben), dafs die entsprechende Tangente der zweiten Halbierungslinie des Axenwinkels parallel läuft.

Aus der Gleichung (2) findet man ferner

$$ds = \frac{2a^2 \cdot d\varrho}{\sqrt{4a^4 - \varrho^4}} \cdot {}^{3)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Aufserdem liefert Gleichung (6) von Nr. 89 folgenden Wert des Krümmungsradius:

$$R = \frac{2a^2}{3\varrho}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

woraus sich die Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes leicht er-

1) *Produzioni matematiche* II. (Pesaro 1750) S. 343 u. 344. — Dieses Resultat, das man heute mit solcher Leichtigkeit erhält, dafs es von geringer Wichtigkeit zu sein scheint, war von grofser Bedeutung, als es zuerst erhalten wurde, da es zum Nachweise diente, dafs die Ansicht Tschirnhausens eine irrige war (Acta erudit. 1691, S. 437 u. 1695, S. 490), dafs es unmöglich sei, die Quadratur einer Kurve, die aus mehreren Blättern bestehe, zu erhalten; Fagnano war so durchdrungen von dem Werte seiner Erfindung, dafs er auf das Titelblatt seines grofsen Werkes die Figur der Lemniskate setzte mit der Inschrift:

„Multifariam divisa atque dimensa.
Deo veritatis gloria."

2) Bierens de Haan, die oben angeführte *Dissertatio.*

3) Die Gl. (5) beweist, dafs man die Rektifikation der Lemniskate durch spezielle elliptische Integrale ausführen kann. Schöne Folgerungen hieraus enthält der Aufsatz von Ch. Sturm, *Demonstration de deux theorèmes de géométrie* (Ann. de Gergonne, XIII, 1822—23).

giebt[1]). Eliminieren wir ϱ aus (5) und (6) und setzen zur Abkürzung $\frac{\sqrt{2}}{3}a = \alpha$, so folgt

$$s = 3\int\frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{\alpha}\right)^4 - 1}}$$

als natürliche Gleichung der Lemniskate[2]).

95. Da die Lemniskate eine Kurve vierter Ordnung mit drei Knotenpunkten ist, so ist sie eine rationale Kurve, und man kann daher die Koordinaten ihrer Punkte als rationale Funktionen eines Parameters ausdrücken. In der That läſst sich die Gleichung (1) durch folgende beiden ersetzen:

$$x = a\sqrt{2}\,\frac{\lambda + \lambda^3}{1 + \lambda^4}, \qquad y = a\sqrt{2}\,\frac{\lambda - \lambda^3}{1 + \lambda^4}.\text{[3]}) \quad . \; . \; . \quad (8)$$

Aus dieser Darstellung ergiebt sich vor allem Folgendes[4]): Wenn man λ in $\frac{1}{\lambda}$ verwandelt, so bleibt der Wert von x unverändert; der von y wechselt nur sein Vorzeichen; daher gehören diese Werte des Parameters zwei Punkten der Kurve an, die symmetrisch in Bezug auf Ox liegen. Hingegen entsprechen zweien Kurvenpunkten, die symmetrisch in Bezug auf das Centrum liegen, zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werte von λ. Gehören diese einem Diameter an, der mit der Axe den Winkel δ bildet, so genügen diese der Gleichung

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{1 + \lambda^2}{1 - \lambda^2},$$

oder auch

$$\lambda^2 = \frac{1 - \operatorname{tg}\delta}{1 + \operatorname{tg}\delta}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Aus (8) ergiebt sich folgende Gleichung für die Verbindungslinie der Punkte (α), (β):

$$(1 + \alpha\beta)[(\alpha + \beta)^2 - (1 + \alpha^2\beta^2)]x + (1 - \alpha\beta)[(\alpha + \beta)^2 + (1 + \alpha^2\beta^2)]y - 2\sqrt{2}\cdot a\alpha\beta(\alpha + \beta) = 0; \quad . \; . \; . \quad (10)$$

im Besonderen ist

$$(1 + \lambda^2)(4\lambda^2 - 1 - \lambda^4)x - (1 - \lambda^2)(4\lambda^2 + 1 + \lambda^4) - 4\sqrt{2}\cdot a\lambda^3 = 0 \quad (11)$$

die Gleichung der Tangente an die Lemniskate im Punkte (λ). Da (11) vom 6ten Grade in λ ist, so ergiebt sich — übereinstimmend mit dem was die Plücker'schen Formeln angeben —: **Die Lemniskate ist von**

---

1) Die Gleichung der Evolute der Lemniskate wurde von Bierens de Haan (a. a. O. S. 30) berechnet.

2) Cesàro, *Lezioni di geometria intrinseca* (Neapel, 1896) S. 43.

3) Zuerst von J. A. Serret angegeben (Liouvilles Journ. X, 1845, S. 258).

4) Weitere Folgerungen, auſser den im Texte gegebenen, siehe in der schönen Abhandlung von Em. Weyr, *Die Lemniskate in rationaler Behandlung* (Prager Abh. VI, 1874), und in einer neueren (böhmisch geschriebenen) Arbeit von K. Zahradnik, *Beiträge zur Theorie der Lemniskate* (Càsopis, 28, 1899).

der sechsten Klasse. Die zu einer gegebenen Richtung parallelen Tangenten haben Berührungspunkte, die sich aus der Lösung folgender Gleichung ergeben

$$\frac{(1+\lambda^2)(4\lambda^2-1-\lambda^4)}{(1-\lambda^2)(4\lambda^2+1+\lambda^2)} = Const.$$

Diese kann man nun infolge der Gleichung (9) schreiben

$$\frac{1-3\,\mathrm{tg}^2\,\delta}{3\,\mathrm{tg}\,\delta-\mathrm{tg}^3\,\delta} = Const., \quad \text{d. h.} \quad \mathrm{tg}\,3\delta = Const.;$$

bezeichnet man nun eine der Wurzeln dieser Gleichung mit δ_0, so sind die beiden anderen $\delta_0 + \frac{\pi}{3}$, $\delta_0 + \frac{2\pi}{3}$; daraus folgt: **Die Lemniskate hat sechs Tangenten parallel zu einer gegebenen Richtung; die Berührungspunkte derselben liegen auf drei Diametern, die miteinander einen Winkel $\frac{\pi}{3}$ bilden.**

Wiederum aus (8) folgt als Kollinearitätsbedingung für drei Punkte (λ_1), (λ_2), (λ_3)

$$\lambda_2\lambda_3 + \frac{1}{\lambda_2\lambda_3} + \lambda_3\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_3\lambda_1} + \lambda_1\lambda_2 + \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} = 0, \quad . \quad . \quad (12)$$

und als Bedingung der Koncyklität für die vier Punkte (λ_1), (λ_2), (λ_3), (λ_4)

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 = 1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (13)$$

Machen wir in (12) $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \xi$, so wird diese

$$\lambda + 2\xi + \lambda\xi^2(\xi^2 + 2\lambda\xi) = 0 \,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (12')$$

Ist (λ) gegeben, so dient diese zur Bestimmung der Berührungspunkte der von diesem Punkte an die Lemniskate gezogenen Tangenten; wenn $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ die Parameter der Berührungspunkte sind, so wird man haben

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4 = 2\lambda, \quad \xi_1\xi_2+\xi_3\xi_4+\xi_2\xi_3+\xi_1\xi_4+\xi_3\xi_1+\xi_1\xi_4 = 0,$$

$$\xi_2\xi_3\xi_4+\xi_1\xi_3\xi_4+\xi_1\xi_2\xi_4+\xi_1\xi_2\xi_3 = -\frac{2}{\lambda}, \quad \xi_1\xi_2\xi_3\xi_4 = 1;$$

demnach, durch Elimination von ξ_4

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_1\xi_2\xi_3(\xi_2\xi_3+\xi_3\xi_2+\xi_1\xi_2) = 0.$$

Diese zeigt, mit Hilfe der Gleichung (12), dafs die drei Punkte (ξ_1), (ξ_2), (ξ_3) in gerader Linie liegen; dasselbe kann man wiederholen für die Punkte (ξ_1), (ξ_2), (ξ_4) und kann also schliefsen: **Die Berührungspunkte der vier an eine Lemniskate von einem beliebigen ihrer eigenen Punkte gezogenen Tangenten liegen auf einer geraden Linie.** Da die quadratische Invariante der linken Seite der Gleichung (12′) gleich Null ist, so bilden jene vier Tangenten (als auch ihre Berührungspunkte) eine äquianharmonische Gruppe. Die Gleichung der Geraden, welche jene vier Berührungspunkte enthält, lautet (wenn (λ) der beliebig auf der Kurve gewählte Punkt ist):

$$(1+\lambda^2)x + (1-\lambda^2)y + a\sqrt{2}\,\lambda = 0 \,.\quad .\quad .\quad . \quad (14)$$

Die so dargestellte Gerade ist in Bezug auf das Centrum der Kurve symmetrisch zu der anderen

$$(1+\lambda^2)x+(1-\lambda^2)y-a\sqrt{2}\,\lambda=0;$$

nun halbiert diese unter rechtem Winkel die Verbindungslinie des Punktes (λ) mit dem Kurvencentrum; demnach: **Um die Tangenten an die Lemniskate von einem ihrer Punkte zu konstruieren, verbinde man diesen Punkt mit dem Centrum, errichte auf dieser Strecke die Mittelsenkrechte, die zu dieser in Bezug auf den Mittelpunkt symmetrische Gerade schneidet die Kurve in den Berührungspunkten der gesuchten Tangenten.**

Wir können noch hinzufügen, dafs alle Geraden, die durch eine analoge Gleichung wie (14) dargestellt werden, eine gleichseitige Hyperbel umhüllen, deren Gleichung $x^2-y^2=\frac{a^2}{2}$ ist.

Der Oskulationskreis an die Lemniskate im Punkte (λ) schneidet diese noch in einem weiteren Punkte (μ), welchen man den Satellit- oder Begleitpunkt von λ nennt; zwischen den Parametern λ und μ besteht dann (infolge Gl. (13)) folgende Beziehung:

$$\lambda^3\mu=1; \qquad (15)$$

diese beweist also, **dafs die Satellitpunkte von vier koncyklischen Punkten ebenfalls wieder koncyklisch sind.** Nun hat die Gerade $(\lambda)(\mu)$ die Gleichung

$$(\lambda^6+1)x+(\lambda^6-1)y-2a\sqrt{2}\,\lambda^3=0, \qquad (16)$$

jedoch diese Gleichung gehört dem Lote an, das vom Punkte (μ) mit dem Parameter $\frac{1}{\lambda^3}$ auf den zugehörigen Radius vector gefällt wird, demnach ist der Winkel $(\lambda)(\mu)O$ ein rechter. Damit ist gezeigt: **Die Lemniskate ist die Fufspunktkurve** der von der Geraden (16) eingehüllten Kurve in Bezug auf den Punkt O, d. i. von **der gleichseitigen Hyperbel** $x^2-y^2=2a^2$; hierdurch ist die in Nr. 94 aufgestellte Behauptung bewiesen. — Aus (15) ergiebt sich auch, dafs durch jeden Punkt (μ) der Lemniskate drei Kreise gehen, die sie anderswo oskulieren; sind $(\lambda_1)(\lambda_2)(\lambda_3)$ die Oskulationspunkte, so hat man

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0, \quad \lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_2\lambda_3=0, \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3=\frac{1}{\mu};$$

Daraus leitet man ab, dafs sie der Geraden

$$(1+\mu^2)x+(1-\mu^2)y-2\sqrt{2}\,\mu=0$$

angehören. Beachtet man, dafs diese Gleichung die im Punkte (μ) auf dem zugehörigen Radius vector errichtete Senkrechte darstellt, so kann man den Schlufs ziehen: **Durch jeden Punkt einer Lemniskate gehen drei Kreise, die sie anderswo oskulieren, die Schmiegungs- (Oskulations-)punkte liegen auf der in diesem Punkte zum Radius vector errichteten Senkrechten.**

96. Die Entwickelungen in der vorigen Nr. haben hinlänglich gezeigt, wie nützlich bei der Lemniskate die Darstellung der Koordinaten vermittelst rationaler Funktionen eines Parameters ist. Aber es giebt noch einen weiteren analytischen Kunstgriff, den man in anderen Fällen herbeiziehen kann. Nehmen wir nämlich F_1 und F_2 als Fundamentalpunkte eines bipolaren Koordinatensystems, ϱ_1 und ϱ_2, so ist

$$\varrho_1 \cdot \varrho_2 = a^2$$

die Gleichung der Lemniskate; man kann setzen

$$\varrho_1 = ae^u, \quad \varrho_2 = ae^{-u},$$

wo u einen Parameter bedeutet; oder auch wenn wir die hyperbolischen Funktionen einführen:

$$\varrho_1 = a(\mathfrak{Cos}\, u + \mathfrak{Sin}\, u), \quad \varrho_2 = a(\mathfrak{Cos}\, u - \mathfrak{Sin}\, u). \quad . \quad (17)$$

Um hier von diesen Formeln eine Anwendung zu machen, zeichnen wir uns die Halbierungslinie MD des Winkels $F_1 M F_2$. Dann haben wir

$$F_1 D + F_2 D = 2a, \quad \frac{F_1 D}{F_2 D} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$$

und wegen Gleichung (17)

$$F_1 D = a(1 + \mathfrak{Tg}\, u), \quad F_2 D = a(1 - \mathfrak{Tg}\, u), \quad OD = a\,\mathfrak{Tg}\, u.$$

Aufserdem ist nach einem bekannten elementar geometrischen Satze

$$F_1 M \cdot F_2 M = \overline{MD}^2 + F_1 D \cdot F_2 D,$$

und wenn wir also die gefundenen Werte einsetzen

$$MD = a\,\mathfrak{Tg}\, u.$$

Daraus folgt, dafs $MD = OD$, welche Beziehung durch folgenden Satz ausgedrückt wird: **Die beiden Radien vectoren eines beliebigen Lemniskatenpunktes bilden mit der Verbindungslinie der beiden Brennpunkte ein Dreieck, welches die Eigentümlichkeit hat, dafs die Halbierungslinie des Winkels der beiden Vectoren an Länge gleich ist der Entfernung ihres Endpunktes vom Centrum der Kurve**[1]).

Noch in anderer Weise können die hyperbolischen Funktionen bei der Lemniskate in Anwendung gebracht werden: Man setze

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \mathfrak{Tg}\,\frac{u}{2}$$

und benutze die Gleichung (2); dann findet man als Ausdruck A für einen Lemniskatensector:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^\omega \varrho^2 \cdot d\omega = \frac{a^2}{2}\left(\int_0^u \frac{du}{\mathfrak{Cos}^3 u} - \int_0^u \frac{du}{\mathfrak{Cos}\, u}\right) = a^2\,\frac{\mathfrak{Sin}\, u}{\mathfrak{Cos}^2 u};$$

wenn man aufserdem noch vom Punkte F_1 das Lot $F_2 K$ auf den

---

1) W. Hefs, *Eigenschaften der Lemniscate* (Zeitschr. f. Math. XXVI, 1883).

Radius vector OM fällt, so erhält man ein Dreieck OF_1K, dessen Flächeninhalt ist

$$T = \frac{1}{2}\, OK \cdot F_1K = \frac{a^2 \sin\omega \cdot \cos\omega}{2} = \frac{a^2 \mathfrak{Sin}\, u}{2\, \mathfrak{Cos}^2 u};$$

folglich ist $T = \frac{1}{2} A$. Dies besagt: **Das von einem Brennpunkte der Lemniskate auf einen beliebigen Radius vector des Centrums gefällte Lot halbiert die zwischen Axe, Radius vector und Kurve gelegene Fläche**[1]).

Bevor wir die Kurve, mit der wir uns bis jetzt beschäftigt haben, verlassen, können wir nicht umhin, noch auf folgende schöne mechanische Eigenschaft, die sie besitzt, hinzuweisen: Die Kurve von der Beschaffenheit, dafs ihre Bogen von einem festen Punkte an gerechnet, in derselben Zeit von einem schweren Punkte, der anfänglich in Ruhe ist, durchlaufen werden wie ihre Sehnen, ist eine Lemniskate, deren Centrum in die Anfangslage des bewegten Punktes fällt, und dessen Axe mit der Vertikalen einen Winkel von 45° bildet. Diese Eigenschaft wurde zuerst von Mascheroni bewiesen[2]), dann von Saladini[3]), N. Fufs[4]) und endlich von J. A. Serret[5]); Ossian Bonnet bemerkte sodann[6]), dafs man in ähnlicher Weise eine Lemniskate erhalte, wenn man annimmt, dafs der bewegte Punkt, statt zu gravitieren, von einem festen Centrum mit einer Kraft proportional der Entfernung angezogen werde.

97. Der Umstand, dafs die Lemniskate, wir wir (Nr. **94**) gesehen haben, eine Kurve vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten ist, hat zur Betrachtung aller derjenigen Kurven geführt, die mit dieser besonderen Eigenschaft versehen sind[7]). Die einfachste Art solche zu erhalten ist die, dafs man sich der quadratischen Transformation $\varrho x_i = \frac{1}{y_i}$ bedient, vermittelst derer (s. Nr. **54**) aus einem Kegelschnitte

$$\sum_{ik} a_{ik} y_i y_k = 0$$

1) S. die vorige Note.

2) *Della curva cassiana e di una nuova proprietà meccanica della quale essa è dotata.* Pavia (ohne Datum; das Vorwort aber ist datiert: Ferrara, 2. Aprile 1781). Nach Azarelli (*Moto di un punto materiale lungo un arco della lemniscata bernoulliana*, Annali di Mat. VII, 1865) kommt die Entdeckung dieser Eigenschaft Bonati zu, welcher dieselbe im Juli 1780 veröffentlichte in einem Werkchen, welches den Titel *Nuova curva isocrona* trägt.

3) M. s. die in Nr. 93 citierte Abhandlung dieses Mathematikers.

4) *De descensu gravium super arcu lemniscatae* (Mém. dell' Ac. de St. Petersburg IX, 1824).

5) *Sur une propriété mécanique de la lemniscate, découverte par N. Fufs* (Liouvilles Journ. IX, 1844).

6) *Note sur une propriété de la lemniscate* (Daselbst).

7) Schoute, *Über Kurven vierter Ordn. mit drei Inflexionsknoten* (Archiv der Math. 2. Serie, II, III, IV und VI, 1885—87), sowie *Les quartiques à trois points doubles d'inflexion* (Journal von Teixeira XIII, 1897).

eine Kurve vierter Ordnung mit drei Knotenpunkten entsteht

$$a_{11}x_2^2x_3^2 + a_{22}x_3^2x_1^2 + a_{33}x_1^2x_2^2 + 2a_{23}x_1^2x_2x_3 + 2a_{31}x_1x_2^2x_3 + 2a_{12}x_1x_2x_3^2 = 0.$$

Wenn der ursprüngliche Kegelschnitt dem Fundamentaldreieck umbeschrieben ist, so zerfällt die transformierte Kurve in vier Geraden; ist er einbeschrieben, d. h. ist im allgemeinen $a_{ik} = \sqrt{a_{ii}a_{kk}}$, so hat die transformierte Kurve drei Spitzen, weshalb sie von projektivischem Standpunkte aus nicht verschieden von der im Kap. 7 dieses Abschn. betrachteten ist; wenn endlich in Bezug auf ihn das Fundamentaldreieck selbst konjugiert, so ist $a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0$, und die Gleichung der transformierten Kurve nimmt folgendes Aussehen an:

$$a_1x_2^2x_3^2 + a_2x_3^2x_1^2 + a_3x_1^2x_2^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Die Kurve selbst hat demnach drei Doppelpunkte in den Ecken des Fundamental-Dreiecks; die zugehörenden Tangenten werden dargestellt durch die drei Paare von Gleichungen

$$\frac{x_2}{\sqrt{a_2}} \pm \frac{a_3}{\sqrt{-a_3}} = 0, \quad \frac{x_3}{\sqrt{a_3}} \pm \frac{x_1}{\sqrt{-a_1}} = 0, \quad \frac{x_1}{\sqrt{a_1}} \pm \frac{x_2}{\sqrt{-a_2}} = 0,$$

und daher sind diese zu je zweien harmonisch mit denjenigen Seiten des Fundamentaldreiecks, welche demselben Büschel angehören; sie sind alle Wendetangenten. Gleichung (18) kann daher als kanonische Gleichung der Kurven vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten angesehen werden; diese Kurven besitzen alle deskriptiven Eigenschaften, die wir früher für die Lemniskate bewiesen haben, so z. B. führt ein in Nr. **92** bewiesener Satz zu folgendem Satze von Laguerre: **Wenn eine Kurve vierter Ordnung drei Inflexions-Doppelpunkte hat, so haben die vier Tangenten, die man von einem beliebigen Punkte der Kurve selbst an diese ziehen kann, ihre Berührungspunkte auf einer Geraden liegen**[1]) und liefern ein äquianharmonisches Doppelverhältnis[2]).

Nehmen wir das Fundamentaldreieck als vollständig reell an, so mufs, damit die Kurve (18) unendlich viele reelle Punkte enthalte, eine der Konstanten a das entgegengesetzte Vorzeichen wie die beiden anderen haben; nehmen wir die Bezeichnungen in geeigneter Weise, so können wir a_1 als negativ annehmen; in diesem Falle ist A_1 ein isolierter Punkt der Kurve, während A_2 und A_3 Knotenpunkte sind. Projizieren wir die Kurve derart, dafs eine der Seiten des Fundamentaldreiecks ins Unendliche geht, so erhält man verschiedene Formen der Kurve, jenachdem diese Seite den Punkt A_1 enthält oder nicht.

1) *Sur les courbes du quatrième degré qui ont trois points doubles à inflexion et en particulier sur la lemniscate* (Nouv. Ann. 2. Ser. XVII, 1878).

2) Vgl. G. Kohn, Wiener Ber. 1887, S. 332—33.

Im ersten Falle erhält man eine Kurve (Taf. VII, Fig. 53), die in kartesischen Koordinaten durch eine Gleichung von folgendem Typus dargestellt wird:

$$\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1. \quad \text{. . . . .} \quad (19)$$

Sie hat als reelle Wendeknoten den Anfangspunkt und den unendlich fernen Punkt der y-Axe, während der unendlich ferne der x-Axe ein isolierter Punkt ist. Die reellen Punkte der Kurve liegen innerhalb des von den Geraden $x = \pm a$ begrenzten Streifens der Ebene; in ihrer Gestalt erinnert die Kurve an die Art der Anordnung der beiden Kohlen in einer elektrischen Bogenlampe, daher der Name Kohlenspitzenkurve, mit dem Schoute sie bezeichnet hat, und der auch allgemein angenommen ist. Die Beiwörter gerade und schiefe, können angewandt werden, um darauf aufmerksam zu machen, ob das Axensystem, auf welches die Kurve (19) bezogen wird, ein rechtwinkliges ist oder nicht, während man die Bezeichnung gleichseitige in dem Spezialfalle $a = b$ benutzen kann. Die Gleichung (19) kann durch folgende beiden ersetzt werden, nämlich

$$x = a \cos\varphi, \quad y = b \operatorname{ctg}\varphi, \quad \text{. . . . . .} \quad (20)$$

wo φ einen Parameter bedeutet.

Im zweiten Falle gelangt man zu einer Kurve (Taf. VII, Fig. 54), die in kartesischen Koordinaten durch folgende Gleichung dargestellt wird

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1. \quad \text{. . . . .} \quad (21)$$

Sie hat im Anfange einen isolierten Punkt, und die beiden unendlich fernen Punkte der Axen sind Inflexionsknoten; ihre reellen Punkte liegen aufserhalb der beiden von $x = \pm a$, $y = \pm b$ begrenzten Streifen. Diese Kurve findet sich seit 1847 in einer von Terquem[1]) vorgelegten Frage; sie findet sich weiter in einigen Untersuchungen von La Gournerie unter dem Namen Trinodale harmonique[2]); häufiger wird sie jedoch heute, wie es Schoute gethan hat, Kreuzkurve genannt mit Rücksicht auf ihre Gestalt; auch auf sie kann man die Beiwörter gerade und schiefe anwenden, jenachdem die Axen rechtwinklig oder schief zueinander stehen[3]); diejenige, bei welcher $a = b$, nennt man aber die cirkulare. Die gerade cirkulare Kreuzkurve erfreut sich der Eigentümlichkeit, dafs ihre Fufspunktkurve in Bezug

---

1) Nouv. Ann. 6, Question 165.

2) *Recherches sur les surfaces reglées tétraédrales symetriques* (Paris 1867) S. 92.

3) Von G. de Longchamps jedoch wurde der Name Kreuzkurve oblique einer Kurve gegeben, die in einem schiefwinkligen Axensystem (mit dem Axenwinkel Θ) die Gleichung hat: $4x^2y^2 \sin^4\Theta = k^2(x^2 + y^2 - 2xy\cos\Theta)$. S. *Cours de problèmes de géométrie analytique.* II. (Paris 1899) S. 291.

auf das Centrum und ihre Evolute denselben Flächeninhalt haben[1]); es giebt unendlich viele Kurven mit derselben Eigentümlichkeit nämlich alle, die folgende Polargleichung haben:

$$\varrho \sin \mu\omega = Const., \quad \varrho \cdot \mathfrak{Sin}\, \mu\omega = Const., \quad \varrho \cdot \mathfrak{Cos}\, \mu\omega = Const.\ ^{2)}.$$

Es möge noch bemerkt werden, daſs die Gleichung (21) durch folgende beiden ersetzt werden kann:

$$x = \frac{a}{\cos\varphi}, \quad y = \frac{b}{\sin\varphi}, \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

wenn φ, wie gewöhnlich, einen Parameter bedeutet. — Beachten wir schlieſslich, daſs die Kurven (19) und (21) in folgender sehr einfachen Weise von den Kegelschnitten $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ abgeleitet werden können: „Man ziehe in einem beliebigen Punkte M des Kegelschnittes die Tangente, und bestimme die Schnitte derselben mit den Koordinataxen; durch diesen Punkt ziehe man die Parallelen zu den Axen selbst, deren Schnitt ist ein Punkt der fraglichen Kurve.“

Die Kurve (18) kann selbst dann noch reell sein, wenn zwei Ecken des Fundamentaldreiecks konjugiert imaginär sind; sind es z. B. A_2 und A_3, so setze man

$$\frac{x_2}{x_1} = x + iy, \quad \frac{x_3}{x_1} = x - iy, \quad \frac{a_2}{a_1} = \alpha + i\beta, \quad \frac{a_3}{a_1} = \alpha - i\beta,$$

dann wird Gleichung (18) zu

$$(x^2 + y^2)^2 + 2\alpha(x^2 - y^2) + 4\beta xy = 0. \quad \ldots \quad (23)$$

Die so in kartesischen Koordinaten dargestellte Kurve hat im Anfange einen Inflexionsdoppelpunkt, und heiſst wegen ihrer Gestalt projektive Lemniskate; sie kann auch angesehen werden als aus der Bernoulli'schen hervorgehend, wenn man auf diese eine reelle homographische Transformation anwendet.

Endlich heiſst die Kurve mit der Gleichung

$$(x^2 + y^2 + 2xy\cos\alpha)^2 = 4a^2xy, \quad \ldots \quad (24)$$

wo α der Winkel der Axen ist, die schiefe Lemniskate[3]).

---

1) *Intermédiaire* III. 1897, S. 247.
2) Welsch in *Intermédiaire* IV. 1898, S. 115—16.
3) G. de Longchamps, *Cours de problèmes etc.* II. S. 374

Fünfzehntes Kapitel.

Die Muschellinie und die Trisekante.

98. In diesem Kapitel werden wir uns mit zwei bemerkenswerten cirkularen Kurven vierter Ordnung beschäftigen, die beide rational sind; das Ursprungsland der älteren ist Deutschland, das der anderen Italien.

Der berühmte Maler Albrecht Dürer hat in seiner vielgepriesenen *Underscheidung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheyt* (Nürnberg 1525) einen Apparat beschrieben[1]), um eine Linie zu zeichnen, die von ihm Muschellinie genannt wird, „die in mancherley Sachen zu gebrauchen ist“[2]). Es ist eine Kurve, die geometrisch in folgender Weise definiert werden kann: „Gegeben zwei zueinander senkrechte Geraden Ox, Oy (Taf. VIII, Fig. 55, a, b, c); auf der ersteren ist ein fester Punkt A bezeichnet, eine Strecke MP von konstanter Länge bewegt sich so, dafs der eine Endpunkt M die Gerade Ox durchläuft und dafs, wenn N ihr Schnittpunkt mit Oy ist, immer $ON = AM$; der Ort des anderen Endpunktes P ist dann die Dürer'sche Muschellinie.“ — Um ihre analytische Darstellung zu finden, setzen wir $OA = a$ und $OM = z$, dann wird $ON = a - z$ sein, und die Gleichung der Geraden MN

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{a-1} = 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Ist nun $MP = b$, so ist

$$(x - z)^2 + y^2 = b^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Aus diesen beiden entsteht die Gleichung der Muschellinie durch Elimination von z, sie ist demnach

$$(xy + b^2 - y^2)^2 = (x + y - a)^2 (a^2 - y^2) \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Die Muschellinie von Dürer ist also eine Kurve vierter Ordnung: Doppelpunkte derselben sind ersichtlich die Schnittpunkte D', D'' der Geraden

$$x + y = a$$

mit dem Kegelschnitte

$$xy + b^2 - y^2 = 0;$$

diese beiden Punkte sind immer reell und begrenzen ein Segment, welches den Punkt D mit den Koordinaten $x = \frac{3a}{4}$, $y = \frac{a}{4}$ zum Centrum hat. Schnitte der Kurve mit der x-Axe sind der zugehörige

1) Vgl. Braunmühl, *Historische Studie über die organische Erzeugung ebener Curven* etc. (Katalog mathem. u. mathem.-physikalischer Modelle etc. München 1892) S. 62.

2) Vgl. S. Günther, *Albrecht Dürer einer der Begründer der modernen Curvenlehre* (Bibliotheca mathematica 1886, S. 139).

unendlich ferne Punkt zweimal gezählt und die beiden Punkte B und C mit den Abscissen $a \pm b$; Schnitte mit der y-Axe sind die vier Punkte mit den Ordinaten $\pm b$, $\frac{a \pm \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}$. Schliefslich Schnitte der Muschellinie mit der unendlich fernen Geraden sind die cyklischen Punkte der Ebene und der unendlich ferne der x-Axe zweimal gezählt. Dieser letzte Punkt ist also auch ein Doppelpunkt der Kurve; die zugehörigen Tangenten sind die Geraden r', r'' parallel zu Ox mit der Gleichung $y = \pm \frac{b}{\sqrt{2}}$. Fassen wir dies zusammen, so ergiebt sich: **Die Dürer'sche Muschellinie ist eine rationale, cirkulare Kurve vierter Ordnung.** Die parametrische Darstellung durch rationale Funktionen ist leicht zu erhalten; Gleichung (2) läfst sich nämlich ersetzen durch die beiden

$$x = z + b \cos\varphi, \qquad y = b \sin\varphi;$$

setzen wir diese Werte in (1) ein, so finden wir

$$z = \frac{a \cos\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi},$$

und demnach werden die beiden vorigen zu

$$x = \frac{a \cos\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi} + b \cos\varphi, \qquad y = b \cdot \sin\varphi; \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

setzen wir schliefslich $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = \lambda$, so gelangen wir zu der gesuchten Darstellung.

Es giebt eine Parabel, die mit der Muschellinie in engem Zusammenhange steht, nämlich die Enveloppe der Geraden MN; man erhält ihre Gleichung, wenn man aus (1) sowie aus ihrer nach z Abgeleiteten z eliminiert; demnach lautet sie

$$(x - y)^2 - 2a(x + y) + a^2 = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

daraus ergiebt sich, dafs diese Parabel die erste[1]) Halbierungslinie des Axenwinkels als Axe, die zweite als Direktrix hat, den Punkt $V\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$ zum Scheitel, und $F\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ zum Brennpunkte; es ist bemerkenswert, dafs dieser auch der aufserordentliche Brennpunkt ist, mit welchem die Muschellinie versehen ist.

Die Dürer'sche Kurve kann je nach dem relativen Werte der Konstanten a, b verschiedene Gestalten annehmen. Vor allem geht aus dem früher gesagten hervor, dafs sie die y-Axe in zwei reellen

1) Wir bezeichnen der Kürze wegen mit erster Halbierungslinie diejenige, welche den Winkel zwischen den beiden positiven (und negativen) Axenrichtungen halbiert, mit zweiter die andere.

verschiedenen, zusammenfallenden oder imaginären Punkten trifft, jenachdem $a \lesseqgtr b\sqrt{2}$. — Wichtiger ist eine Einteilung, die aus der Betrachtung der Doppelpunkte hervorgeht. Sind ξ und η die Koordinaten eines solchen, so wird sein

$$\xi\eta + b^2 - \eta^2 = 0, \qquad \xi + \eta - a = 0;$$

daher ist, wenn man zur Abkürzung $a^2 + 8b^2 = c^2$ setzt,

$$\eta = \frac{a + \varepsilon c}{4}, \qquad \text{wo } \varepsilon = \pm 1.$$

Man betrachte nun eine beliebige von einem dieser Punkte ausgehende Gerade r; sind x, y die Koordinaten eines ihrer Punkte, so ist

$$x = \xi + \varrho \cdot \cos\omega, \qquad y = \eta + \varrho \cdot \sin\omega;$$

setzt man diese Werte in (3) ein, so erhält man eine Gleichung, die durch ϱ^2 teilbar ist. Nach ausgeführter Division bleibt die Gleichung

$$[\xi \sin\omega + \eta\cos\omega + \varrho\sin\omega\cdot\cos\omega - 2\eta\sin\omega - \varrho\sin\omega]^2$$
$$= (\cos\omega + \sin\omega)^2(b^2 - \eta^2 - 2\varrho\eta\sin\omega - \varrho^2\sin^2\omega).$$

Damit nun die Gerade r sich als Tangente der Muschellinie ergebe, mufs auch diese Gleichung durch $\varrho = 0$ befriedigt werden; schreibt man so, dafs dieser Umstand eintritt, so findet man die Gleichung:

$$(3a^2 + 16b^2 - \varepsilon ac)\sin^2\omega - 16b^2\sin\omega\cdot\cos\omega + (a^2 + \varepsilon ac)\cos^2\omega = 0,$$

die vom zweiten Grade in $\operatorname{tg}\omega$ ist; ihre Diskriminante ist

$$\Delta = 8(a^2 + 8b^2)(4b^2 - a^2 - \varepsilon a\sqrt{a^2 + 8b^2}).$$

Diese Gleichung wird demnach reelle verschiedene, zusammenfallende oder imaginäre Wurzeln haben, jenachdem

$$4b^2 - a^2 - \varepsilon a\sqrt{a^2 + 8b^2} \gtreqless 0.$$

nun ist für $\varepsilon = -1$ die linke Seite sicher positiv, **demnach ist der Doppelpunkt der Muschellinie, der eine negative Ordinate hat, immer ein Knoten. Was den anderen betrifft, so ist dieser Knoten eine Spitze oder ein isolierter Punkt, jenachdem**

$$4b^2 - a^2 - a\sqrt{a^2 + 8b^2} \gtreqless 0,$$

d. h. jenachdem $b \gtreqless a$.

In dem Falle, dafs der Doppelpunkt mit positiver Ordinate eine Spitze ist, ist seine Ordinate $= a$, während seine Abscisse $= 0$ ist, die zugehörige Tangente bildet mit Ox einen Winkel, dessen trigonometrische Tangente $= \frac{1}{2}$; die Kurve geht durch den Anfang und wird dort von der zweiten Halbierungslinie der Axenwinkel berührt. Der Kurve gehören ferner die Punkte $(2a, 0)$ und $(0, -a)$ an; der Punkt $\left(\frac{3a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$ ist der Knoten, den die Kurve in endlicher Entfernung hat.

In jedem Falle besteht die Kurve aus einem Zweige, der die Form der Konchoide hat, woraus sich die Berechtigung ihres Namens ergiebt, und einem zweiten, der verschieden geformt ist.

99. Die andere cirkulare Kurve, mit der wir uns in diesem Kapitel beschäftigen müssen, ist gegen Ende des 18. Jahrhunderts erfunden, um einen beliebigen Winkel in drei gleiche Teile zu teilen, weshalb sie den Namen Trisekante führt[1]). Ihre Entstehung ist folgende: „Gegeben ein Kreis mit dem Centrum O und dem Radius a (Taf. VIII, Fig. 56) und ein fester Radius desselben OA; man ziehe einen beliebigen anderen Radius OM und konstruiere über ihm als Basis ein gleichschenkliges Dreieck OMP derart, dafs

$$\sphericalangle\, OMP = POM = \tfrac{1}{2} AOM;$$

der Ort des Punktes P ist eine Trisekante." Man nehme O als Pol, OA als Polaraxe, dann ist

$$OP = \varrho, \quad \sphericalangle\, MOA = \omega, \quad \sphericalangle\, MOP = \frac{\omega}{2}, \quad \frac{1}{2} OM = OP \cdot \cos MOP,$$

und daher:
$$\frac{a}{2} = \varrho \cdot \cos \frac{\omega}{2} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Dies ist die Polargleichung der Trisekante; die kartesische Gleichung lautet infolge dessen

$$(a^2 - y^2)(x^2 + y^2) - \frac{a^4}{4} = 0.$$

Die Trisekante ist demnach eine cirkulare Kurve vierter Ordnung, symmetrisch sowohl in Bezug auf den Durchmesser AOA' als auch in Bezug auf den dazu senkrechten BOB'; sie hat als Doppelpunkte die beiden Punkte D, D' dieses zweiten Durchmessers, die von O den Abstand $\frac{a}{\sqrt{2}}$ haben, und als einfache Punkte die Mittelpunkte C, C' der beiden Radien OA, OA'; auch der unendlich ferne Punkt von AA' ist ein Doppelpunkt, (somit ist die Kurve rational) die entsprechenden Tangenten berühren den gegebenen Kreis in B, B' und begrenzen einen Streifen der Ebene, innerhalb dessen alle reellen Punkte der Trisekante liegen. Aus Gleichung (2) folgert man

$$x = \frac{\frac{a^2}{2} - y^2}{\sqrt{a^2 - y^2}};$$

daher, wenn man $y = \sin u$ setzt, erhält man

$$\int x\,dy = \int \left(\frac{a^2}{2} - a^2 \sin^2 u\right) du = \frac{a^2}{2} \int \cos 2u\, du = \frac{a^2}{4} \sin 2u + Const.$$

Integrieren wir zwischen $u = \frac{\pi}{4}$ und $u = 0$, so ergiebt sich, dafs

1) P. Delanges, *La trisegante nuova curva; e pensieri sulla formola cardanica* (Verona 1783).

die Fläche des gemischtlinigen Dreiecks $OCPD$ durch $\frac{a^2}{4}$ ausgedrückt wird, daher ist die Fläche des krummlinigen Vierecks $CDC'D'$ gleich a^2, d. h. gleich dem Quadrate über dem Radius des gegebenen Kreises.

Kehren wir zur Polargleichung (1) zurück, um zu bemerken, daſs wenn man in ihr setzt

$$\varrho_1 = \varrho, \quad \omega_1 = \frac{\omega}{2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wir damit eine geometrische Transformation bestimmt haben, durch welche die Trisekante in die Linie

$$\frac{a}{2} = \varrho_1 \cos \omega_1, \quad \text{das ist } x = \frac{a}{2},$$

verwandelt wird, also in die Gerade r, die durch C parallel zu BB' gezogen ist. Wenn wir nun umgekehrt die entgegengesetzte Transformation $\varrho = \varrho_1$, $\omega = 2\omega_1$ anwenden, so entsteht aus der Geraden r die Trisekante. Beschreiben wir also (s. Taf. VIII, Fig. 56) einen Kreis um O mit einem Radius $> \frac{a}{2}$, welcher OA in K und die Gerade r in E schneidet und nehmen auf dessen Peripherie einen Punkt Q so, daſs der Bogen $KEQ = 2 \cdot$ Bogen KE, so ist Q offenbar ein Punkt der Trisekante; variiert man nun den Kreis, so erhält man beliebig viele Punkte derselben. Da die Kurve zweifach symmetrisch ist, so liefert jeder Punkt Q sogleich noch drei andere; demnach wird die Kurve sozusagen durch Punktquadrupel erzeugt, in einer für die praktische Zeichnung auſserordentlich bequemen Weise.

Bemerkenswert ist die Thatsache, daſs die Trisekante hundert Jahre nach ihrer Entdeckung neuerdings zu ähnlichen Zwecken von einem amerikanischen Geometer wieder aufgefunden wurde, W. Hillouse[1]), der, um ihre Anwendung für die Dreiteilung eines Winkel noch bequemer zu gestalten, ein Instrument erdachte, um sie mechanisch zu zeichnen.

Sechzehntes Kapitel.

Von einem Kegelschnitte abgeleitete Kurven vierter Ordnung.

100. Unsere lange und mühevolle Heerschau über die speziellen Kurven vierter Ordnung geht ihrem Ende zu; bevor wir jedoch damit zunächst vorläufig abschlieſsen — vorläufig sagen wir, weil wir später noch auf weitere Kurven vierter Ordnung als Spezialfälle von

1) S. den Artikel: *On a new curve for the trisection of an angle* (Analyst IX, 1882).

allgemeineren Kurven treffen werden — wollen wir noch auf einige Kurven hinweisen, zu denen die Theorie der Kegelschnitte führt.

Zunächst bietet sich uns dar der Ort der Mittelpunkte der Sehnen eines centrischen Kegelschnittes

$$Ax^2 + By^2 = 1,$$

die eine gegebene Länge c haben; durch eine nicht schwierige Rechnung fanden M. Steiner[1]) und später O. Terquem[2]) die Gleichung desselben als

$$A^3x^4 + B^3y^4 + AB(A+B)x^2y^2 = B^2(1-Ac^2)y^2 + A^2(1-Bc^2)x^2. \quad (1)$$

Diese Sehnen umhüllen eine Kurve vierter Klasse, und ihre Pole in Bezug auf den gegebenen Kegelschnitt haben als geometrischen Ort eine Kurve, die durch folgende von Schlömilch[3]) gefundene Gleichung dargestellt wird.

$$\frac{1}{Ax^2 + By^2} + \frac{1}{A\left(\frac{1}{Bc^2} - 1\right)x^2 + B\left(\frac{1}{Ac^2} - 1\right)y^2} = 1. \quad . \quad . \quad (2)$$

Gehen wir zu einem anderen Orte über. Gegeben sei die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

mit dem Centrum O. Wir betrachten ein Paar konjugierter Durchmesser MM', NN' von der Länge m, n und tragen auf dem ersteren die Strecken

$$OP = OP' = \sqrt{m^2 - n^2}$$

ab; der Ort der Endpunkte PP' heifst dann die Parameter-Kurve[4]). Ihre Gleichung ist leicht zu finden; sind nämlich x, y die Koordinaten von M und X, Y die von P, so bestehen die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad X^2 + Y^2 = m^2 - n^2, \quad x^2 + y^2 = m^2,$$

$$a^2 + b^2 = m^2 + n^2, \quad \frac{x}{X} = \frac{y}{Y};$$

aus den vier letzteren ergiebt sich nun

$$x^2 = \frac{1}{2}\,\frac{X^2(X^2 + Y^2 + a^2 + b^2)}{X^2 + Y^2}, \qquad y^2 = \frac{1}{2}\,\frac{Y^2(X^2 + Y^2 + a^2 + b^2)}{X^2 + Y^2};$$

durch Einsetzen in die erste gelangt man dann zu

$$(X^2 + Y^2)(a^2Y^2 + b^2X^2) = (a^2 - b^2)(b^2X^2 - a^2Y^2) \quad . \quad (3)$$

als Gleichung der Parameter-Kurve.

---

1) *De loco geometrico lineae rectae definitae cujusdam longitudinis cujus termini in linea secundi ordinis moventur* (Diss. Breslau, 1841).

2) Nouv. Ann. IV. 1845, S. 590.

3) *Über einige aus Kegelschnitten abgeleitete Curven* (Zeitschr. f. M. XIV. 1869).

4) Jacob in Nouv. Ann. II. 1843, S. 138, und Tortolini, *Applicazioni dei trascendenti ellittici alla quadratura di alcune curve sferiche* (Mem. della Soc. Ital. delle Scienze, XXIV. 1850).

In einer Ebene sei ein Kegelschnitt Γ gegeben. Jeder Punkt P der Ebene ist Centrum einer Involution von in Bezug auf die Kurve Γ konjugierten Geraden. Ferner kann man einen unendlich kleinen Kegelschnitt betrachten, die sogenannte Indikatrix von P,[1]) der P zum Centrum und diese Geraden als konjugierte Durchmesser hat; ein solcher Kegelschnitt kann angesehen werden als bestimmt durch den Winkel λ, den eine seiner Axen mit einer festen Geraden bildet und durch das Verhältnis r der Längen seiner Axen. Somit gehören zu jedem Punkte der Ebene zwei Gröfsen λ und r. Man kann nun den Ort derjenigen Punkte betrachten, für welche eine dieser beiden Gröfsen konstant ist; ist die erste konstant, so heifst die Kurve isogone Linie, ist die zweite konstant, so heifst sie Niveau-Linie. Alle diese Kurven sind von der vierten Ordnung, wie der Leser verifizieren kann.

Wir schliefsen dieses Kapitel mit der Anführung folgender Sätze, die man zum Teil Steiner verdankt[2]):

Der Ort der Mittelpunkte der einem gegebenen Dreiecke einbeschriebenen Kegelschnitte, die einem gegebenen Kegelschnitte ähnlich sind, ist eine Kurve vierter Ordnung, die die unendlich ferne Gerade in den Kreispunkten, und die Geraden, die je zwei Mittelpunkte der Seiten verbinden, in den Punkten berührt, in welchen sie den Kreis schneiden, in Bezug auf welchen jenes Dreieck zu sich selbst konjugiert ist.

Der Ort der Kegelschnitte, die einem gegebenen Dreiecke umbeschrieben sind, und von denen man das Axenverhältnis kennt, ist eine Kurve vierter Ordnung, die die Seitenmittelpunkte zu Doppelpunkten hat, und die unendlich ferne Gerade in den Kreispunkten berührt.

Der Ort der Mittelpunkte der Kegelschnitte, die einem gegebenen ähnlich sind, und in Bezug auf welche ein gegebenes Dreieck zu sich selbst konjugiert ist, ist eine Kurve vierter Ordnung, welche die Ecken des Dreiecks zu Doppelpunkten hat und die unendlich ferne Gerade in den Kreispunkten berührt.

---

1) A. Haas, *Über die Indicatricen der Kegelschnitte* (Zeitschr. XXXIV. 1889).

2) Für den Beweis siehe: G. Loria, *Studii sulla teoria delle coordinate triangolari* (Giornale di Matem. XXIV. S. 206, 210 u. 213).

IV. Abschnitt.

Spezielle algebraische Kurven von höherer als der vierten Ordnung.

Erstes Kapitel.

Kurven von einem Kegelschnitt abgeleitet.

101. Die Theorie der Kurven dritter Ordnung ist gleichsam schon eine Provinz des Reiches der Mathematik geworden, die Theorie der Kurven vierter Ordnung ein Gebiet, das nur zum Teil diesem Reiche unterworfen ist; jedoch die Theorie der Kurven einer bestimmten höheren Ordnung verhält sich unabhängig und auflehnend gegen jedes Gesetz. Wenn man von den von Cramer gemachten Versuchen[1]) die Kurven fünfter Ordnung einer methodischen Klassifikation zu unterwerfen — indem er elf Klassen aufstellte, die sich auf die Betrachtung ihres Verhaltens im Unendlichen gründen — absieht, und von den algebraischen Untersuchungen G. Maisano's über ihre Doppeltangenten[2]) sowie von einzelnen wichtigen Untersuchungen über die rationalen[3]) und die elliptischen[4]) Kurven fünfter Ordnung, so kann man sagen, dafs bis jetzt noch nichts geschehen sei, um die dichte Finsternis zu durchleuchten, die uns die Eigenschaften der Kurven verhüllt, die unmittelbar auf diejenigen folgen, denen der vorige Abschnitt dieses Werkes gewidmet war. Nicht nur dies: auch keine

---

1) *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Genf 1750) S. 397.

2) *Gleichung der Curve, welche die Berührungspunkte der doppelten Tangenten der allgemeinen Curve des fünften Grades ausschneidet* (Math. Ann., XXIX, 1887).

3) Wir meinen die Abhandlungen von Rohn (*Eine einfache Konstruktion der ebenen rationalen Kurven fünfter Ordn.*, Math. Ann. XXV, 1885), von de Jonquières (*Construction géométrique de courbes unicursales, notamment de celle du cinquième ordre donnée de cinq points doubles,* Palermo Rend., II, 1887), und die Untersuchungen von J. F. Eberle, *Über rationale Curven fünfter Ordnung, insbesondere diejenigen vierter und fünfter Klasse* (München 1892), wo die Erzeugung einer rationalen Kurve fünfter Ordn. vermittelst einer Kurve dritter Klasse und eine zweiter, die zueinander projektiv sind, dargelegt und angewendet wird.

4) J. De Vries, *Über Curven fünfter Ordnung mit vier Doppelpunkten* (Wiener Ber. CIV, 1893).

spezielle Kurve fünfter Ordnung hat einen besonderen Namen erhalten, obwohl ein gelehrter Mathematiker (H. Brocard) neuerdings öffentlich die Frage der Aufzählung der speziellen schon bekannten Kurven fünfter Ordnung aufgeworfen hat[1]); die Antworten, die er erhielt, zeigen, dafs diese weder sehr zahlreich noch auch wichtig sind[2]). Die interessantesten unter ihnen sind vielleicht diejenigen, die mit der Theorie der Kegelschnitte zusammenhängen. Folgende Beispiele mögen dieses zeigen:

1. Der Ort der Mittelpunkte der einem gegebenen Dreiecke umbeschriebenen Kegelschnitte, von welchen man die Summe der Quadrate der Halbaxen kennt, ist eine Kurve fünfter Ordnung, die durch die Kreispunkte der Ebene geht, die Mittelpunkte der Dreiecksseiten zu Doppelpunkten und die Seiten selbst zu Wendeasymptoten hat[3]).

2. Gegeben eine Parabel; man betrachte einen Punkt P derselben, die zugehörige Tangente t und einen Kreis mit dem Centrum O, der durch den Scheitel der Parabel geht; dieser schneidet die Gerade t in zwei Punkten, deren Ort eine cirkulare Kurve fünfter Ordnung ist, die den Scheitel der gegebenen Parabel als dreifachen Punkt hat[4]).

3. Gegeben ein Kegelschnitt und ein Punkt O seiner Ebene; man ziehe durch O einen beliebigen Strahl, der die Kurve in den Punkten A, B schneidet; die Normalen des Kegelschnittes in A und B schneiden sich in einem Punkte N, dessen Orthogonalprojektion auf den Strahl P sein möge. Der Ort des Punktes P ist eine Kurve fünfter Ordnung[5]).

4. Der Ort der Brennpunkte der einem Dreiecke umbeschriebenen Parabeln ist eine rationale und cirkulare Kurve fünfter Ordnung[6]).

102. Die Theorie der Kegelschnitte, die zu so vielen bemerkenswerten Kurven vierter und fünfter Ordnung führt (s. Nr. **100** u. **101**), liefert uns auch sehr viele Kurven höherer Ordnung[7]):

1. Der Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte, die durch vier feste Punkte gehen, ist eine Kurve sechster Ordnung, welche die

---

1) *Intermédiaire* V. 1898, S. 3.

2) *Intermédiaire* V. 1898, S. 136, 201 u. 278; ferner VI. 1899, S. 181 u. 275; VII, 1900, S. 55 u. 276; VIII, 1901, S. 62 u. 88.

3) G. Loria, *Studii sulla teoria delle coordinate triangolari* (Giorn. di Mat. XXIV. 1880, S. 209).

4) G. Cardoso Laynes im *Intermédiaire* VI. 1899, S. 181.

5) Barisien im *Intermédiaire* VI. 1899, S. 275.

6) Cayley, Educ. Times VII. 1867 (auch *Collected math. Papers* VII, 568—71).

7) Es möge noch die Kurve 6. Ordn. hinzugefügt werden, auf welche wir am Schlusse von Nr. 17 hingewiesen haben.

Aufmerksamkeit von Sylvester[1]) und Cayley[2]) auf sich gezogen hat. Diese machten die Bemerkung, dafs Doppelpunkte derselben sind: die Kreispunkte der Ebene, die Diagonalpunkte des Vierecks der 4 festen Punkte sowie die Höhenfufspunkte des zugehörigen Diagonaldreiecks. Sie hat als Doppeltangenten die 8 Geraden, die diese 4 festen Punkte mit den Kreispunkten verbinden; ihre Klasse ist 14, ihr Geschlecht 2.

2. Der Ort der Punkte in der Ebene der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

von denen zueinander senkrechte Normalen ausgehen, wurde von Gergonne betrachtet; seine Gleichung wurde von Vidal in folgender Form gefunden

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)(a^2y^2 + b^2x^2)^2 = (a^2 - b^2)^2(a^2y^2 - b^2x^2)^2. \text{[3])}$$

Betrachtet man dagegen Tripel und Quadrupel, statt Paare von Normalen derselben Ellipse, so kann man eine andere Kurve sechster Ordnung erhalten. So stellt die Gleichung

$$4(a^2x^2 + b^2y^2)^3 = a^2b^2(a^2 - b^2)^2x^2y^2$$

den Ort der Mittelpunkte eines Kreises dar, der dem Dreiecke umbeschrieben ist, das gebildet wird von den Fufspunkten der drei Normalen einer Ellipse, die von einem Punkte ihrer Evolute ausgehen[4]); hingegen stellt

$$[a^2x^2 + b^2y^2 - (a^2 - b^2)^2]^3 + 54a^2b^2(a^2 - b^2)^2x^2y^2 = 0$$

den Ort der Punkte dar, von denen allemal vier Normalen ausgehen, die ein harmonisches Büschel bilden[5]).

3. Man bezeichnet mit Radiale einer Kurve den Ort der Endpunkte der von einem festen Punkte ausgehenden und mit den Krümmungsradien der Kurve äquipollenten (gleich und gleich gerichteten) Strecken[6]). Man betrachte z. B. die durch die beiden Gleichungen $x = a \cdot \cos\varphi, \quad y = b \cdot \sin\varphi$

dargestellte Ellipse. Ist ϱ der Krümmungsradius im Punkte (φ) der Ellipse und ω der Winkel, den er mit der x-Axe bildet, so hat man

$$\varrho = \frac{(a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{ab}, \qquad \operatorname{tg}\omega = \frac{a}{b}\operatorname{tg}\varphi.$$

1) *Supplemental note on the analogues in space to the cartesians ovals in plane* (Phil. Magaz. XXXII, 1866).

2) *On the locus on the foci of the conics with pass throug four given points* (Daselbst; oder *Coll. math. Pap.* VII, 1—4); vgl. auch Bobeck, *Die Brennpunktkurve des Kegelschnittbüschels* (Monatshefte 3, 1892).

3) Nouv. Ann. II. 1843, S. 365.

4) Educ. Times, Quest. 6375; gelöst in XXXVI (1882) S. 77—78.

5) Das. Quest. 6431; gelöst das. S. 75—76.

6) R. Tucker, *On radial curves* (Proc. of the Lond. math. Soc. I, 1865); Hoüel, *Cours de calcul infinitésimal* II. (Paris 1879) S 269, Ex. 37.

Die Polargleichung der Radiale geht aus diesen beiden Gleichungen hervor, wenn man ω daraus eliminiert; die zweite liefert uns

$$\frac{\sin\varphi}{b\sin\omega} = \frac{\cos\varphi}{a\cos\omega} = \frac{1}{\sqrt{b^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\omega}},$$

demnach wird die erste zu

$$ab\varrho = \frac{(ab)^3}{(a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega)^{\frac{3}{2}}},$$

oder
$$\varrho^2(a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega)^3 = a^4b^4.$$

Dies ist die gesuchte Gleichung[1]); gehen wir zu kartesischen Koordinaten über, so wird sie

$$(a^2x^2 + b^2y^2)^3 = a^4b^4(x^2+y^2)^2.$$

Die Radiale der Ellipse ist demnach von der sechsten Ordnung, hat den Anfang als vierfachen Punkt, und die Tangenten in diesem fallen paarweise mit den bezüglichen isotropischen Geraden zusammen. — Ähnliches findet statt für die Hyperbel.

Trägt man aber den Krümmungsradius vom Centrum aus auf den zugehörigen Durchmesser ab, so erhält man die durch folgende beiden Gleichungen bezw. ausgedrückte Kurve

$$ab\varrho = (a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega)^3,$$
$$a^2b^2(x^2+y^2)^4 - (a^2y^2 + b^2x^2)^3 = 0.$$

Sie ist eine Kurve von der achten Ordnung, deren Rektifikation hyperelliptische Funktionen verlangt, deren Quadratur jedoch durch elementare Funktionen ausgeführt werden kann[2]).

4. Ebenfalls von der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ hat Wolstenholme eine andere Kurve sechster Ordnung abgeleitet, die bemerkenswert ist, zumal da sie zu sich selbst reziprok ist[3]). Er betrachtete einen beliebigen Punkt O der Ellipse **E** und beschrieb um O als Mittelpunkt einen Kreis **K**, so beschaffen, dafs es ∞^1 Dreiecke giebt, die in **E** einbeschrieben und **K** umbeschrieben sind. Die Enveloppe aller dieser Kreise wird gebildet von der Ellipse mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)^2$$

und der Kurve Γ, die durch folgende Gleichungen dargestellt wird

$$x = \frac{a\cos\vartheta}{a^2-b^2}\left\{a^2 + b^2 + 4b^2\frac{a^2\sin^2\vartheta - b^2\cos^2\vartheta}{a^2\sin^2\vartheta + b^2\cos^2\vartheta}\right\},$$
$$y = \frac{b\sin\vartheta}{a^2-b^2}\left\{b^2 + a^2 + 4a^2\frac{b^2\cos^2\vartheta - a^2\sin^2\vartheta}{b^2\cos^2\vartheta + a^2\sin^2\vartheta}\right\}.$$

1) R. Tucker, *The radial of an ellipse* (Quart. Journ. XVIII, 1882).

2) Tortolini, *Sulla curva luogo geometrico dei raggi di curvatura d'una ellisse data* (Annali di Matem. VI, 1864).

3) *On a certain envelope* (Proc. of the Lond. Math. Soc. XV, 1884).

Sie ist von der 6. Ordnung und der 6. Klasse, hat 6 Doppelpunkte und 4 Spitzen, 6 Doppeltangenten und 4 Wendepunkte; Wolstenholme hat auch ihre Gestalt bestimmt.

5. Eine Kurve sechster Ordnung entsteht auch, wenn man das Centrum einer Ellipse auf die Sehnen, die sie mit ihren Oskulationskreisen gemeinsam hat, projiziert[1]); ihre Gleichung lautet

$$(x^2 + y^2)^2(a^2x^2 + b^2y^2) = (a^2x^2 - b^2y^2)^2,$$

somit ist das Centrum der Ellipse ein vierfacher Punkt derselben. Lassen wir b in a übergehen, so erhält man die Kurve sechster Ordnung

$$a^2(x^2 - y^2)^2 = (x^2 + y^2)^3,$$

welche Plücker[2]) zugleich mit den beiden Kurven von folgender Gleichung betrachtet hat:

$$(x^2 + y^2)^3 = a^2x^4 \quad \text{und} \quad (x^2 + y^2)^3 = a^2y^4;$$

wir werden in folgender Nr. sehen, dafs sie der Ort der Scheitel der einer regulären Astroide umbeschrieben rechten Winkel ist[3]).

6. Schliefslich: der Ort der Scheitel der Parabeln, die einen festen Kreis — mit dem Centrum O und dem Radius R — berühren und alle einen Punkt der Peripherie desselben zum Brennpunkte haben, hat folgende Gleichung

$$2(2x^2 + 2y^2 - Rx)^3 = 27R^2(x^2 + y^2)^2.$$

Sie wurde von Barisien[4]) erdacht, und dann von einigen anderen untersucht[5]); unter diesen möge Retali hervorgehoben werden[6]), der bemerkte, dafs diese Kurve die Fufspunktkurve einer Kardioide in Bezug auf ihre Spitze ist.

Für andere Kurven ähnlichen Ursprunges findet der Leser Hinweise in den Sammlungen von Übungsbeispielen der analytischen Geometrie; wir können uns hier bei diesen nicht aufhalten, da uns andere Linien fesseln, die wegen ihrer Wichtigkeit besondere Namen erhalten haben[7]).

---

1) *Progréso*, Cuest. 93.

2) *Neue Geometrie des Raumes*, I. Abt. (Leipzig 1868) S. 105—106.

3) E. N. Barisien, *Intermédiaire* III, 1896, S. 198.

4) *Intermédiaire*, II, S. 21. 5) Das. S. 376.

6) *Note sur une courbe du sixième ordre* (Journ. de math. spéc. 4. Ser. VI, 1897).

7) Unter ihnen findet sich nicht die Kurve mit der Gleichung

$$y^6 - 3axy^4 - 2a^2xy^3 + 3a^2x^2y^2 - 6a^3x^2y + a^4x^2 - a^3x^3 = 0,$$

von der Hudde in einem Briefe an Fr. van Schooten spricht, v. 1. Dez. 1657. (*Oeuvres de Huygens* II, S. 97), die dann aber nicht untersucht wird.

Zweites Kapitel.

Astroiden und Scarabäen (Stern- und Käferkurven).

103. Die Bewegung einer Ebene in sich selbst kann dadurch definiert werden, dafs man zwei feste Kurven, die Direktricen oder Leitkurven angiebt, welche von zwei festen Punkten der beweglichen Ebene durchlaufen werden sollen; jeder andere Punkt der Ebene beschreibt dann eine Kurve, welche die Engländer und Franzosen Glisette nennen und die wir mit dem Namen Olistoide (von ὀλισθάνω, gleite) oder Gleitkurve bezeichnen[1]). Jede beliebige Kurve, insbesondere jede beliebige Gerade der beweglichen Ebene hingegen umhüllt eine Kurve, die Enveloppe-Glisette oder olistoidale Hüllkurve genannt wird[2]).

Wenn die Direktricen algebraische Kurven sind, und man bezeichnet ihre Ordnung mit n und n', ihre Klasse mit ν und ν', mit d, d' die Zahl ihrer Doppelpunkte, mit k, k' die Zahl der Spitzen, so hat man für die Olistoide im allgemeinen: Ordnung $2n \cdot n'$, Klasse $2(n\nu' + n'\nu + nn')$, Zahl der Doppelpunkte $nn'(2nn' - n - n') + 2(nd' - n'd)$ und Zahl der Spitzen $2(nk' + n'k)$; wenn aber die Leitkurven zusammenfallen oder durch die imaginären Kreispunkte gehen, so erfahren diese Zahlen beträchtliche Modifikationen[3]).

Der einfachste Fall ist der, dafs die beiden Leitkurven gerade Linien sind, und dafs man den Ort eines Punktes, der auf der Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte liegt, betrachtet oder auch die Enveloppe dieser Verbindungslinie. Jener Ort ist bekanntermafsen eine Ellipse, diese Enveloppe dagegen eine neue Kurve, die wegen ihrer Form Astroide oder Sternkurve genannt wurde[4]). Um ihre analytische Darstellung zu finden, nehmen wir die beiden festen Geraden als Koordinataxen und bezeichnen den Winkel derselben mit α (Taf. VIII, Fig. 57 a), die Länge der Verbindungslinie der beiden bewegten Punkte A und B mit l und mit φ und ψ die Winkel, welche

---

1) Beispiele von Gleitkurven vierter Ordnung enthält die Arbeit von Dewall, *Zwei geometrische Aufgaben aus der Kurvenlehre* (Archiv der Math. XLII, 1864).

2) Zu dieser Klasse von Kurven gehören z. B. diejenigen, welche J. B. Pomey in dem Aufsatze *Enveloppes des côtés d'un carré dont deux sommets descrivent deux droites rectangulaires* (Nouv. Ann. 3. Ser. V, 1886) betrachtete.

3) S. Roberts, *On the motion of a plane under certain conditions* (Proc. of the Lond. math. Soc. III, 1871).

4) Zuerst von J. J. Littrow (*Kurze Anleitung zur gesammten Mathematik*, Wien 1838, S. 299) vorgeschlagener Name; M. Simon schreibt „Astroide oder Sternlinie" (*Analytische Geometrie*, Leipzig 1900, S. 307. Für die Bibligraphie nehme man die Aufsätze von Hâton de la Goupillière in den Nouv. Ann. 1874, 1880 und 1885.

die Gerade AB in einer beliebigen Lage mit den beiden Axen bildet; das Dreieck OAB ergiebt dann:

$$\varphi + \psi = \pi - \alpha, \qquad \frac{OA}{\sin\psi} = \frac{OB}{\sin\varphi} = \frac{l}{\sin\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Folglich ist die Gleichung der Geraden AB

$$\frac{x}{\sin\psi} + \frac{y}{\sin\varphi} = \frac{l}{\sin\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Differenzieren wir diese nach φ und berücksichtigen (1), so erhalten wir

$$\frac{x\cdot\cos\psi}{\sin^2\psi} = \frac{y\cos\varphi}{\sin^2\varphi},$$

welche kombiniert mit (2) ergiebt

$$x = \frac{l}{\sin^2\alpha}\cos\varphi\sin^2\psi, \qquad y = \frac{l}{\sin^2\alpha}\cos\psi\sin^2\varphi. \quad . \quad . \quad (3)$$

Eliminieren wir aus (3) φ oder ψ vermittelst Gleichung (2), so erhalten wir die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Astroide in trigonometrischen Funktionen von φ oder ψ, sagen wir, um einen bestimmten Anhalt zu haben, von φ; setzen wir alsdann $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = \lambda$, so geben die Gleichungen (3) x und y als rationale Funktionen sechster Ordnung von λ. Daraus schliefsen wir: **Die Astroide ist eine rationale Kurve sechster Ordnung.** Beachten wir nun, dafs (2) eine beliebige Tangente der Astroide darstellt, und dafs, wenn man in ihr $\psi = \pi - \alpha - \varphi$ setzt und ferner $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = \lambda$ eine Gleichung vierten Grades in λ entsteht, so schliefsen wir: **Die Astroide ist von der vierten Klasse.** Die Kurve hat infolgedessen sechs Spitzen und vier Doppelpunkte; sie entbehrt der Wendepunkte, hat aber drei Doppeltangenten.

Eliminieren wir φ und ψ aus den Gleichungen (1) und (3), so erhält man die Gleichung der Astroide in folgender Form:

$$\begin{gathered}[(x^2 + y^2 + 2xy\cos\alpha - l^2)^3 + 27l^2x^2y^2\sin^2\alpha]\sin^2\alpha \\ - l^2\cos\alpha\Big\{(x^2+y^2+2xy\cos\alpha - l^2)^2\cos\alpha \\ -2xy[9(x^2+y^2+2xy\cos\alpha - a^2)\sin^2\alpha - 8a^2\cos^2\alpha]\Big\} = 0.\text{ [1]} \quad (4)\end{gathered}$$

Auch diese beweist, dafs die Kurve sechster Ordnung ist, und zeigt aufserdem, dafs die Koordinataxen Doppeltangenten sind mit den Punkten $x = \pm l$, $y = 0$; $x = 0$, $y = \pm l$ als Berührungspunkten. Die cyklischen Punkte der Ebene sind Spitzen mit der unendlich fernen Geraden als gemeinsamer Tangente. Aufserdem hat die Kurve vier reelle Spitzen, die innerhalb des stumpfen Winkels der beiden

---

1) H. F. Jentsch, *Theorie der Astroiden, einer neuen Klasse von Kurven* (Diss. Greifswald, 1860).

Leitgeraden liegen und die Ecken eines Rechtecks bilden. — Im Falle der Winkel α ein beliebiger ist, wollen wir die Kurve als schiefe Astroide bezeichnen.

Der thatsächlich am häufigsten vorkommende Fall ist der, dafs die beiden Leitgeraden zueinander senkrecht sind (s. Taf. VIII, Fig. 57*b*); die Kurve heifst dann allgemein reguläre Astroide oder die regelmäfsige Vierspitzenkurve, während Montucci sie mit dem Namen Cubocycloïde[1]) und Matthiesen mit Paracykel[2]) bezeichnete. Die reguläre Astroide hat drei Spitzendoppeltangenten, sie ist daher reziprok zu den Kurven vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten, und deshalb wurde der Name projektive Astroide[3]) für alle rationalen Kurven sechster Ordnung vorgeschlagen, die mit drei Spitzendoppeltangenten versehen sind. Da nur vier von den Spitzen der Astroide reell sind, so wandte Bellavitis den Namen Tetracuspide zu ihrer Bezeichnung an[4]), der jedoch nicht angenommen wurde, vielleicht weil die untersuchte Kurve nicht vier, sondern sechs Spitzen hat.

Da die reguläre Astroide zu einer Kurve vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten dual ist, so besteht für sie der zum Laguerre'schen Satze (Nr. **97**) duale, nämlich folgender Satz: **Jede Tangente t einer Astroide schneidet die Kurve in vier weiteren Punkten, deren zugehörige Tangenten durch ein und denselben Punkt P gehen.** Wir fügen noch hinzu, ohne es zu beweisen: **Von diesen vier Tangenten (und den zugehörigen Berührungspunkten) sind nur zwei reell, und der Ort, den der Punkt P beschreibt, wenn die Tangente t sich bewegt, ist der der Astroide umbeschriebene Kreis (mit dem Centrum O, dem Radius l)**[5]).

Machen wir in den Gleichungen (3) und (4) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so werden diese zu

$$x = l\cos^3\varphi, \qquad y = l\sin^3\varphi, \quad \ldots\ldots \quad (3')$$

$$(x^2 + y^2 - l^2)^3 + 27\, l^2 x^2 y^2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (4')$$

Statt dieser Gleichungen pflegt man häufiger eine andere, bequemere

1) *Comptes rendus* LXX, 1865, S. 441; daselbst ist die Anwendbarkeit der Astroide auf die Lösung der Gleichungen 5. Grades gezeigt.

2) *Über die mechanische Construction einiger Curven, welche sich zur Auflösung des Problems von der Duplication des Würfels verwenden lassen* (Archiv XLVIII, 1868).

3) S. Retali, *Intermédiaire* V, 1898, S. 68.

4) *Sposizione del metodo delle eqipollenze* (Mem. della Soc. Ital. delle Scienze XXV, 2. Teil, 1850) Nr. 191; ferner *Exposition de la méthode des équipollences,* übers. v. Laisant (Paris 1874) S. 229.

5) Über diesen Satz, den man einer Aufgabe von A. Boutin (*Intermédiaire* IV, 1897, S. 170) verdankt, siehe man die vielen Mitteilungen im *Intermédiaire* IV, 1897, S. 239; V, 1898, S. 68; VI, 1899, S. 31 und 281.

anzuwenden[1]), obwohl sie irrational ist, die man durch direkte Elimination von φ aus (3′) erhält, nämlich folgende

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}} \qquad (5)$$

Schreibt man Gleichung (3′) in folgender Weise:

$$x = \frac{l}{4}(3\cos\varphi + \cos 3\varphi), \qquad y = \frac{l}{4}(3\sin\varphi - \sin 3\varphi),$$

so erkennt man, dafs die reguläre Astroide zur Klasse der Epicykloiden (vgl. Abschn. VI, Kap. 9) gehört. Jedoch auch in der Form (3′) eignen sich die Gleichungen recht gut zur Lösung der hauptsächlichsten metrischen Probleme, die die reguläre Astroide betreffen. Nennt man die Fläche der Kurve S, so hat man

$$\frac{1}{4}S = \int\limits_{x=0}^{x=l} y \cdot dx = \int\limits_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\varphi=0} l \sin^3\varphi \cdot (-3l)\cos^2\varphi \cdot \sin^2\varphi \cdot d\varphi$$

$$= 3l^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4\varphi \cdot \cos^2\varphi \cdot d\varphi = 3l^2 \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4\varphi \cdot d\varphi - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^6\varphi \cdot d\varphi \right)$$

$$= \frac{3\pi l^2}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{3\pi l^2}{32}.$$

Also ist $S = \frac{3}{8}\pi l^2$, welches Resultat leicht in Worte zu kleiden ist, indem πl^2 gleich der Fläche des der Astroide umbeschriebenen Kreises ist.

Die allgemeine Gleichung der Tangente ist — infolge von Gl. (2) —

$$\frac{x}{\cos\varphi} + \frac{y}{\sin\varphi} = l;$$

demnach stellt die Gleichung

$$-\frac{x}{\sin\varphi} + \frac{y}{\cos\varphi} = l$$

die zu der vorigen senkrechte Tangente dar; durch Elimination von φ erhält man die Gleichung:

$$l^2(x^2 - y^2)^2 = 2(x^2 + y^2)^3;$$

demnach ist der Ort der Scheitel der einer regulären Astroide umbeschriebenen rechten Winkel eine der von Plücker betrachteten Kurven sechster Ordnung (s. die vor. Nr.).

Bezeichnen wir mit s den Astroidenbogen, so finden wir alsbald

$$ds = 3l\sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi,$$

und daher
$$s = \frac{3l}{2}\sin^2\varphi + Const.$$

1) Dieselbe findet sich in einem Briefe von Hermann an Leibniz vom 22. Nov. 1715 (*Leibniz* herausg. v. Gerhardt IV, 1859, S. 408); vgl. auch den Brief desselben v. 6. Jan. 1716 (a. O. S. 410).

Die Gesamtlänge der regulären Astroide ist das Vierfache des erhaltenen Resultates, wenn wir s nehmen zwischen $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = 0$, **also gleich 6l**, und wenn wir den Bogen von dem Punkte $\varphi = \frac{\pi}{4}$ zählen, haben wir

$$s = \frac{3l}{2}\left(\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\right) = -\frac{3l}{4}\cos 2\varphi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Der Krümmungradius ϱ wird gegeben durch

$$\varrho = \frac{3l}{2}\sin 2\varphi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Eliminieren wir nun φ aus (6) und (7), so finden wir

$$\varrho^2 + 4s^2 = \left(\frac{3l}{2}\right)^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

welches also die natürliche Gleichung der Kurve ist; hieraus läfst sich von neuem ableiten, dafs die Astroide eine Hypocykloide ist.

Bezeichnen wir schliefslich mit A die Oberfläche und mit V das Volumen, welches durch vollständige Rotation der Astroide um die eine der Zweispitzentangenten entsteht, so erhalten wir

$$A = 4\pi\int_{x=0}^{x=l} x\cdot ds = -4\pi\int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} l\cos^3\varphi\cdot 3l\sin\varphi\cdot\cos\cdot d\varphi$$

$$= -12\pi l^2\int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\cdot\sin\varphi\, d\varphi = \frac{12\pi l^2}{5} = \frac{3}{5}\cdot 4\pi l^2.$$

$$V = 2\pi\int_{x=0}^{x=l} x^2\cdot dy = 6\pi l^3\int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\cdot\sin^2\varphi\cdot d\varphi$$

$$= 6\pi l^3\left(\int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\cdot d\varphi - \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}\cos^9\varphi\, d\varphi\right) = \frac{32\pi l^3}{105} = \frac{8}{35}\cdot\frac{4}{3}\pi l^3.$$

Beachtet man nun, dafs $4\pi l^2$ und $\frac{4}{3}\pi l^3$ die Oberfläche und das Volumen der Kugel sind, die den der Astroide umbeschriebenen Kreis als gröfsten Kreis hat, so lassen sich diese Resultate leicht ausdrücken[1]).

1) Die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen und ihrer Funktionen führt in einem Falle zu noch allgemeineren Kurven als die Astroide (Amstein, *Un exemple de répresentation conforme,* Bull. de la Soc. vaudoise des Sc. Nat. XV, 1878). Betrachtet man nämlich die Funktion

$$w = \frac{1}{4}\left(3z + \frac{1}{z^3}\right).$$

Setzt man $w = u + iv$, $z = \varrho e^{i\omega}$, so ergiebt sich

$$x = \frac{1}{4}\left(3\varrho\cos\omega + \frac{1}{\varrho^3}\cos 3\omega\right), \qquad y = \frac{1}{4}\left(3\varrho\sin\omega - \frac{1}{\varrho^3}\sin 3\omega\right).$$

104. Eine bemerkenswerte Verallgemeinerung des Begriffes der Astroide, bei welchem wir hier verweilen müssen, verdankt man Ameseder[1]).

Gegeben ein centrischer Kegelschnitt Γ und zwei feste Geraden. Die Enveloppe aller der Geraden, die so beschaffen sind, dafs das zwischen den beiden festen Geraden gelegene Stück gleich dem parallellaufenden Durchmesser des Kegelschnittes Γ wird, ist eine Kurve, die man allgemeine Astroide nennen kann, weil, wenn Γ ein Kreis ist, sie sich auf eine gewöhnliche schiefe Astroide reduziert. Um die Gleichung derselben zu finden, nehmen wir die beiden festen Geraden zu Koordinataxen, und nehmen

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 1 \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

als Gleichung von Γ, und als Gleichung der einhüllenden Geraden in einer beliebigen Lage

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1. \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Die Bedingungen des Problems liefern dann die Gleichung

$$\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos\alpha} = 2\sqrt{\frac{u^2 + v^2 - 2uv\cos\alpha}{au^2 - 2huv + bv^2}}$$

oder auch
$$au^2 - 2huv + bv^2 = 4. \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Um nun die Gleichung der allgemeinen Astroide zu erhalten, mufs man die Enveloppe der Geraden (9) unter der Bedingung (10) suchen; durch Anwendung bekannter Regeln findet man, dafs es genügt u und v aus (9), (10) und der folgenden Gleichung fortzuschaffen

$$\begin{vmatrix} x - u & bv - hu \\ y - v & au - hv \end{vmatrix} = 0. \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Die Elimination vollzieht sich in sehr einfacher Weise, wenn der Kegelschnitt Γ die beiden Koordinataxen als konjugierte Durchmesser hat. In diesem Falle, $h = 0$, wird die Gleichung (11) zu

$$au(x - u) = bv(y - v); \quad \ldots\ldots \quad (11')$$

Setzt man nun $\varrho = Const.$, so hat man die parametrische Darstellung der (rationalen) Kurve, um die es sich hier handelt. Im Speziellen für $\varrho = 1$ hat man die Gleichungen

$$x = \frac{1}{4}(3\varrho\cos\omega + \cos 3\omega) = \cos^3\omega, \qquad y = \frac{1}{4}(3\sin\omega - \sin 3\omega) = \sin^3\omega,$$

welche der regulären Astroide angehören $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$; für $\varrho = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ würde man hingegen die Rodonee (vgl. Abschn. V, Kap. 8) mit der Polargleichung haben

$$r = \frac{3}{2\sqrt[4]{3}}\cos 2u.$$

1) S. d. Artikel *Astroiden* (Archiv. LXIV, 1879).

setzt man in diese den aus (9) sich ergebenden Wert $v = \frac{uy}{u - x}$ ein so ergiebt sich

$$u = x + \sqrt[3]{\frac{b}{a} x y^2}, \qquad \text{und ähnlich} \qquad v = y + \sqrt[3]{\frac{a}{b} x^2 y}.$$

Setzt man diese Werte in (10) ein, nachdem man daselbst $h = 0$ gemacht, so findet man nach einigen Reduktionen

$$\sqrt[3]{a x^2} + \sqrt[3]{b y^2} = \sqrt[3]{4} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

als Gleichung der allgemeinen Astroide. Wollen wir die beiden Fälle unterscheiden, dafs die gegebene Kurve Γ eine Ellipse oder Hyperbel sei, so kann man (12) folgendermafsen schreiben

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} \pm \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12')$$

Die so dargestellten Kurven wurden von La Gournerie, da sie reziprok zu den harmonischen Trinodalen (Nr. **97**) sind, trilatérales harmoniques genannt[1]).

Nehmen wir nun die Axen zu einander rechtwinklig, so findet sich obige Gleichung bei der Theorie der Kegelschnitte; betrachten wir nämlich die Ellipse

$$\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2 = 1,$$

so zeigt man leicht, dafs, wenn man der Kürze wegen

$$\mu = \frac{m^2 - n^2}{m}, \qquad \nu = \frac{m^2 - n^2}{\nu}$$

setzt, dann die Gleichung

$$\left(\frac{x}{\mu}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{\nu}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

die Evolute derselben darstellt; nehmen wir also in (12) das $+$Zeichen, so ist die entsprechende Kurve die Evolute derjenigen Ellipse, deren Halbaxen bezw. $\frac{2ab^2}{a^2 - b^2}$, $\frac{2a^2b}{a^2 - b^2}$ sind. Ähnliches ergiebt sich, wenn man in (12) das $-$Zeichen nimmt. Von dem besagten Gesichtspunkte aus betrachtet finden sich die allgemeinen Astroiden in Abhandlungen über die Normalen der Kegelschnitte[2]); diese Betrachtungsweise er-

---

1) *Recherches sur les surfaces reglées tétraedrales symétriques* (Paris 1867) S. 116.

2) G. Bauer, *Über Systeme von Curven sechster Ordnung, auf welche das Normalproblem bei Curven zweiter Ordnung führt* (Ber. der Akad. d. Wissensch. zu München, 1878). S. Roberts, *On the sextic curves represented by*

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{C}\right)^{\frac{2}{3}} = 0.$$

(Quart. Journ. XV, 1879).

klärt auch den der Kurve (12′) für den Fall $a = b$ von Breton (de Champ) gegebenen Namen Developpée equilatère[1]).

105. Die reguläre Astroide liefert den Ursprung für eine neue besondere Kurve, indem man ihre Fußspunktkurve in Bezug auf einen Punkt der Halbierungslinie des von den beiden Zweispitzentangenten gebildeten Winkels betrachtet. Ohne von der Astroide auszugehen, kann man diese Kurve offenbar auch definieren: „Eine Strecke PQ von der Länge $2a$ bewegt sich mit ihren Endpunkten auf zwei rechtwinkligen Geraden Ox und Oy; von einem festen Punkte F (Taf. IX, Fig. 58) der Halbierungslinie des Winkels xOy werden die Lote FM auf die verschiedenen Lagen der Geraden PQ gefällt; der Ort der Punkte M ist dann eine Kurve, die wegen der Gestalt, die sie in gewissen Fällen hat, Skarabäe oder Käferkurve heißt.“ Um sie bequem darzustellen, nehmen wir F als Pol, OF als Polaraxe, und bezeichnen mit c die Länge von OF. Wir ziehen dann OH und FM senkrecht zu PQ und verbinden O mit dem Mittelpunkte R von PQ. Bezeichnen wir nun wie gewöhnlich mit ϱ und ω die Polarkoordinaten von M, so sehen wir leicht, daß Winkel $ROH = 2\omega$; und da $OR = \frac{PQ}{2} = a$, so ist $OH = a \cdot \cos 2\omega$. Anderseits ist

$$OH = OF \cdot \cos\omega + FM = c \cdot \cos\omega + \varrho$$

und also

$$\varrho = a \cos 2\omega - c \cos\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

die Polargleichung der Käferkurve; sie ist demnach rational. Gehen wir zu kartesischen Koordinaten über, so erhalten wir

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + cx)^2 = a^2(x^2 - y^2)^2. \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Sie ist demnach von der sechsten Ordnung. F ist ein vierfacher Punkt der Kurve; Doppelpunkte derselben sind die Projektionen desselben auf Ox und Oy; die unendlich fernen Kreispunkte der Ebene sind Spitzen der Kurve, wobei die unendlich ferne gerade Tangente in beiden ist.

Im Spezialfalle $c = 0$ wird (13) zu $\varrho = a \cos 2\omega$ und stellt dann eine spezielle Rodonee dar (vgl. Abschn. V, Kap. 8) und zwar die vierblätterige Rosenkurve, auch Corolla genannt[3]). Setzt man nun

$$\varrho_1 = a \cdot \cos 2\omega\,, \qquad \varrho_2 = c \cdot \cos\omega\,,$$

so stellt erstere Gleichung also eine Corolla, letztere einen Kreis dar,

---

1) *Démonstration d'un theorème sur les développées de l'ellipse et de l'hyperbole* (Nouv. Ann. II, 1843, S. 227).

2) Catalan, *Manuel des candidats à l'Ecole polytechnique* I. (Paris 1857) S. 338.

3) Cf. W. J. C. Miller, *Solution of the Question 3648* (Educ. Times XIX, 1874, S. 59—62); M. Simon (*Analytische Geometrie*, Leipzig 1900, S. 316) nennt sie vierblätteriges Kleeblatt.

der durch den Anfangspunkt geht und den Durchmesser c hat, und da Gleichung (13) dann giebt $\varrho = \varrho_1 + \varrho_2$, so ist es klar, dafs die Käferkurve als konchoidale Kurve (vgl. Nr. **69**) einer Corolla und eines Kreises angesehen werden kann.

Zum Schlusse bemerken wir, dafs die Käferkurve zur Fufspunktkurve des Anfangspunktes, in Bezug auf die allgemeine Astroide mit der Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

analog ist. Beachten wir dafs, wenn X, Y die laufenden Koordinaten sind, die allgemeine Gleichung der Tangente an diese Kurve lautet,

$$\frac{X}{a\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{Y}{b\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{3}}} = 1,$$

so erkennt man, dafs die Gleichung jener Fufspunktkurve durch Elimination von x und y aus den beiden vorhergehenden und aus folgender Gleichung erhalten wird

$$a\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}} X - b\left(\frac{y}{v}\right)^{\frac{1}{3}} Y = 0;$$

sie ist daher

$$(X^2 + Y^2)^2(a^2X^2 + b^2Y^2) = a^2b^2X^2Y^2. \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Die so dargestellte Kurve — deren Diskussion wir dem Leser überlassen — wurde von Tortolini[1]) betrachtet, der auch ihre Rektifikation mittelst Ellipsenbögen ausführte.

Drittes Kapitel.

Die Watt'sche Kurve[2]).

106. Der Leser möge sich der zu Anfang von Nr. **103** gegebenen Definition der olistoidalen Örter und Hüllkurven erinnern; dem einfachsten dort betrachteten Falle, dafs die Leitkurven geradlinig seien, folgt naturgemäfs der, dafs die eine eine Gerade, die andere ein Kreis ist; auch dieser Fall wurde schon von uns betrachtet in Nr. **84**, indem dann eine symmetrische Polyzomalkurve vierter Ordnung entsteht. Es bietet sich nun, dem Grade der Schwierigkeit folgend, der Fall dar, dafs beide Leitlinien Kreise sind. Dieser Fall

1) *Applicazioni dei trascendenti ellittici alla quadratura di alcune curve sferiche* (Mem. de la Soc. Ital. delle Scienze XXIV, 1850).

2) Viele bibliographische Notizen über diese Kurve finden sich im *Intermédiaire* IV, 1897, S. 184.

hat eine grofse praktische Bedeutung, indem er bei der Untersuchung jener bekannten, 1784 von Jacob Watt erdachten Vorrichtung auftritt, die man nach ihm das Watt'sche Parallelogramm genannt hat. Bei dieser Untersuchung ist insbesondere die Lösung des folgenden Ortproblems erforderlich: „Ein Vierseit $ABCD$, dessen Grundlinie AD festliegt, ist in allen Ecken gelenkig gegliedert; es gilt, den Ort aller Lagen, die ein bestimmter Punkt M der gegenüberliegenden Seite BC annimmt, zu finden.“ Wir werden diesen Ort die Watt'sche Kurve[1]) nennen; andere, um ihre Gestalt anzudeuten, nennen sie Lemniskoide (lemniscoïde) oder Inflexionskurve (courbe à longue inflexion)[2]).

Um die Watt'sche Kurve zu zeichnen, beschreibt man die Kreise um die beiden festen Punkte A und D als Centren mit den Radien von der Länge der Seiten AB und CD (vgl. Taf. IX, Fig. 59). Man nehme alsdann den Punkt B auf dem ersten Kreise beliebig an und beschreibe mit dem Radius an Länge gleich der Seite BC des Gelenkvierecks einen Kreis; dieser schneidet den zweiten (Direktrix-) Kreis in zwei Punkten C' und C''; auf jeder der beiden Geraden BC' und BC'' giebt es einen Punkt M der Watt'schen Kurve. Durch Variation von B erhält man unendlich viele derselben. Es ist klar, dafs nicht immer alle Punkte des ersten Kreises zu reellen Punkten der Kurve führen; um das brauchbare Stück desselben zu finden, beschreibe man um den Mittelpunkt des zweiten Kreises D mit den Radien $BC \pm CD$ zwei Kreise; diese begrenzen auf dem ersten Kreise zwei Bogen, welche den besagten Bezirk ausmachen. Dieselbe Konstruktion kann man eventuell in Bezug auf den zweiten Kreis wiederholen.

Nichts ist leichter, als die Normale, und demnach auch die Tangente, in einem beliebigen Punkte M der Watt'schen Kurve anzugeben. Ist nämlich $ABCD$ die zugehörige Lage des Gelenkvierecks, so ist der Punkt I, in welchem sich die Geraden AB und CD schneiden, das zugehörige Centrum der augenblicklichen Rotation; IM ist daher die Normale zu dem Orte des erzeugenden Punktes M.

Um die Gleichung der Watt'schen Kurve zu finden, nehmen wir die Gerade AD als x-Axe, O als Anfangspunkt, bezeichnen mit a_1 und a_2 die Abscissen von A und D, mit R_1, R_2 die Radien der beiden Leitkreise, ferner mit l_1 und l_2 die Längen BM und MC, und schliefslich mit $\omega_1, \omega_2, \omega$ die Winkel, welche die Geraden AB, CD, BC

---

1) Ihre Gleichung scheint zum erstenmal von Prony aufgestellt zu sein; s. Koenigs *Leçons de cinématique* (Paris 1897) S. 262, woselbst als Quelle eine Arbeit von Hâton de la Goupillière zitiert wird.

2) A. J. H. Vincent, *Essai d'une théorie du parallelogramme de Watt* (Mem. de la Soc. de Lille 1836—37) und *Note sur la théorie du parallelogramme de Watt* (Nouv. Ann. VII, 1848).

mit der positiven Richtung der x-Axe bilden. Aufserdem setzen wir der Kürze halber

$$\Gamma_1 = (x - a_1)^2 + y^2, \qquad \Gamma_2 = (x - a_2)^2 + y^2,$$

und daher

$$(x - a_1)(x - a_2) + y^2 = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 - (a_1 - a_2)^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Sind nun x und y die Koordinaten von M, so erhält man leicht die vier Beziehungen

$$R_1 \cos \omega_1 + l_1 \cos \omega = x - a_1; \qquad R_1 \sin \omega_1 + l_1 \sin \omega = y;$$
$$R_2 \cos \omega_2 - l_2 \cos \omega = x - a_2; \qquad R_2 \sin \omega_2 - l_2 \sin \omega = y.$$

Durch Elimination von ω_1 aus den beiden ersten und ω_2 aus den beiden letzten erhält man

$$2(x - a_1) l_1 \cos \omega + 2 y l_1 \sin \omega = \Gamma_1 - R_1^2 + l_1^2,$$
$$-2(x - a_2) l_2 \cos \omega - 2 y l_2 \sin \omega = \Gamma_2 - R_2^2 + l_2^2.$$

Durch Elimination von ω aus diesen beiden erhält man die Kurvengleichung. Wenn man um der Kürze wegen setzt

$$P = 2(x - a_1) l_1 \qquad Q = 2 y l_1 \qquad R = \Gamma_1 - R_1^2 + l_1^2$$
$$P' = -2(x - a_2) l_2 \qquad Q' = -2 y l_2 \qquad R' = \Gamma_2 - R_2^2 + l_2^2,$$

so kann das Resultat der Elimination in einer der beiden folgenden Formen geschrieben werden

$$(P Q' - P' Q)^2 = (P R' - P' R)^2 + (Q R' - Q' R)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$
$$(P^2 + Q^2 - R^2) \cdot (P'^2 + Q'^2 - R'^2) = (P P' + Q Q' - R R')^2. \quad (3)$$

Aus (2) geht hervor, dafs die folgender Gleichung genügenden Punkte Doppelpunkte der Watt'schen Kurve sind:

$$\left\| \begin{matrix} P & Q & R \\ P' & Q' & R' \end{matrix} \right\| = 0,$$

d. h. gemäfs den aufgestellten Bezeichnungen

$$y = 0, \qquad \frac{l_1 (x - a_1)}{l_2 (x - a_2)} + \frac{(x - a_1)^2 - R_1^2 + l_1^2}{(x - a_2)^2 - R_2^2 + l_2^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Demnach hat die Watt'sche Kurve drei Doppelpunkte auf der festen Seite des Gelenkvierseits. Setzen wir in (2) für die $P, \ldots, R'$ die Werte ein, so findet man:

$$4 l_1^2 l_2^2 (a_1 - a_2)^2 y^2 = \Big\{ x[(l_1 \Gamma_2 + l_2 \Gamma_1) - l_1 R_2^2 - l_2 R_1^2 - l_1 l_2 (l_1 + l_2)]$$
$$- [a_2 l_2 \Gamma_2 + a_1 l_1 \Gamma_2 - 2 l_1 l_2 (a_1 l_2 + a_2 l_1) - a_1 l_1 R_2^2 - a_2 l_2 R_1^2] \Big\}^2$$
$$+ y^2 \Big\{ (l_1 \Gamma_2 + l_2 \Gamma_1) + l_1^3 + l_2^3 - l_1 R_1^2 - l_2 R_2^2 \Big\}^2 \quad . \quad . \quad (5)$$

Da diese Gleichung vom 6. Grade, so folgt: **Die Watt'sche Kurve ist von der sechsten Ordnung.** Jeder Kreis schneidet die Kurve nur

in 6 Punkten von unendlicher Entfernung; folglich **hat die Watt'sche Kurve die beiden cyklischen Punkte der Ebene als dreifache Punkte, ist also eine tricirkulare Kurve sechster Ordnung.**

Betrachten wir insbesondere einen beliebigen der durch die Gleichung

$$l_1 \Gamma_2 + l_2 \Gamma_1 = Const.$$

dargestellten Kreise, so schneidet jeder die Kurve in nur vier, im Endlichen gelegenen Punkten, ist daher doppeltberührend an die Kurve in den cyklischen Punkten der Ebene; wenn man im besonderen die Konstante gleich $-\frac{(a_1 l_2 + a_2 l_1)^2}{l_1 + l_2}$ nimmt, so erhält man den Kreis mit dem Radius Null

$$\left(x - \frac{a_1 l_2 + a_2 l_1}{l_1 + l_2}\right)^2 + y^2 = 0,$$

sein Mittelpunkt F ist daher ein aufserordentlicher Brennpunkt der Kurve; beachten wir, dafs

$$OA = a_1, \quad OD = a_2, \quad OF = \frac{a_1 l_2 + a_2 l_1}{l_1 + l_2},$$

so haben wir

$$\frac{AF}{FD} = \frac{BM}{MC}.$$

F ist daher derjenige Punkt der Strecke AD, welcher sie im Verhältnisse von $BM : MC$ teilt. Setzen wir hingegen in (3) für $P, \ldots, R'$ ihre Werte ein, so erhält man für die Watt'sche Kurve folgende sehr elegante Gleichung.

$$\begin{aligned}(\Gamma_1 - \overline{R_1 + l_1}^2)(\Gamma_1 - \overline{R_2 - l_1}^2)(\Gamma_2 - \overline{R_2 + l_2}^2)(\Gamma_2 - \overline{R_2 - l_2}^2) \\ = \Big\{(\Gamma_1 + l_1^2 - R_1^2 + 2 l_1 l_2)(\Gamma_2 + l_2^2 - R_2^2 + 2 l_1 l_2) \\ - 4 l_1 l_2 (\overline{l_1 + l_2}^2 + \overline{a_1 - a_2}^2 - R_1^2 - R_2^2)\Big\}^2. \quad \ldots \quad (6)\end{aligned}$$

Diese ist scheinbar vom 8ten Grade, in Wirklichkeit aber vom 6ten, da in beiden Gliedern der Ausdruck $\Gamma_1^2 \Gamma_2^2$ auftritt. Sie zeigt, dafs alle Kreise mit der Gleichung $\Gamma_1 = Const.$ die Watt'sche Kurve doppelt berühren; insbesondere stellt die Gleichung $\Gamma_1 = 0$ einen doppeltberührenden Nullkreis dar; sein Mittelpunkt ist also ein aufserordentlicher Brennpunkt. Dasselbe gilt von $\Gamma_2 = 0$; daraus ergiebt sich: **Auch die festen Punkte A und D sind aufserordentliche Brennpunkte der Watt'schen Kurve.**

107. Da die Watt'sche Kurve von der sechsten Ordnung ist und zwei dreifache und drei Doppelpunkte hat, so ist sie vom Geschlechte eins; die Koordinaten ihrer Punkte lassen sich daher vermittelst elliptischer Funktionen eines Parameters ausdrücken. Eine sehr geniale Weise zu einer derartigen Darstellung zu gelangen ist die folgende von Darboux erdachte und völlig entwickelte[1]): Man

1) *De l'emploi des fonctions elliptiques dans la theorie du quadrilatère plan*

bezeichne mit a, b, c die Länge der Seiten AB, BC, CD des Vierseits; mit α, β, γ die Winkel, die sie mit der festen Geraden AD bilden und mit d die Länge dieser letzteren. Projiziert man nun den Linienzug $ABCD$ auf die Gerade AD und dann auf die Senkrechte dazu, so bekommt man folgende beiden Gleichungen:

$$d + a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma = 0, \qquad a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma = 0,$$

oder auch $$d + ae^{\pm i\alpha} + be^{\pm i\beta} + ce^{\pm i\gamma} = 0.$$

Man setze nun $$x = e^{i\alpha}, \quad y = e^{i\beta}, \quad z = e^{i\gamma},$$

dann erhält man die beiden Gleichungen

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} + d = 0.$$

Deuten wir nun die x, y, z als kartesische Koordinaten eines Punktes im Raume, so stellen diese Gleichungen die Kurve dritter Ordnung dar, in welcher die Ebene $ax + by + cz + d = 0$ die Fläche dritter Ordnung $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} + d = 0$ schneidet. Jedem Punkte dieser Kurve entspricht eine Lage des Gelenksystems, d. h. ein Punkt der Watt'schen Kurve. Wenn man also die Koordinaten jener durch elliptische Funktionen ausdrückt, erhält man dasselbe für die hier betrachtete Kurve.

In dem bemerkenswerten Spezialfalle, in welchem $AB = CD$ und M der Mittelpunkt der Strecke BC, kann man die Gleichung der Watt'schen Kurve schneller durch folgendes von Catalan[1]) angegebene Verfahren erhalten. Die Mitte von AD nennen wir O und setzen $$AD = 2a, \quad AB = CD = b, \quad BC = 2c;$$

für die Existenz eines Viereckes mit diesen Seiten ist notwendig und hinreichend, dafs $$|a - b| < c < a + b,$$

und wir wollen voraussetzen, dafs die Konstanten a, b, c dieser Bedingung genügen. Ziehen wir dann (Taf. IX, Fig. 59a) die Gerade MO, ferner durch B und C zu ihr die Parallelen und durch O die Parallele EF zu BC, so ist das Vierseit $BCFE$ ein Parallelogramm, und wir haben $BE = CF$, $OE = OF = MB = MC$. Die Dreiecke OAE und ODF sind demnach kongruent, daher ergeben sich AE und DF als einander gleich und die Geraden, denen diese beiden Seiten angehören, als zu einander parallel. Da nun in den Dreiecken ABE und CDF die entsprechenden Seiten einander gleich sind,

(Comptes rendus, LXXXVIII, 1879 oder Bullet. des Sciences math. II. Ser. III, 1879). Vgl. Picciati, *La funzione di Weierstrass nella cinematica del quadrilatero articolato* (Atti del' Ist. Veneto, 40. 1900—1901).

1) *Sur la courbe de Watt* (Mathésis V, 1885).

so sind diese Dreiecke kongruent; im speziellen ist $\sphericalangle AEB = CFD$; aber diese Winkel sind gleichzeitig supplementär, daher sind sie rechte Winkel; wenn man dann DF verlängert, bis es OM in G schneidet, so wird auch der Winkel OGD ein rechter sein. — Nachdem dies vorausgeschickt, bezeichnen wir mit ϱ, ω die Polarkoordinaten von M in Bezug auf O als Pol und AD als Axe. Dann ist

$$\varrho^2 = \overline{OM}^2 = \overline{CF}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{DF}^2 = b^2 - \overline{FD}^2;$$

anderseits ist $FD = GD - GF = a \sin \omega - GF$;

$$\overline{FG}^2 = \overline{OF}^2 - \overline{OG}^2 = \overline{MC}^2 - \overline{OG}^2 = c^2 - a^2 \cos^2 \omega .$$

Demnach ist $\varrho^2 = b^2 - \left\{ a \sin \omega - \sqrt{c^2 - a^2 \cos^2 \omega} \right\}^2$,

oder auch

$$(\varrho^2 - a^2 - b^2 + c^2)^2 + 4a^2(\varrho^2 - b^2) \sin^2 \omega = 0 \quad . \quad . \quad (7)$$

die Polar-Gleichung dieser Watt'schen Kurve. Die entsprechende kartesische Gleichung lautet:

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - a^2 - b^2 + c^2)^2 + 4a^2y^2(x^2 + y^2 - b^2) = 0. \quad (8)$$

Diese Kurve ist demnach symmetrisch sowohl in Bezug auf die Gerade AB als auch in Bezug auf deren Mittelsenkrechte. Die Gleichung (8) läſst auch deutlich erkennen, daſs die cyklischen Punkte dreifache Punkte sind; die zugehörigen Tangenten sind $x \pm iy = 0$, $x \pm iy = \pm a$; daher sind O, A, D auſserordentliche Brennpunkte der Kurve. Sie hat auſserdem als Doppelpunkte den Anfangspunkt und die Punkte $(\pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, 0)$; sind diese reell, so sind sie isolierte Punkte, während der Anfangspunkt ein Knoten oder ein isolierter Punkt ist, jenachdem $a + c \gtrless b$. Im ersten Falle besteht die Watt'sche Kurve aus zwei Blättern, die durch diesen Punkt, der ein Inflexionsknoten ist, zu einem Zuge verbunden sind; alsdann ist der Name Lemniskoide berechtigt. Im andern Falle haben wir zwei auseinander liegende Züge von birnförmiger Gestalt, die um so mehr abgeplattet erscheint, je kleiner c ist, dagegen zugespitzt, je mehr c sich dem Werte $a - b$ nähert (s. Fig. 59b).

Bemerkenswert ist der Fall $c = a$; die Gleichung (2) zerfällt dann in die beiden folgenden

$$x^2 + y^2 = b^2, \qquad (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - b^2) + 4a^2y^2 = 0,$$

die erste von diesen stellt den Kreis mit dem Mittelpunkte O und dem Radius b dar, während die zweite eine Booth'sche Lemniskate darstellt (vgl. Nr. **65**); wenn man überdies noch $b = a\sqrt{2}$ annimmt, so reduziert sich letztere auf eine Bernoulli'sche Lemniskate (Nr. **93**).

108. Über die Theorie der Watt'schen Kurve wurde helles Licht verbreitet, als man eine Verallgemeinerung derselben betrachtete, die entsteht — im übrigen unter denselben Bedingungen, wie sie zu Anfang dieses Kapitel angegeben sind — wenn man den Ort eines Punktes

M untersucht, der unveränderlich mit der Seite BC des Gelenkvierecks verbunden ist, aber nicht auf dieser Seite liegt. Nun hat S. Roberts bewiesen[1]), dafs dieser Ort — der von den Engländern the three-bar curve genannt wurde — ebenfalls eine tricirkulare Kurve sechster Ordnung ist, die zu aufserordentlichen Brennpunkten die Punkte A und B hat, sowie einen dritten Punkt F, derartig, dafs die beiden Dreiecke ADF und BCM ähnlich sind; in Bezug auf diese drei Punkte verhält sich die Kurve in ganz gleicher Weise; daher ist sie im ganzen dreier Erzeugungsweisen vermittelst eines Gelenkvierecks fähig. Sie hat drei Doppelpunkte auf dem dem Dreiecke ADF umbeschriebenen Kreise, ist daher, wie die Watt'sche Kurve, eine tricirkulare sechster Ordnung vom Geschlechte eins, hängt jedoch von einer Konstanten mehr ab. Je nach den Werten der Konstanten nimmt sie verschiedene Gestalten an[2]).

Die Watt'sche Kurve und ihre Verallgemeinerung, die Koppelkurve — so könnte man sie deutsch nennen —, haben für einige Zweige der angewandten Mathematik eine grofse Wichtigkeit; daher finden sich gründliche Untersuchungen derselben in moderneren Bearbeitungen der Kinematik[3]); daselbst wird der Leser genauere Details über diesen Gegenstand finden[4]).

Viertes Kapitel.

Die Nephroide und die Atriphtaloide. Andere Kurven sechster und achter Ordnung.

109. Gegeben ein Kreis mit dem Centrum O und dem Radius a sowie ein Punkt A seiner Peripherie (Taf. IX, Fig. 60); man ziehe durch A eine beliebige Sehne AB und verbinde deren Endpunkt mit dem Mittelpunkte O, dann trage man auf dieser Verbindungslinie (nach beiden Seiten) das Stück $BP = BA$ ab; der Ort des Punktes P ist die Nephroide oder Nierenkurve von Freeth[5]).

1) S. die wichtige Abhandlung *On three-bar motion in plane space* (Proc. of the Lond. math. Soc. VII, 1876) und als Kommentar die beiden von Cayley, *On three-bar motion* und *On the bicursal sextic* (Daselbst, oder *Coll. math. Papers*, IX, S. 551 u. 581).

2) S. die Figuren 158 und 159 in Carr, *Synopsis of elementary results in pure and applied mathématics* Bd. I, Teil II (London 1886).

3) Aufser Koenigs a. a. O. S. 246—62 s. auch Burmester, *Lehrbuch der Kinematik* I. (Leipzig 1888) S. 294.

4) Eine andere Kurve sechster Ordn. von ähnlicher Definition ist der Ort der Ecke C eines Vierseits $ABCD$, von welchem die Ecke A und die Halbierungslinie des Winkels BAD fest ist. S. Journ. de math. spéc. 4. Ser. V, 1896, S. 61.

5) S. die Abhandlung *Freeth's Nephroid* in den Proc. of the Lond. math.

Nimmt man OA als Polaraxe und O als Pol, so ist ersichtlich $AB = 2\varrho \sin\frac{\omega}{2}$; daher ist die Polargleichung der fraglichen Kurve

$$\varrho = a + 2a\sin\frac{\omega}{2} \cdot \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Gehen wir zu kartesischen Koordinaten über, so wird diese

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - a^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 0 \; . \; . \quad (2)$$

Die Nephroide ist demnach eine Kurve sechster Ordnung mit A als dreifachem und O als Doppelpunkt; Doppelpunkte sind ferner die Kreispunkte der Ebene, und die unendlich ferne Gerade ist Tangente an die Kurve sowohl in dem einen, wie in dem andern; ebenso sind die Verbindungslinien von O mit den beiden Kreispunkten Doppeltangenten. — Die vom Radius vector eines Punktes der Kurve während einer vollständigen Drehung beschriebene Fläche wird gemessen durch

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\varrho^2 \cdot d\omega = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(3a^2 - 2a^2\cos\omega + 4a^2\sin\frac{\omega}{2}\right)d\omega = 3\cdot\pi a^2 + 2(2a)^2;$$

ist also gleich dem Dreifachen des gegebenen Kreises vermehrt um das Doppelte des Quadrates über dem Durchmesser dieses Kreises.

Das Interesse, welches die Nephroide bietet, scheint sich ausschliefslich auf ihre Anwendung für die Konstruktion der regelmäfsigen Vielecke mit der Seitenzahl $7\cdot(2^{2^\mu} + 1)$ zu konzentrieren, vorausgesetzt, dafs 2^{2^μ} eine Primzahl ist. Um ihre derartige Anwendung klar zu legen, bezeichnen wir den Mittelpunkt des Radius OA mit F, errichten in diesem Punkte die Senkrechte, und nennen P' den Schnitt derselben mit dem äufseren Bogen der Nephroide; B' sei der Schnitt von OP' mit dem gegebenen Kreise. Wird nun die Sehne AB' gezogen, so entstehen die beiden gleichschenkligen Dreiecke OAB' und $AB'P'$. Mit φ bezeichnen wir den Winkel $B'OA$ und die gemeinsame Gröfse der Winkel OAB' und $OB'A$ mit ψ. Dann ist $\varphi + 2\psi = \pi$. Da nun auch Dreieck $P'OA$ gleichschenklig ist, so hat man

$$\sphericalangle P'AB' = B'P'A = \varphi - \psi.$$

Beachten wir schliefslich, dafs $OB'A$ Aufsenwinkel des Dreiecks $B'AP'$, so finden wir $\psi = 2(\varphi - \psi)$. Aus den beiden zwischen φ und ψ bestehenden Beziehungen ergiebt sich

$$\varphi = \frac{3}{7}\pi, \qquad \psi = \frac{2}{7}\pi, \qquad \varphi - \psi = \frac{\pi}{7}\cdot$$

Dies beweist, dafs wenn die Nephroide gezeichnet vorliegt, man mit Zirkel und Lineal den ganzen Umfang des Kreises in sieben gleiche

---

Soc. X, 1879. — Früher war der Name „nephroid“ von R. Proctor zur Bezeichnung der zweispitzigen Epicykloide angewendet worden (*A treatise on the cycloid and all formes of cycloidal curves,* London 1878, S. 79).

Teile teilen kann; ähnlich läſst sich auch die Teilung derselben in 21 und 35 Teile ausführen, wenn man berücksichtigt, daſs

$$\frac{1}{21} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right), \quad \frac{1}{35} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right).$$

Noch allgemeiner: Bekanntlich kann man mit Zirkel und Lineal einen Kreis in $2^{2^\mu} + 1$ gleiche Teile teilen, wenn diese Zahl eine Primzahl ist, und wenn man beachtet, daſs es immer zwei ganze Zahlen α, β giebt, derart daſs

$$\frac{1}{7(2^{2^\mu}+1)} = \frac{\alpha}{7} - \frac{\beta}{2^{2^\mu}+1},$$

so ergiebt sich daraus — wie oben angegeben — daſs die Nephroide zur Teilung des Kreises in $7(2^{2^\mu} + 1)$ gleiche Teile führt.

110. Auf eine andere Gruppe von Kurven sechster Ordnung traf Dr. Haughton im Verlaufe seiner Untersuchungen über die Gestalt der Oberfläche des Meeres; er gab ihnen den Namen atriphtothalassic curves (von ἄτριπτος, ohne Reibung, und θάλασσα, Meer abgeleitet). Unter diesen tritt besonders jene hervor, die in Polarkoordinaten durch die Gleichung

$$\varrho^2(\varrho - h) + \frac{k^3}{\cos^2\omega} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

wiedergegeben wird, nämlich die Atriphtaloide, die von Townsend untersucht wurde[1]) und für welche G. de Longchamps die Tangente konstruiert hat[2]). Indem die Atriphtaloide in kartesischen Koordinaten durch die Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 x^2 = (hx^2 - k^3)^3 \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

dargestellt wird, so ist sie symmetrisch zu den beiden Koordinataxen. — Die Gleichung (3) ist dritten Grades in ϱ und hat 1 oder 3 reelle Wurzeln, jenachdem

$$\sin^2\omega \gtrless \frac{4h^3 - 27k^3}{4h^3}.$$

Wenn $4h^3 - 27k^3 > 0$ angenommen wird, so kann man durch O zwei Gerade ziehen, die mit Ox einen Winkel bilden, dessen Sinus gleich $\pm\sqrt{\frac{4h^3 - 27k^3}{4h^3}}$ ist; alsdann schneidet jede durch O gezogene Gerade innerhalb des von jenen beiden gebildeten Winkels die Kurve in sechs Punkten, jede Gerade auſserhalb desselben in zweien. In diesem Falle besteht die Kurve aus zwei unendlichen Zweigen und zwei

1) *On the atriphtaloid and atriphtalid of Dr. Haughton* (Ed. Times XXXVII, 1882) und *On the geometrical properties of the atriphtaloid* (Proc. of the R. Irish Academy 1882).

2) *Construction de la tangente à l'atriphtaloïde* (Journ. de math. spéc. 4. Ser. XVII, 1893).

Ovalen (s. Taf. IX, Fig. 61). Wenn hingegen $4h^3 - 27k^3 = 0$, so werden die beiden Ovale unendlich klein, d. h. sie werden durch zwei isolierte Punkte vertreten. Wenn endlich $4h^3 - 27k^3 < 0$, so besteht die Kurve nur aus zwei Serpentinen.

Welches auch die relative Gröfse der Konstanten h und k sein möge, die Kurve hat die cyklischen Punkte der Ebene als Doppelpunkte; da die zugehörenden Tangenten die Gleichung haben

$$x \pm iy = \pm \frac{h}{2},$$

so sieht man, dafs die beiden Punkte $x = \pm \frac{h}{2}$, $y = 0$ aufserordentliche Brennpunkte der Kurve sind, und dafs demnach, wenn man k variiert, die Gleichung (4) ∞^1 Atriphtaloiden darstellt, welche diese Brennpunkte gemeinsam haben. — Die Kulminationspunkte haben als Abscissen die Wurzeln der Gleichung

$$2x^3 \pm hx^2 \pm k^3 = 0,$$

wo die oberen und ebenso die unteren Vorzeichen zusammengehören. Da jede dieser Gleichungen eine reelle Wurzel hat, so giebt es auch zwei reelle Doppeltangenten parallel zur x-Axe. Aufser den Kreispunkten hat die Atriphtaloide im Unendlichen noch einen Doppelpunkt; es ist der unendlich ferne Punkt der y-Axe; diese Axe ist die zugehörige Tangente, und da sie die Kurve anderswo nicht trifft, so bietet diese im Unendlichen eine höhere Singularität dar.

111. Während die Atriphtaloide ihre Entstehung einer Frage aus der mathematischen Physik verdankt, entstand aus astronomischen Fragen eine andere Kurve sechster Ordnung, die wir nunmehr erwähnen müssen.

Die Formel, welche die Zeitgleichung E in Funktionen der wahren Länge φ angiebt, hat man in folgender Form aufgestellt:

$$E = -462 \sin(\varphi - \alpha) - 593 \sin 2\varphi - 3 \sin 2(\varphi - \alpha) + 13 \sin 4\varphi,$$

wo α die Länge des Aphels ist. Indem man die beiden Glieder vernachlässigt und

$$\frac{1}{2}\frac{E}{593} = \varrho, \quad \frac{231}{593}\sin\alpha = a, \quad \frac{231}{593}\cos\alpha = b$$

setzt, wird diese

$$\varrho = a \cdot \cos\varphi - b \cdot \sin\varphi - \sin\varphi \cdot \cos\varphi. \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Interpretieren wir ϱ und φ als Polarkoordinaten, so stellt diese Gleichung eine rationale Kurve dar, die von E. de Jonquières untersucht wurde[1]); sie ist die erste der oben erwähnten Kurven sechster Ordnung. In kartesischen Koordinaten hat sie die Gleichung

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - ax + by)^2 = x^2y^2. \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

1) *Note relative à une courbe du sixième ordre qui se présente en astronomie* (Ann. di Matem. I, 1858).

Demnach ist der Anfang ein vierfacher Punkt mit paarweise zusammenfallenden Tangenten; Doppelpunkte derselben sind die Punkte $A(a, 0)$ und $B(0, -b)$; Spitzen die beiden Kreispunkte der Ebene, indem die unendlich ferne Gerade gemeinsame Tangente derselben ist. Von projektivischem Standpunkte aus unterscheidet sich daher diese Kurve nicht von der Käferkurve; de Jonquières zeigte, wie man sie vermittelst projektiver Büschel von Kurven niederer Ordnung erzeugen könne.

Ähnlichen Ursprung hat eine Kurve achter Ordnung jüngeren Datums[1]). Die Aufgabe, die Bahn eines Kometen aus drei Beobachtungen zu bestimmen, führt zur Untersuchung folgender Gleichung

$$m - z = \frac{m}{(1 - 2z\cos\psi + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

wo m und ψ aus der Beobachtung hervorgehende Konstanten sind, und z die Unbekannte. Setzt man nun $x = z - \cos\psi$ und

$$my = m - \cos\psi - x, \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

so wird Gleichung (7)

$$y = \frac{1}{(x^2 + \sin^2\psi)^{\frac{3}{2}}}; \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

infolgedessen ist die Aufgabe, z zu finden, zurückgeführt auf die, die Schnittpunkte der Geraden (8) mit der Kurve (9) zu finden. Gl. (9) kann geschrieben werden als

$$y^2(x^2 + \sin^2\psi)^3 = 1.$$

Die Hilfskurve ist von der achten Ordnung und symmetrisch zu den beiden Koordinataxen. Als Kulminationspunkte hat sie die Punkte $(0, \pm \sin^{-3}\psi)$ und als Wendepunkte die vier reellen Punkte mit der Abscisse $\pm \frac{1}{2}\sin\psi$. Der unendlich ferne Punkt von Oy ist ein sechsfacher, und der unendlich ferne von Ox ein Doppelpunkt. — Setzen wir im speziellen $\psi = \frac{\pi}{2}$, so wird (9) zu

$$y = \frac{1}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

die eine Kurve darstellt, die vor längerer Zeit von Binet[2]) zu ähnlichen Zwecken verwendet worden ist.

112. Zu einer anderen Kurve sechster Ordnung gelangte L. Burmester bei der Untersuchung über die Schatten der Schraubenflächen[3]);

---

1) Mrs. W. H. Young (Miss Grace Chisholm), *On the curve* $y = \left\{\frac{1}{x^2 + \sin^2\psi}\right\}^{\frac{2}{3}}$ *and its connection with an astronomical problem* (Monthly Notices of the R. Astr. Soc., March. 1897).

2) *Mémoire sur la determination des orbites des planètes et des comètes* (Journ. de l'Éc. polyt. 20. Heft, 1831).

3) L. Burmester, *Kinematisch-geometrische Construktionen der Parallelprojection der Schraubenflächen und insbesondere des Schattens derselben* (Zeitschrift f. Math. XVIII, 1873) S. 198.

sie wird in der Ebene auf folgende Weise konstruiert: „Es seien zwei Kreise Γ und Δ gegeben, die O zum gemeinsamen Mittelpunkt und c und d als Radien haben (s. Taf. X, Fig. 63a); in ihrer Ebene sei ferner ein fester Punkt G gegeben; man ziehe durch O eine beliebige Gerade, welche die Peripherie der gegebenen Kreise bezw. in C und D schneidet; man verbinde C mit G und bestimme auf der Verbindungslinie die beiden Punkte P, die von D einen gegebenen Abstand haben; der Ort der Punkte P ist eine Kurve, die aus zwei Ovalen besteht, von denen das eine innerhalb des anderen liegt, und die wegen ihrer Gestalt Kranioide (von κράνιον, Schädel) heifst[1]). Um ihre Gleichung zu finden, nehmen wir O als Anfang und OG als y-Axe. Die Strecke OG nennen wir g; die konstante Länge von DP l und φ den Winkel, den der bewegliche Radius OCD mit der x-Axe bildet; die Koordinaten von C werden dann sein $(c \cos\varphi, c \sin\varphi)$, die von D $(d \cos\varphi, d \sin\varphi)$. Die Gleichungen der Geraden CG und des Kreises mit dem Centrum D und dem Radius l werden also sein:

$$x(g - c\sin\varphi) + cy\cos\varphi = cg \, . \cos\varphi,$$

bezw. $$x^2 + y^2 - 2dx\cos\varphi - 2dy\sin\varphi + d^2 = l^2;$$

wir schreiben diese folgendermafsen:

$$(g - y)\cos\varphi + x\sin\varphi = \frac{gx}{c},$$

$$x \cdot \cos\varphi + y\sin\varphi = \frac{x^2 + y^2 + d^2 - l^2}{2d},$$

daraus können wir ableiten

$$(gy - \overline{x^2 + y^2})\cos\varphi = \frac{gx}{c} - \frac{x^2 + y^2 + d^2 - l^2}{2d}x,$$

$$(gy - \overline{x^2 + y^2})\sin\varphi = -\frac{gx^2}{c} + \frac{x^2 + y^2 + d^2 - l^2}{2d}(g - y);$$

durch Quadrieren und Addieren ergiebt sich:

$$[gy - (x^2 + y^2)]^2 = g^2x^2\left(\frac{x^2 + y^2}{c^2} - \frac{x^2 + y^2 + d^2 - l^2}{cd}\right)$$
$$+ \frac{(x^2 + y^2 + d^2 - l^2)^2}{4d^2}(x^2 + y^2 - 2gy + g^2) \quad . \quad (10)$$

als Gleichung der Kranioide; sie zeigt, dafs die Kurve in der That von der sechsten Ordnung ist, wie oben angedeutet: Burmester hat nicht nur zwei mechanische Konstruktionen derselben angegeben, sondern auch zwei verschiedene Weisen, in jedem Punkte die Normale und demnach auch die Tangente anzugeben[2]).

Ohne uns mit der Wiedergabe derselben aufzuhalten, wollen wir lieber einen bemerkenswerten Spezialfall der Kranioide anführen, auf welchen zu Anfang des 19. Jahrhunderts Poncelet stiefs, als er sich

1) L. Burmester, *Lehrbuch der Kinematik*, Bd. I (Leipzig 1888) S. 78.
2) Daselbst S. 79 ff.

mit ganz analogen Fragen beschäftigte, wie diejenigen, denen obige Kurve ihren Ursprung verdankt[1]). Dieser Fall entspricht der Voraussetzung, dafs d und demnach auch l unendlich grofs seien. Die oben angegebene Konstruktion wird dann zu folgender: „Gegeben ein Kreis mit dem Mittelpunkte O und dem Radius c und ein Punkt G seiner Ebene; man ziehe in diesem Kreise einen beliebigen Radius OC (Taf. X, Fig. 63*b*) dann die Gerade GC und errichte in O die Senkrechte zu OC, diese beiden Geraden schneiden sich in einem Punkte P der fraglichen Kurve.“ Um deren Gleichung zu finden, könnte man auf einen Grenzübergang zurückgreifen, der auf die Gleichung der Kranioide angewendet wird, aber es ist viel leichter, sie direkt zu begründen. Behalten wir nämlich die vorigen Bezeichnungen sämtlich bei, so erkennt man, dafs die Gleichungen der Geraden GC und OP sind:

$$x + y \cdot \operatorname{tg} \varphi = 0, \quad x(g - c \sin \varphi) + cy \cos \varphi = gc \cos \varphi \quad . \; . \quad (11)$$

Durch Elimination von φ ergiebt sich

$$g^2 x^2 (x^2 + y^2) = c^2 (gy - x^2 - y^2)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

als Gleichung der gesuchten Kurve; diese ist demnach eine Kurve vierter Ordnung, die im Anfangspunkt einen Berührungsknoten und G als Doppelpunkt hat. Wir bemerken ferner, dafs aus der Gleichung (11) sich ergiebt

$$x = \frac{gc \sin \varphi \cos \varphi}{g \sin \varphi - c}, \quad y = -\frac{gc \cos^2 \varphi}{g \sin \varphi - c}, \quad . \; . \; . \quad (13)$$

womit es sich bestätigt, dafs die Kurve rational ist. In dem Falle, dafs G der Peripherie des gegebenen Kreises angehört ($g = c$), fällt die erhaltene Kurve mit einer Strophoide zusammen. Im allgemeinen bemerkte Poncelet[2]): „cette courbe du quatrieme dégré que nous avions baptisée dans la salle no. 6 du nom de capricorne; courbe remarquable à plus d'un titre par sa forme symétrique élégante même, et douée de nombreuses propriétés géométriques jusqu'ici encore peu étudiée; etc.“ Indem man sich diesem vernünftigen Vorschlage des grofsen französischen Geometers angeschlossen hat, ist die fragliche Kurve vierter Ordnung Capricornoide genannt worden[3]); sie kann mechanisch erzeugt, und ihre Tangenten können nach der Roberval'schen Methode bestimmt werden.

---

1) *Application de la méthode de Roberval au tracé des tangentes aux courbes de contour apparent et de séparation d'ombre et de lumière dans l'espace de la vis à filets triangulaires.* (*Application d'analyse et de géométrie etc.* I, Paris 1864, S. 447 ff.)

2) A. a. O. S. 460.

3) Burmester, *Kinematik* I. S. 81.

Fünftes Kapitel.

Das Trifolium pratense und die Cornoide.

113. Die Frage Nr. 539 der *Nouvelles Annales de Mathématiques* lautet: „trouver une courbe qui représente les trois folioles du trifolium pratense.“ Gelöst wurde diese von H. Brocard[1]) in folgender Weise: Wir denken uns eine geschlossene Kurve Γ, konvex und symmetrisch in Bezug auf eine Axe, die auf dieser Axe eine Spitze hat und diese Axe senkrecht in O durchschneidet. O nehmen wir nun als Pol und diese Symmetrieaxe als Polaraxe und, ohne die Radienvectoren der einzelnen Punkte zu verändern, verdreifachen wir die Argumente derselben. Dann verwandelt sich Γ in eine aus drei gleichen und in Bezug auf eine Axe symmetrischen Blättern bestehende Kurve, jedes mit einer Spitze. Jede Kurve Γ von der angegebenen Art führt demnach zu einer Lösung der gestellten Aufgabe.

Als Kurve Γ kann z. B. die Kardioide dienen, die in Polarkoordinaten r und u die Gleichung hat:

$$r = a(1 - \cos u);$$

da diese ihre Spitze im Pole hat und die Polaraxe senkrecht im Punkte $u = \pi$, $r = 2a$ schneidet, so ist es nötig eine Koordinatenverschiebung vorzunehmen, derart, daſs dieser Punkt der neue Pol wird. Sind nun ϱ und ω die neuen Koordinaten des Punktes (r, u), so bestehen die Beziehungen

$$\frac{r}{\sin\omega} = \frac{\varrho}{\sin u} = \frac{2a}{\sin(u-\omega)}.$$

In den Koordinaten ϱ und ω wird daher die Kardioide folgendermaſsen wiedergegeben

$$a^2(\varrho^2 - 4a\varrho\cos\omega + 4a^2) = (\varrho^2 - 3a\varrho\cos\omega + 2a^2)^2.$$

Verwandeln wir nun ω in 3ω, so erhalten wir

$$a^2(\varrho^2 - 4a\varrho\cos 3\omega + 4a^2) = (\varrho^2 - 3a\varrho\cos 3\omega + 2a^2)^2$$

als Polargleichung unseres Trifolium pratense. Seine kartesische Gleichung ist infolgedessen

$$a^2\left(x^2 + y^2 - 4ax\frac{x^2-3y^2}{x^2+y^2} + 4a^2\right) = \left(x^2+y^2 - 3ax\frac{x^2-3y^2}{x^2+y^2} + 2a^2\right)^2.$$

Aus derselben kann man entnehmen, daſs die zugehörige Kurve drei Symmetrieaxen hat, die miteinander die Winkel $\frac{2\pi}{3}$ bilden und drei Spitzen, die von dem „Blattstiele“ den Abstand $2a$ haben.

1) Nouv. Ann. 3. Ser. IV, 1894, S. 58*.

Eine andere Kurve sechster Ordnung, die betrachtet und schon benannt wurde, wenn auch nicht von Grund aus untersucht, ist von folgender Entstehungsweise: „Gegeben ein Kreis mit dem Radius r und dem Centrum O (Taf. IX, Fig. 62) und darin zwei zueinander senkrechte Durchmesser AA' und BB'. Es sei MM' eine beliebige zum Durchmesser AA' parallele Sehne; von M' aus fälle man das Lot n auf die Gerade m, welche in M den gegebenen Kreis berührt; der Ort der Fuſspunkte N dieses Lotes ist die fragliche Kurve.“ Um die analytische Darstellung dieses Ortes zu finden, nehmen wir AA' und BB' als Koordinataxen; die Koordinaten von M werden dann sein $r \cdot \cos\varphi$, $r \cdot \sin\varphi$ und die von M' $-r \cdot \cos\varphi$, $r \sin\varphi$ (wo φ den Winkel MOA bedeutet). Die Tangente m wird demnach dargestellt durch

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - r = 0,$$

und die Senkrechte n durch

$$x \sin\varphi + y \cos\varphi + r \sin 2\varphi = 0;$$

lösen wir diese nach x und y auf, so erhalten wir

$$x = r \cos\varphi - r \sin\varphi \cdot \sin 2\varphi, \quad y = r \sin\varphi + r \cos\varphi \cdot \sin 2\varphi;$$

oder, wenn man will:

$$x = r \cos\varphi\,(1 - 2\sin^2\varphi), \qquad y = r \sin\varphi\,(1 + 2\cos^2\varphi). \;.\;.\; (1)$$

Dies ist die bequemste Art, die Kurve darzustellen; führt man hingegen an Stelle des Parameters φ die Gröſse $t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$ ein, so erhält man x und y als rationale gebrochene Funktion vom 6ten Grade dargestellt; daraus folgt wie schon angegeben, daſs die Kurve von der sechsten Ordnung und rational ist. Man ersieht ferner, daſs sie symmetrisch sowohl in Bezug auf AA' als auch BB' ist. Auf der ersten dieser beiden Geraden hat sie zwei Berührungsknoten C und C', auſserdem geht die Kurve durch die Punkte B und B'. Da aus den Gleichungen (1) folgt, daſs

$$x^2 + y^2 = 1 + \sin^2 2\varphi,$$

so liegen alle reellen Punkte der Kurve in dem Kreisringe, dessen Mittelpunkt O und dessen Radien r und $r\sqrt{2}$ sind; u. s. w. — Die Kurve kann auch geometrisch erforscht werden, indem man sie als besonderen Fall derjenigen Kurven betrachtet, die durch einen Kegelschnitt und eine rationale Kurve vierter Klasse erzeugt werden, deren Tangenten sich projektivisch entsprechen.

A. Sanchez, der es für angebracht hielt, dieser Kurve ein besonderes Werkchen zu widmen[1]), sah ihre Gestalt als einem Horne ähnlich an, indem er nur den vierten Teil derselben, nämlich den Bogen, der in A beginnt und über C und D gehend in B endigt, betrachtete, und belegte sie daher mit dem Namen Cornoide. Aus

1) *La cornoide* (San Salvador, Central America, 1895).

dem Gesagten geht jedoch hervor, dafs, wenn dieser in der Geometrie festen Fufs fassen soll, es ratsam wäre, der Kurve einen Namen zu geben, welcher ihrer wirklichen Form besser entspricht.

Eine grofse Reihe anderer spezieller Kurven höherer als vierter Ordnung werden wir im folgenden Abschnitte besprechen, weil wir sie dort nicht vom Gesichtspunkte ihrer Ordnung, sondern von anderen allgemeinen Gesichtspunkten betrachten. So gehört z. B. die Kurve sechster Ordnung, welche in tripolaren Koordinaten die Gleichung

$$\varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \varrho_3 = c$$

hat, zu den allgemeinen Cassinoiden (Nr. **162**); die Kurve achter Ordnung mit der tripolaren Gleichung

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = c$$

zu den Polyzomalkurven (Nr. **128**) u. s. w. Bemerkenswert ist noch der Umstand, dafs Kurven siebenter Ordnung in diesem Abschnitte gar nicht, sowie im folgenden kaum auftreten.

Sechstes Kapitel.

Eine Kurve neunter und eine fünfundzwanzigster Ordnung.

114. Die Theorie der Funktionen einer komplexen Variabelen, die, wie wir gesehen haben, bei der Untersuchung der spirischen Linien (Nr. **64**), der Pascal'schen Schnecke (Nr. **71**) und der regulären Astroiden (Nr. **104**) auftritt, und die uns noch zu vielen bemerkenswerten speziellen Kurven geleiten wird (Abschn. V, Kap. 15), führt auch zur Betrachtung einer Kurvenfamilie, deren erster Sprössling eine interessante Kurve neunter Ordnung ist; es ist die letzte Kurvenfamilie, die in diesem Abschnitte ihren Platz findet.

Man erinnere sich, dafs man den Namen „lemniskatische Funktionen" den elliptischen Funktionen, welche den Modulus i haben, gegeben hat. Setzt man daher

$$u = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^4}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

so wird $x = snu$ die erste der lemniskatischen Funktionen sein, und $cnu = \sqrt{1-x^2}$, $dnu = \sqrt{1+x^2}$ die beiden anderen. Aus (1) ergiebt sich:

$$iu = \int_0^x \frac{id\xi}{\sqrt{1-\xi^4}},$$

oder auch, wenn $i\xi = \eta$ gesetzt wird

$$iu = \int_0^{ix} \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^4}};$$

daraus folgt $$ix = sn\,(iu),$$

das heifst
infolgedessen

$$\left.\begin{aligned} sn\,(iu) &= i\,sn\,u \\ cn\,(iu) &= dn\,u \\ dn\,(iu) &= dn\,u \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Die erstere zeigt, dafs wenn man setzt

$$x + iy = sn\,(m + ni)u, \qquad (3)$$

sein wird $$y + ix = sn\,(mi + n)u; \qquad (4)$$

daher werden die Kurven, die aus der geometrischen Darstellung der Funktion $sn\,(m+ni)u$ sich nicht unterscheiden — es sei denn durch ihre Lage in Bezug auf die Axen — von denjenigen, die aus der Funktion $sn\,(mi+n)u$ in analoger Weise hervorgehen. Die durch Gleichung (3) dargestellten Kurven sind es nun, die, vorausgesetzt, dafs n und m ganze, relativ prime Zahlen sind, die oben genannte Kurvenfamilie bilden[1]).

Wenn man in Gleichung (3) u in $-u$ verwandelt, so wechseln x und y nur ihr Vorzeichen, und demnach sind diese Kurven symmetrisch in Bezug auf den Anfangspunkt der Koordinaten; dieser ist für alle ein Wendepunkt.

Im einfachsten Falle, $m = n = 1$ erhält man, wenn der Kürze wegen $sn\,u = \lambda$ gesetzt wird,

$$x + iy = \frac{\lambda + i\lambda}{\sqrt{1-\lambda^4}}, \quad \text{daher ist} \quad x = y = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^4}};$$

die entsprechende Kurve ist eine Gerade.

Um den nächstliegenden Fall, $m = 1$, $n = 2$, zu behandeln, beachten wir zunächst, dafs

$$sn\left((1+i)u\right) = \frac{\lambda + i\lambda}{\sqrt{1-\lambda^4}}, \qquad cn\left((1+i)u\right) = \frac{1 - i\lambda^2}{\sqrt{1-\lambda^4}},$$
$$dn\left((1+i)u\right) = \frac{1 + i\lambda^2}{\sqrt{1-\lambda^4}};$$

wenden wir nun das Additionstheorem an, so finden wir

$$x + iy = sn\left((1+2i)u\right) = \frac{\lambda(1+2i) - \lambda^5}{1-(1+2i)\lambda^4},$$

welche Gleichung sich in die beiden anderen trennt

$$x = \frac{\lambda - 6\lambda^5 + \lambda^9}{1 - 2\lambda^4 + 5\lambda^8}, \quad y = \frac{2\lambda - 2\lambda^9}{1 - 2\lambda^4 + 5\lambda^8}. \qquad (5)$$

1) W. Krimphoff, *Über eine neue Kurvengattung, welche aus der lemniskatischen Funktion entspringt* (Dissertation, Münster 1890).

Diese stellen eine rationale Kurve Γ_9 von der neunten Ordnung dar; durch Elimination von λ findet man die Gleichung von Γ_9 als

$$(2x+y)(x^2+y^2)^4+2y(5y^4+10x^2y-3y^4)-2x+y=0\,. \quad (6)$$

Sie beweist, dafs die fragliche Kurve die cyklischen Punkte der Ebene als vierfache Punkte, dagegen den unendlich fernen der Geraden $2x+y=0$ als einfachen Punkt hat; der Parameter dieses Punktes ist $\lambda=\infty$, der jener Punkte $\sqrt[4]{\frac{1}{1+2i}}$, (es sind diese die Wurzeln der Gleichung $1-2\lambda^4+5\lambda^8=0$). Da die Kurve Γ_9 rational ist, so hat sie aufser jenen beiden vierfachen Punkten noch 16 Doppelpunkte oder Spitzen. Um die zugehörigen Parameter zu finden, beachte man, dafs einem Doppelpunkte oder einer Spitze zwei verschiedene Werte desselben zukommen; nennen wir diese λ_1 und λ_2, so mufs also sein $\frac{\lambda_1(1+2i)-\lambda_1{}^5}{1-(1+2i)\lambda_1{}^4}=\frac{\lambda_2(1+2i)-\lambda_2{}^5}{1-(1+2i)\lambda_2{}^4}$.

Diese Gleichung ist teilbar durch $\lambda_1-\lambda_2$; der Quotient zerfällt in die beiden folgenden reellen Gleichungen

$$(\lambda_1{}^2\lambda_2{}^2-1)^2-(\lambda_1{}^2+\lambda_2{}^2)^2-4\lambda_1\lambda_2(\lambda_1{}^2+\lambda_2{}^2)=0,$$

$$(\lambda_1{}^2\lambda_2{}^2+1)^2+2\lambda_1\lambda_2(\lambda_1{}^2+\lambda_2{}^2)=0.$$

Diese Gleichungen sind algebraisch lösbar und ergeben 4 reelle und 12 imaginäre Lösungen; Γ_9 hat daher 4 reelle Doppelpunkte (s. Taf. X, Fig. 64). Zu demselben Resultate gelangt man auf transcendentem Wege; man erkennt so, dafs die Bestimmung der Doppelpunkte von Γ_9 mit dem Probleme der Fünfteilung der Lemniskate äquivalent ist.

Nehmen wir nun den Fall $m=1$, $n=3$, so erhalten wir eine Kurve, die nicht rational ist; setzt man aber $m=2$, $n=3$, so erhält man auf ähnliche Weise wie oben eine rationale Kurve von der Ordnung 25[1]). Die cyklischen Punkte sind vielfache Punkte derselben von der Ordnung 12; im Unendlichen hat die Kurve auch einen reellen Punkt, aufserdem sind von den 144 Doppelpunkten 12 reell (s. Taf. X, Fig. 65)[2]).

Diese Hinweise genügen, um zu zeigen, dafs die Theorie der lemniskatischen Funktionen eine reiche Quelle höchst bemerkenswerter rationaler Kurven ist.

---

1) W. Krimphoff, *Neue geometrische Darstellung der lemniskatischen Funktion* (Crelles Journ. CX, 1892).

2) Durch Induktion schliefst man, dafs wenn m und n relative Primzahlen sind, die eine gerade, die andere ungerade, man zu einer Kurve von der Ordnung $(m+n)^2$ gelangt, die im Unendlichen einen einfachen reellen Punkt hat, und für welche die Kreispunkte vielfache Punkte von der Ordnung $\frac{(m+n-1)(m+n+1)}{2}$ sind; die Kurve hat aufserdem $\left\{\frac{(m+n-1)(m+n+1)}{2}\right\}^2$ Doppelpunkte, von denen nur $\frac{(m+n-1)(m+n+1)}{2}$ reell sind.

V. Abschnitt.

Spezielle algebraische Kurven beliebiger Ordnung.

Erstes Kapitel.

Einleitung.

115. Die heutige Geometrie besitzt aufser der grofsen Zahl algebraischer Kurven von bestimmter Ordnung noch einen grofsen Reichtum an Kurven beliebiger Ordnung, die jedoch spezielle Eigenschaften besitzen, zu denen man gelangt, indem man von den verschiedensten Begriffen ausgeht. Zu einigen gelangt man durch Verallgemeinerung der Konstruktion schon bekannter Kurven: die cissoidalen Kurven und die allgemeinen Cissoiden (Nr. **29**), die strophoidalen Linien und allgemeinen Strophoiden (Nr. **41**), die konchoidalen Kurven und die Konchoiden mit beliebiger Basis (Nr. **69**) können als Beispiele trefflicher Ergebnisse dienen, zu denen ein solcher Verallgemeinerungsprozefs führen kann, wenn er geschickt angewendet wird. Zu anderen kommt man durch Verallgemeinerung der Gleichung einer Kurve[1]: so erhält man durch Verallgemeinerung der Gleichung des kartesischen Foliums unzählig viele Kurven verschiedener Ordnung (Nr. **34**); in ähnlicher Weise gelangt man zu den Sternkardioiden (Nr. **72**) und den Knoten (Nr. **85**); wir werden in den Kap. 2 bis 6 dieses Abschnittes sehen, wie derselbe Weg zu den Parabeln und Hyperbeln beliebiger Ordnung führt, zu den Perlkurven, den triangulären von Lamé, und den Polyzomalkurven, alles Kurven, die als analytische Verallgemeinerungen der Kegelschnitte angesehen werden können. Jedoch hat diese Methode, eine der Gleichungen, durch welche die Kurve dargestellt wird, zu verallgemeinern, den Übelstand, dafs sie unendlich vieldeutig ist, da die Zahl der Arten, auf welche man eine Kurve analytisch darstellen kann, eine unbegrenzte ist. Daher haben einige es vorgezogen die Definition der Kurve zu verallgemeinern, indem sie sich auf einige bemerkenswerte geometrische Eigenschaften, die die Kurve besitzt, beschränkten. So ent-

1) Zahlreiche Anwendungen dieser Erzeugungsweise finden sich in J. B. Caraccioli, *De lineis curvis liber* (Pisis, MDCCXL).

standen die Kurven von Darboux und die Equilateren von P. Serret, die wir in kurzem (Kap. 7 dieses Abschnittes) als thatsächliche geometrische Verallgemeinerungen der Kegelschnitte kennen lernen werden. Andere neue Kurven erhält man, wenn man die Linien aufsucht, die vorher aufgestellte Eigenschaften der Gestalt haben; es ist dies ein Begriff, dem namentlich Auguste Comte eine grofse Bedeutung verlieh, und den wir schon bei der Untersuchung des Trifolium pratense (Nr. **113**) angewendet gesehen haben und der uns in diesem Abschnitte (Kap. 8—10) als Ausgangspunkt der Theorie der Rodoneen begegnen wird, sowie der geometrischen Blätter, der orbiformen, der triangulären Kurven von Euler und der Ovale. Aufserordentlich fruchtbar für neue und wichtige Kurven waren auch das verallgemeinerte Delische Problem, sowie das der Teilung eines Winkels in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile: diese führten zu den Multiplikatrix- und Mediatrix-Kurven und zu der ausgedehnten Klasse der Sektrix-Kurven, deren Untersuchung dem Kap. 11 und 12 dieses Abschnittes zufällt. Eine andere reiche Quelle neuer Kurven entspringt aus der Lehre der geometrischen Transformationen; wir werden uns im allgemeinen hier nicht mit den Kurven aufhalten, die aus der Anwendung bekannter Transformationen auf schon bekannte Linien entstehen, da deren Studium im grofsen und ganzen weder Schwierigkeiten noch Interesse bietet; die wichtigeren von ihnen werden wir im Abschnitt VII behandeln; wohl aber werden wir in diesen Abschnitt die Betrachtung derjenigen Kurven einschliefsen, die die Eigentümlichkeit haben, bei gewissen geometrischen Transformationen sich selber zu entsprechen. Solche Kurven sind die, welche ein Centrum oder auch mehrere Durchmesser haben, die autopolaren und die anallagmatischen Kurven, von denen im Kap. 13 und 14 die Rede sein wird. Die geometrische Darstellung komplexer Gröfsen, aus der wir schon in Nr. **64**, **71**, **103** und **114** Nutzen gezogen haben, wird uns hier zu wichtigen Klassen von Kurven führen (Kap. 15) und zu anderen (Kap. 16—18) die Untersuchung solcher Kurven — einen Spezialfall derselben sahen wir schon in Nr. **20** von Raffy ausgeführt — deren Bogen vermittelst Transcendenten von vorher bestimmter Natur ausgedrückt werden kann. Schliefslich sind bei der Behandlung physikalischer Fragen Kurven erdacht worden (Kap. 19), mit denen wir zu der grofsen Schar der physikalisch-mathematischen Kurven übergehen (s. Nr. **17**).

Bevor wir an die Entwickelung des in den vorigen Zeilen skizzierten Programms herantreten, bemerken wir, dafs man auch zu vielen speziellen Kurven gelangt, wenn man die auf gewisse spezielle Theorieen bezüglichen Formeln geometrisch darstellt. Zwei Beispiele einer derartigen Entstehung bieten uns die in Nr. **111** definierten Kurven. Eine andere Gruppe von viel gröfserem Werte entspringt der Theorie

der elliptischen Funktionen. Es ist bekannt, dafs, wenn man auf eine derartige Funktion eine Transformation von bestimmter Ordnung anwendet, zwischen dem Modulus p der ursprünglichen Funktion und dem Modulus q der transformierten eine algebraische Beziehung stattfindet; diese stellt nun, wenn man p und q als kartesische Koordinaten eines Punktes auslegt, eine Kurve dar. Eben diese Modular-Kurven wurden in den einfacheren Fällen von Cayley[1]) betrachtet und in ihrer ganzen Allgemeinheit von H. J. S. Smith[2]), dem es gelang, alle Plücker'schen Charakteristiken derselben zu bestimmen. Weiteres als diesen Hinweis auf ein Thema, das den Analytiker mehr interessiert als den Geometer, können wir hier nicht bieten.

Erinnern wir uns schliefslich, dafs unter den Kurven gegebener Ordnung die vom Geschlechte Null oder die rationalen eine besonders wichtige Stelle einnehmen; die Koordinaten der Punkte einer solchen Kurve lassen sich immer als rationale Funktionen eines Parameters ausdrücken und zwar durch ein allgemeines Verfahren, welches Clebsch in seiner berühmten Abhandlung[3]) gelehrt hat. Aber, auch ohne gerade auf diese zurückzugehen, kann man in gewissen besonderen Fällen denselben Zweck erreichen: folgende Beispiele mögen dieses zeigen[4]).

Man betrachte die Kurve n^{ter} Ordnung Γ, die durch folgende Gleichung dargestellt wird

$$\sum_{r=0}^{r=n} f_r(x, y) = 0,$$

wo f_r eine binäre Form vom Grade r in x und y ist. Setzt man

$$y = tx, \quad f_r(1, t) = T_r,$$

so wird die vorige Gleichung

$$\sum_{r=0}^{r=n} x^r T_r = 0;$$

lösen wir diese nach x auf und setzen den so gefundenen Wert in $y = tx$ ein, so bekommen wir x und y in Funktionen des Parameters t;

---

1) *A memoir on the transformation of elliptic functions* (Phil. Trans. CLXIV, 1874). S. auch die neuere Abhandlung *On the transformation of elliptic functions* (Amer, Journ. IX, 1887), woselbst auch die multiplier-modular curves oder *MM*-curves betrachtet werden.

2) *On the singularities of modular-equations and curves* (Proc. of the Lond. math. Soc. IX, 1878). Vgl. auch die frühere *Mémoire sur les équations modulaires* (Lincei Mem. 3. Ser. I, 1877) und die spätere *Memoir on the theta- and omegafunctions* (Collected math. Papers, II. Oxford 1894, S. 415 ff.).

3) *Ueber diejenigen Curven, deren Coordinaten rationale Funktionen eines Parameters sind* (Crelles Journ. LXIV, 1865).

4) Hahn, *Eulers Methode der Parameterdarstellung algebraischer Kurven* (Progr. Berlin, 1889).

die so erhaltenen Ausdrücke sind im allgemeinen transzendent; aber wenn man es durch eine geeignete Änderung des Parameters dahin bringen kann, daſs sie rational werden, so ist dann auch Γ rational.

Wenden wir dieses Rechnungsverfahren an auf die Kurve[1])

$$x^{n+1} = \sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} a_{n-r} y^r,$$

so erhalten wir die Gleichungen

$$x = \sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} a_{n-r} t^r, \qquad y = \sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} a_{n-r} t^{r+1};$$

dagegen bei Anwendung auf die Kurve

$$x^{n-1} = \sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} a_{n-r} x^{n-r} y^2$$

bekommen wir

$$x = \frac{1}{\sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} a_{n-r} t^r}, \qquad y = \frac{t}{\sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} a_{n-r} t^r}.$$

Nehmen wir ferner die Kurve[2])

$$f_m^2 - f_2 \cdot f_{m-2} = 0,$$

so erhalten wir die folgenden Formeln:

$$x = \frac{T_{m-2}}{T_m} \sqrt{T_2}, \qquad y = t \frac{T_{m-2}}{T_m} \sqrt{T_2};$$

bekanntlich kann man nun an Stelle von t einen anderen Parameter τ einführen derart, daſs sowohl t wie auch $\sqrt{T_2}$ rationale Funktionen von τ werden; infolgedessen werden auch x und y rationale Funktionen von τ. In ähnlicher Weise erhält man bei den Gleichungen

$$f_m^2 - 2 f_1 f_m f_{m-2} + f_2 f_{m-2}^2 = 0$$

die Formeln

$$x = \frac{T_{m-2}}{T_m} \left(T_1 + \sqrt{T_1^2 - T_2}\right), \qquad y = \frac{T_{m-2}}{T_m} \left(T_1 + \sqrt{T_1^2 - T_2}\right),$$

die durch andere rationale ersetzt werden können, wenn man den Parameter geeignet wählt.

1) Cramer, *Introduction etc.* S. 636.
2) Hermite, *Cours d'analyse* (I Partie, Paris 1873) S. 242.

Zweites Kapitel.

Die Parabeln beliebiger Ordnung.

116. Aus der Gleichung $y^2 = px$, welche in kartesischen Koordinaten eine Parabel darstellt, ergeben sich durch Verallgemeinerung Kurven, die durch die Gleichung

$$y^n = p^{n-1} \cdot x \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

dargestellt werden, wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet: es sind die Paraboloiden oder die Parabeln höherer Ordnung, rechtwinklig oder schiefwinklig genannt, jenachdem die Axen recht- oder schiefwinklig sind. Erdacht und untersucht wurden sie von mehreren berühmten Geometern in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts. Die bekannteste Erwähnung derselben findet sich einem Briefe, den Descartes am 13. Juli 1638 schrieb[1]), in welchem schon Sätze über den Schwerpunkt und die Volumina, die sie durch Rotation erzeugen, ausgesprochen sind. Wenig späteren Datums ist ein vor dem Jahre 1644 von Fermat[2]) an Cavalieri, durch Vermittelung von P. Mersenne, gerichtetes Schreiben, worin ein Ausdruck für die Fläche eines Parabelsegmentes angegeben ist, sowie für das von ihr durch Rotation um die Axe erzeugte Volumen, ebenso die Schwerpunkte jener Fläche und dieses Körpers. Verbreitet wurden diese wichtigen Resultate von P. Mersenne durch ihre Wiedergabe in der Praefatio ad mechanicam seiner *Cogitata physico-mathematica* (1644). Bemerkenswert ist, dafs diese Untersuchungen Fermats aus einer Zeit stammen, die beträchtlich vor 1644 liegt. In einem Briefe, nämlich den er am 22. September 1636 an Roberval richtete[3]), wird auf die von ihm ausgeführte Quadratur hingewiesen, im speciellen auf die Parabel $\frac{y^3}{x} = Const.$ „que M. Beaugrand .... appelle parabole solide“; in der Antwort — datiert vom 11. Oktober 1636 — sagt Roberval, dafs er den Beweis der von seinem berühmten Korrespondenten entdeckten Sätze gefunden habe[4]). Darauf kündet Fermat — Brief vom 4. November 1636 — die Entdeckung von Sätzen an, die „le centre de gravité de toutes ces nouvelles figures“ betreffen[5]). Und auf dieses selbe Thema kommt er zurück in den Briefen an denselben Roberval vom 16. Dezember 1636[6]) und an Mersenne vom 10. August 1638[7]) und dann mit aller nur wünschenswerten Aus-

1) *Oeuvres de Descartes*; ed. Cousin, VIII, S. 429—30; ed. Adam et Tannery, II. (Paris 1898) S. 246.

2) Zuerst veröffentlicht in den *Oeuvres de Fermat* (ed. Tannery u. Henry) I, S. 195—198.

3) *Oeuvres de Fermat*, II, S. 73. 4) Das. S. 81. 5) Das. S. 85.

6) Das. S. 95. 7) Das. S. 165.

führlichkeit in der berühmten Arbeit, die handelt *De aequationum localium transmutatione et emendatione*, die erst 1679 erschienen ist[1]). Berücksichtigen wir das Datum der Veröffentlichung, so würde die Priorität einiger dieser Resultate in erster Linie dem Bonaventura Cavalieri zukommen, der sie in der vierten seiner *Exercitationes mathematicae* (Bononiae 1647) bekannt gab; in zweiter Linie dem Stefano degli Angeli, dem Verfasser einer wichtigen Arbeit *De infinitis parabolis, de infinitisque solidis ex variis rotationibus ipsarum etc.* (Venetiae 1654); endlich dem Wallis, der sich in seiner *Arithmetica infinitorum* (Oxford, 1655) und dann in seinem Lehrbuche über die Kegelschnitte (1665) eingehend mit den höheren Parabeln beschäftigt hat. Diese Übereinstimmung der Resultate verursachte bittere Klagen seitens Cavalieri[2]) und einen Briefwechsel zwischen Wallis und Fermat[3]); das richtige scheint uns zu sein, auf keiner von beiden Seiten eine „mala fides" vorauszusetzen, indem man sich nicht zu wundern braucht, wenn, wie wir glauben, weil eben jene Zeiten sozusagen reif für die Untersuchung der höheren Parabeln gewesen sind, sich mehrere an die Ausführung derselben gemacht haben.

Es möge vermerkt werden, dafs die ersten, die sich mit den höheren Parabeln beschäftigten, die Gestalt derselben nicht untersuchten; sie überliefsen somit Maclaurin[4]) die Bemerkung, dafs sie verschiedene Gestalt darbieten, jenachdem n gerade oder ungerade ist; im ersten Falle ist die Kurve symmetrisch in Bezug auf die x-Axe und hat im Anfange mit der anderen Axe eine Berührung von der Ordnung $n-1$; im zweiten Falle ist sie symmetrisch in Bezug auf den Anfang und hat daselbst einen Wendepunkt. Es soll auch bemerkt werden, dafs sich die ursprüngliche Definition der Parabel leicht noch mehr verallgemeinern läfst, indem man zuläfst, dafs der Exponent n, statt ganzzahlig und positiv zu sein, auch einfach rational

---

1) In den *Varia opera*; s. auch *Oeuvres de Fermat*, I, S. 255—285, und III, S. 216—37.

2) In einem Briefe, den er unter dem 17. Okt. 1646 an Rocca schrieb, steht nämlich: „Il signor Torricelli .... ha dimostrata anch' egli la quadratura delle infinite parabole (come le hanno chiamate in Francia) ... per via diversissima; il quale teorema ella sa ch'io lo proposi in Francia, sebbene ora si fanno là inventori del medesimo: ma io cito per testimonia il P. Mersennio al quale lo mandai, ed il P. Niceroni che vedendo l'ultimo problema della mia centuria dove io lo accenno, disse di volerlo proporre colà, siccome lo propose al Beaugrand. In somma, si vede in loro anche in questa parte una emulazione grande cogli Italiani". G. Piola, *Elogio di Bonaventura Cavalieri* (Milano 1844) S. 55—56.

3) S. das *Commercium epistolicum de quaestionibus quibusdam inter J. Wallis et alios viros* (Oxon. 1658) und den III. Bd. der *Oeuvres de Fermat.*

4) *A treatise of algebra* (1748) S. 317—18.

und positiv sei; mit anderem Ausdruck: es läfst sich statt der Gleichung (1) auch folgende betrachten:

$$y^{m+n} = p^m \cdot x^n, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wo m relativ prim zu n ist. Die entsprechenden Kurven werden in einer Abhandlung von Kuntzen[1]), dem bekannten Lehrer Kants, mit dem Namen parabolae parametrales bezeichnet. Der Anfang ist ein n-facher Punkt, und der unendlich ferne von Ox ein m-facher; das Geschlecht der Kurve ist immer gleich Null, denn aus (2) ergiebt sich folgende parametrische Darstellung derselben:

$$x = p\lambda^{m+n}, \qquad y = p\lambda^n. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

117. Die metrischen Sätze über die Parabeln höherer Ordnung sind gröfstenteils nur Erweiterungen von Sätzen, die schon seit den Zeiten des Archimedes über die Parabel zweiter Ordnung bekannt sind, und können mit wenigen Zeilen Rechnung aufgestellt werden. Wir werden nun diese auf Grund der Gleichung (1) beweisen, ohne jedoch vorauszusetzen, dafs n — was wir von nun an den Index der Kurve nennen wollen — ganzzahlig sei, noch auch, dafs der Winkel der Koordinataxen α ein rechter sei.

Bezeichnen wir mit S_t die Subtangente, so ergiebt sich aus (1)

$$S_t = x - y\frac{dx}{dy} = x - \frac{ny^n}{p^{n-1}} = x - nx = -(n-1)x;$$

demnach genügt es, **um die Tangente in einem beliebigen Punkte P der Parabel mit dem Index n zu konstruieren, auf der Abscissenaxe eine Strecke gleich $-(n-1)$ mal der Abscisse abzutragen; die Verbindungslinie ihres Endpunktes mit P liefert die Tangente**[2]).

Ist F die Fläche des gemischtlinigen Dreiecks, das zu Seiten einen vom Anfang gerechneten Kurvenbogen und die Koordinaten seines Endpunktes hat, so ist

$$F = \sin\alpha \int_0^x y \cdot dx = \sin\alpha \int_0^x p^{\frac{n-1}{n}} x^{\frac{1}{n}} \cdot dx = \frac{n}{n+1} \frac{y^{n+1}}{p^{n-1}} \sin\alpha.$$

Ist nun anderseits T die Fläche des geradlinigen Dreiecks, welches dieselben Ecken wie das vorhin beschriebene gemischtlinige hat, so ist

$$T = \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot xy = \frac{y^{n+1}}{2p^{n-1}}\sin\alpha,$$

und daher

$$\frac{F}{T} = \frac{2n}{n+1},$$

1) *Theoremata nova de parabolis infinitis eodem parametro et circa eandem axim descriptis* (Acta eruditorum lips. 1737).

2) Wallis, *Opera omnia* I. (Oxon. 1695) S. 351—353. Vgl. auch den I. Abschnitt der Abhandlung von J. Sobotka, *Zur infinitesimalen Geometrie einiger Plancurven* (Prager Ber., 1898), wo auch die Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes gegeben wird.

eine elegante Beziehung[1]), die für $n = 1$ mit einer Entdeckung des Archimedes identisch ist (*Quadratur der Parabel* prop. 24).

Nehmen wir jetzt $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und nennen V das durch Rotation des vorgenannten krummlinigen Dreiecks um Ox erzeugte Volumen, so haben wir

$$V = \pi \int_0^x y^2 \cdot dx = \pi \int_0^x p^{\frac{2(n-1)}{n}} x^{\frac{2}{n}} \cdot dx = \frac{n\pi}{n+2} p^{\frac{2(n-1)}{n}} x^{\frac{n+2}{n}};$$

Nun wird das Volumen U, das durch Rotation des Rechtecks mit den Seiten x und y um Ox erzeugt wird, dargestellt durch

$$U = x \cdot \pi y^2 = \pi \cdot p^{\frac{2(n-1)}{n}} x^{\frac{n-2}{n}};$$

infolgedessen ist

$$\frac{V}{U} = \frac{n}{n+2}$$

eine Beziehung, die einen leicht in Worte zu kleidenden Satz ausdrückt[2]). Nennen wir g die Abscisse des Schwerpunktes eines Segmentes, das von dem Parabelbogen und einer Parallelen zur y-Axe begrenzt wird, so haben wir

$$g = \frac{\int_0^x xy \cdot dx}{\int_0^x y \cdot dx} = \frac{\int_0^x x(p^{n-1}x)^{\frac{1}{n}} \cdot dx}{\int_0^x (p^{n-1}x)^{\frac{1}{n}} \cdot dx} = \frac{\int_0^x x^{\frac{n+1}{n}} \cdot dx}{\int_0^x x^{\frac{1}{n}} \cdot dx} = x\frac{n+1}{2n+1},$$

welches Resultat auch für schiefe Axen gültig ist und für $n = 2$ schon dem Archimedes bekannt war (s. a. a. O.).

Bezeichnen wir schliefslich mit s den Kurvenbogen, so haben wir

$$ds = \frac{1}{p^{n-1}} dx \sqrt{p^{2n-2} + n^2 x^{2n-2}};$$

ds ist also durch ein binomisches Differenzial ausgedrückt, das durch einen endlichen Ausdruck integrierbar ist, wenn eine der Zahlen $\frac{1}{2n-2}$, $\frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2}$ eine ganze ist; bezeichnet man daher mit ν eine ganze Zahl, so hat man

$$\frac{1}{2n-2} = \nu \quad \text{oder auch} \quad \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2} = \nu;$$

schreibt man dieses so:

$$n = 1 + \frac{1}{2\nu}, \qquad n = 1 + \frac{1}{2\nu - 1},$$

so sieht man, **dafs, wenn $n = 1 + \frac{1}{\mu}$, wo μ eine beliebige ganze Zahl ist, die Parabel mit dem Index n rektifizierbar ist;** variiert

1) Wallis, *Opera* I, S. 353. 2) Ebendaselbst.

man μ, so erhält man unzählig viele Kurven, die mit dieser Eigenschaft versehen sind.

118. Betrachten wir die parametrale Parabel, welche folgender parametrischen Darstellung (vgl. Nr. **116**) fähig ist:

$$x = p\lambda^{m+n}, \quad y = p\lambda^n; \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

als allgemeine Gleichung der Tangente kann man dann folgende nehmen:

$$nx - (m+n)\lambda^m y + mp\lambda^{m+n} = 0;$$

die Plückerschen Koordinaten einer beliebigen Tangente sind also

$$\xi = \frac{n}{mp\lambda^{m+n}}, \quad \eta = -\frac{m+n}{mp\lambda^n};$$

daher ist die Tangentialgleichung der Kurve von folgender Form:

$$\eta^{m+n} = p_1^m \xi^n. \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Da diese von derselben Gestalt ist wie (2), so schliefsen wir: **Jede Parabel erweist sich als gleich ihrer eigenen Polarreziproken in Bezug auf einen passend gewählten Kreis**[1]). — Eine Parabel mit ganzzahligem Index n hat als Evolute eine rationale Kurve von der Ordnung $3(n-1)$, während die Ordnung der Evolute der allgemeineren Kurve (2) durch die gröfsere der Zahlen $3m$ und $2m+n$ ausgedrückt wird.

Betrachten wir jetzt noch eine Parabel mit gebrochenem Index, z. B. die durch Gleichung (2) dargestellte, so hat die Normale im Punkte (x, y) die Gleichung:

$$(m+n)(X-x)y^{m+n-1} + np^m(Y-y)x^{n-1} = 0, \quad . \quad (5)$$

wo X, Y die laufenden Koordinaten sind. Ist nun umgekehrt der Punkt (X, Y) gegeben, so mufs man, um die von ihm an die Kurve gezogenen Normalen zu finden, diejenigen Werte von x, y bestimmen, welche dieser Gleichung und der Gl. (2) genügen; multiplizieren wir nun (5) mit y und berücksichtigen (2), so wird diese

$$(m+n)(X-x)x + n(Y-y)y = 0, \quad \ldots \quad (5')$$

welche (5) ersetzen kann. Da nun diese einen Kegelschnitt darstellt, der durch den Anfang geht, und da der Anfang ein n-facher Punkt der betrachteten Parabel ist, so hat man die Grundlagen für folgenden Satz: **Durch jeden Punkt P der Ebene einer Parabel mit dem Index $\frac{m+n}{n}$ gehen $2m+n$ Normalen der Kurve; ihre Fufspunkte liegen auf einem Kegelschnitte, der durch den Anfang und den Punkt P selbst geht**[2]).

Jede Parabel mit ganzzahligem oder gebrochenem Index — die also

1) Genocchi in den *Nouv. Ann.* XIII, 1854, S. 132—36.

2) S. *Nouv. Ann.*, Question 1131, vorgelegt von Painvin und gelöst in XIII. (2. Ser.) 1874.

durch eine der Gleichungen (1), (2) dargestellt werden kann — ist bestimmt, wenn aufser den Axen der Parameter bekannt ist. Statt diese Konstante zu geben, kann die Kurve auch dadurch bestimmt werden, dafs man einen Punkt derselben giebt; sind x_0, y_0 die Koordinaten desselben, so treten an Stelle von (1) und (2) folgende Gleichungen

$$\left(\frac{y}{y_0}\right)^n = \frac{x}{x_0} \quad . \quad . \ (1'), \qquad \left(\frac{y}{y_0}\right)^{m+n} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^n . \quad . \quad . \quad . \ (2')$$

Aus der ersteren kann man eine punktweise Konstruktion für alle Parabeln mit ganzzahligem Index ableiten[1]). Ist nämlich A der Punkt (x_0, y_0) und sei $OB = y_0$, $BA = x_0$ (s. Taf. X, Fig. 66), so nehme man die Ordinate $OM = y$ beliebig an und ziehe durch M die Gerade m parallel zu Ox; man projiziere A von O aus auf m in $P_1(x_1, y)$; da nun O, A, P_1 collinear sind, so ist

$$\frac{x_1}{x_0} = \frac{y}{y_0}.$$

Man projiziere nun P_1 rechtwinklig in A_1 auf die durch B zu Ox gezogene Parallele b und dann A_1 von O aus auf m in $P_2(x_2, y)$; da nun auch die Punkte O, A_1, P_2 collinear sind, hat man ebenso

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y}{y_0}.$$

Operiert man in ähnlicher Weise mit P_2, so entstehen die Punkte $A_2, P_3(x_3, y)$ u. s. w. schliefslich A_{n-1}, $P_n(x_n, y)$ und es bestehen die Beziehungen

$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{y}{y_0}, \quad \frac{x_4}{x_3} = \frac{y}{y_0}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} = \frac{y}{y_0}, \quad \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{y}{y_0}.$$

Multipliziert man alle diese Gleichungen mit einander, so findet man

$$\frac{x_n}{x_0} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^n,$$

welches beweist, dafs der Punkt P_n der durch Gleichung (1') dargestellten Parabel mit dem Index n angehört. Variiert man die Ordinate $OM = y$, so erhält man beliebig viele Punkte der fraglichen Kurve. Wir können noch hinzufügen: Wenn man A rechtwinklig auf m projiziert in P_0, dann P_0 von O aus auf b in A_{-1}, dann A_{-1} rechtwinklig auf m in P_{-1} u. s. w., so erhält man die Reihe der Punkte

$$P_0(x_0, y), \quad A_{-1}(x_{-1}, y_0), \quad P_{-1}(x_{-1}, y) \ \ldots\ldots \ A_{-n}(x_{-n}, y_0), \quad P_{-n}(x_{-n} y)$$

und die Reihe der Gleichheiten

$$\frac{x_0}{x_{-1}} = \frac{y}{y_0}, \quad \frac{x_{-1}}{x_{-2}} = \frac{y}{y_0}, \ \ldots\ldots \ \frac{x_{-n+1}}{x_{-n}} = \frac{y}{y_0},$$

1) Vgl. Peano, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (Turin 1887) S. 74. — Die im Texte angegebene Konstruktion setzt rechtwinklige Koordinaten voraus; mit leicht ersichtlichen Modifikationen kann sie jedoch dem Falle der schiefen Axen angepafst werden.

woraus folgt

$$\frac{x_0}{x_{-n}} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^n \qquad \text{oder auch} \qquad \left(\frac{x_{-n}}{x_0}\right) = \left(\frac{y}{y_0}\right)^{-n};$$

infolgedessen gehört der Punkt P_{-n} der Parabel mit dem Index $-n$ an, die durch die Gleichung $\frac{x}{x_0} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^{-n}$ dargestellt wird.

Die oben angeführte Methode, alle Parabeln mit ganzzahligem Index zu konstruieren, führt uns zur Punktkonstruktion aller parabolischen Kurven[1]), d. h. aller derjenigen Kurven, die durch eine Gleichung von folgendem Typus dargestellt werden können

$$y = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{x^r}{p_r^{r-1}}.$$

Konstruieren wir nämlich alle die r Parabeln, die durch die Gleichungen

$$x^r = p_r^{r-1} y_r$$

dargestellt sind, so hat man

$$y = \sum_{r=1}^{r=n} y_r.$$

Derartige Kurven haben eine gewisse Bedeutung für die Analysis: In erster Linie, weil das Problem der Auflösung einer algebraischen Gleichung äquivalent ist mit dem der Auffindung der Schnitte einer parabolischen Kurve mit der zugehörigen Abscissenaxe; man hat zu dem Zwecke auch Instrumente erfunden, mittelst derer man sie in kontinuierlichem Zuge zeichnen kann[2]). In zweiter Linie, weil sie bei der näherungsweisen Berechnung der ebenen Flächen auftreten; infolgedessen hat die Flächenbestimmung der parabolischen Kurven die Veranlassung auch zu neueren wichtigen Untersuchungen gegeben[3]). Hervorragende geometrische Eigenschaften treten bei diesen Kurven nicht auf, wir erachten es daher für nicht angebracht, uns weiter mit diesen zu befassen, und wollen vielmehr dieses Kapitel mit der Aufzählung der bemerkenswertesten speziellen Parabeln schliefsen.

119. I. Die berühmteste ist unzweifelhaft die erste der rektifizierbaren Parabeln, auf welche wir am Schlusse von Nr. **117** stiefsen;

---

1) *Neutonis Opuscula mathematica philosophica et philologica* I. (Lausanne et Genevae 1744) S. 271—282, woselbst das Problem gelöst wird: „invenire lineam curvam generis parabolici, quae per data quotcunque puncta transibit.“ Vgl. auch Magnus, *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie* (Berlin 1833) S. 260.

2) Segner, *Methodus simplex et universalis omnes omnium aequationum radices detegendi* (Nov. Comment. Petrop. VII, 1761). Rowning, *A machine for finding the roots of equations* (Phil. Trans. 1770).

3) Schoute, *L'aire des paraboles d'ordre supérieur* (C. R. CXXII, 1896); Kortweg, *Sur le théorème enoncé par M. P. H. Schoute* (Das.); Manoury, *Sur la note de M. Schoute* (Das.).

sie hat als Index $n = \frac{3}{2}$ und als Gleichung $y^3 = px^2$. Gewöhnlich wird sie semikubische Parabel genannt nach einem Vorschlage von Wallis; sie ist die älteste rektifizierbare algebraische Kurve[1]). Dafs sie rektifizierbar sei, wurde schon von dem Franzosen Fermat bemerkt[2]), von dem Engländer Neil[3]) und von dem Holländer Heuraet[4]); daher rühren auch die verschiedenen Namen, mit welchen diese Kurve bezeichnet wird[5]).

Die semikubische Parabel erfreut sich auch deswegen grofser Berühmtheit, weil sie folgendes mechanische Problem löst, welches Leibniz im Verlaufe seines berühmten Streites mit den Cartesianern aufstellte: „Eine Linie zu finden, so beschaffen, dafs ein sie durchlaufender Punkt sich gleichförmig bewegt, indem er in gleichen Zeiten sich um gleiche Strecken dem Horizonte nähert." Dieses Problem wurde alsbald von Huygens gelöst[6]), dessen Lösung von Leibniz[7]) kommentiert wurde; später haben sich sowohl Jakob[8]) als auch Johann Bernoulli[9]) mit demselben beschäftigt, während Maupertuis[10]) es in bemerkenswerter Weise verallgemeinerte. Die semikubische Parabel führt auch, als lösende des angeführten Problems der Mechanik betrachtet, den Namen isochrone Kurve oder auch Curva decensus aequabilis. — Auch bei der Theorie der Evoluten findet sich diese Kurve; wenn man nämlich den Ort der Krümmungsmittelpunkte der Parabel $y^2 = 2px$ sucht, so erhält man die Kurve $(x - p)^3 = \frac{27}{32}py^2$, die offenbar eine semikubische Parabel ist; dieser Umstand wurde von Huygens benutzt, um die Rektifizierbarkeit dieser

1) S. A. Christensen, *The first determination of the length of a curve* (*Bibl. math.* 1887).

2) S. d. Abh. *De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione* (Oeuvres de Fermat, I, S. 211—253, und III, S. 181—215).

3) Die Entdeckung Neils wurde 1659 von Wallis veröffentlicht. (Vgl. Wallis, *Opera math.* I, S. 550—54; aufserdem einen Brief von ihm an Huygens unter dem 9. Juni 1673 geschrieben und veröffentlicht im VII. Bd. der *Oeuvres de Huygens* S. 305—309).

4) S. die von Schooten im J. 1659 besorgte Ausgabe der *Geometria* von Descartes.

5) „Sic Rectificata Curva Nelii, et Curva Heuratii, et Curva demum Fermatii eadem est cum mea Paraboloide Semi-cubicali" schrieb Wallis an Leibniz unterm 6. April 1697 (*Leibniz* ed. Gerhardt, IV, S. 18).

6) *Nouvelles de la République des Lettres,* Oktober 1687 (*Leibniz* ed. Gerhardt Bd. IV, S. 237).

7) *Leibniz* ed. Gerhardt, V, S. 234—243.

8) *De inventione lineae descensus a corpore gravi percurrendae uniformiter* (Acta eruditorum 1690; *Jacobi Bernoulli opera,* I, S. 421—426).

9) S. die XXXIII. und XXXIV. der *Lectiones mathematicae* (*Joh. Bernoulli opera omnia* III, S. 482—486).

10) *La courbe de descensus aequabilis dans un milieu résistant comme une puissance quelconque* (Mém. de Paris 1730).

Kurve zu beweisen[1]). Man kennt auch eine Vorrichtung, sie auf mechanischem Wege zu zeichnen[2]).

II. In einem Manuskripte von Leibniz, datiert vom 11. Nov. 1675, betitelt *Methodi tangentium inversae exempla,* steht folgende Aufgabe: „Die Kurve zu finden, bei welcher der Axenabschnitt zwischen der Normale und Ordinate umgekehrt proportional der Ordinate selbst ist“[3]); diese führt auf folgende Differenzialgleichung: $y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{m^2}{y}$; schreibt man diese nun als $y^2 \cdot dy = m^2 \cdot dx$, so integriert man diese leicht und bekommt: $y^3 = 3m^2(x - x_0)$; demnach ist die Kurve nichts anderes als die kubische Parabel. Sie ist nicht rektifizierbar (vgl. den Schlufs von Nr. **117**), jedoch hat Johann Bernoulli entdeckt, dafs es auf ihr Paare von Bogen giebt, deren Differenz rektifizierbar ist[4]); wir werden dies in kurzem als die Folge eines allgemeineren Satzes nachweisen. Die Brennpunkte der kubischen (sowie der semikubischen) Parabel sind von A. Fuchs[5]) bestimmt worden. Die Kurve kann auch mechanisch gezeichnet werden[6]). Schliefslich ist zu bemerken, dafs Monge die fragliche Kurve benutzte, um jede Gleichung dritten Grades aufzulösen[7]).

III. In einem Briefe an Huygens vom 29. Okt. 1637[8]) lenkt F. Schooten die Aufmerksamkeit des grofsen holländischen Geometers auf eine Kurve, die durch die Gleichung

$$x + y = \sqrt[4]{ax^3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

dargestellt wird, und Huygens seinerseits teilte sie in einem folgenden Briefe vom 2. November[9]) R. de Sluse mit. Keiner der angeführten Geometer erkannte, dafs die in Rede stehende Kurve eine Parabel mit dem Index $\frac{3}{4}$ sei, bezogen auf zwei Axen, die mit einander den

1) *Opera varia* (Leiden 1724) S. 100.

2) Matthiesen, *Über die mechanische Construction einiger Curven, welche sich zur Auflösung des Problemes von der Duplication des Würfels verwenden lassen* (Arch. XLVIII, 1868).

3) Gerhardt, *Geschichte der Mathematik in Deutschland* (München, 1877) S. 147.

4) S. die wichtige Abhandlung *Theorema universale rectificationi linearum curvarum inserviens* (Acta erudit. October 1698; *Joh. Bernoulli opera* I, S. 249—253). Daselbst wird die kubische Parabel „parabola cubica primaria“ und die semikubische „parabola cubicalis secunda“ genannt.

5) *Untersuchungen der Brennpunktseigenschaften der höheren algebraischen Kurven, insbesondere der dritter und vierter Ordnung* (Diss., Marburg 1887).

6) Foucaut, *Construction mécanique de la parabole cubique* (Nouv. Ann. XVII, 1858).

7) *Solution graphique de l'équation du troisième degré* (Corr. sur l'École polyt., III, 1814—16).

8) *Oeuvres de Huygens*, II, S. 76.

9) Das. S. 80. Vgl. auch einen Brief von Hudde an Schooten vom 1. Dez. 1652 (Das. II, S. 97).

Winkel $\frac{\pi}{4}$ bilden; auch die Gestalt der Kurve blieb ihnen unbekannt: Huygens betrachtete nämlich nicht nur den Kurvenbogen OFG, der innerhalb des Winkels der positiven Axenrichtungen liegt, sondern fügte willkürlich einen Bogen $OF'G$ hinzu, der zum ersten symmetrisch in Bezug auf die x-Axe liegt, und erhielt infolgedessen, dafs der Schwerpunkt des von der Kurve begrenzten ebenen Teiles auf dieser Axe liegen müfste[1]). Der genannte Bogen OFG geht durch den Punkt G der x-Axe, der vom Anfangspunkte den Abstand a hat und durch den Punkt F, dessen Koordinaten $x = \frac{81}{256} a$ und $y = \frac{27}{256} a$ sind, und der ein Kulminationspunkt der Kurve ist. Diese erstreckt sich dann jenseits von O und G ins Unendliche vermittelst zweier Züge, die innerhalb des Winkels gelegen sind, der von der positiven x-Axe und der negativen y-Axe gebildet wird. Die durch den Bogen OFG und die x-Axe begrenzte Fläche wird gegeben durch

$$\int_{x=0}^{x=a} y \cdot dx = \int_{x=0}^{x=a} (-x + \sqrt[4]{ax^3})\, dx = \frac{a^2}{14},$$

infolgedessen, und weil er nun den Bogen $OF'G$ hinzugefügt hatte, glaubte Huygens sich zu der Annahme berechtigt, dafs die Fläche der Kurve durch $\frac{a^2}{7}$ ausgedrückt würde. — Die irrige Ansicht über die Gestalt der biquadratisch-kubischen Parabel von Schooten hatte also einen unglücklichen Einflufs auf die Lösung einiger metrischen Fragen, welche diese Kurve betreffen, jedoch keinen Einflufs auf die Bestimmung der Tangente; Huygens entdeckte nämlich eine Konstruktion derselben, die nicht nur bemerkenswert ist wegen ihrer Eleganz und Einfachheit, sondern auch, weil sie aus der Untersuchung des Punktes hervorgeht, in welchem die Tangente nicht die Koordinataxen, sondern eine besonders gewählte Gerade schneidet[2]). Betrachten wir nämlich die Tangente an die Kurve (6) im Punkte (x, y), so ist, wenn X, Y die laufenden Koordinaten derselben sind, ihre Gleichung

$$\frac{Y + x - \sqrt[4]{ax^3}}{X - x} = -1 + \frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{a}{x}};$$

setzen wir nun $X = -\frac{x}{3}$, so findet man $Y = +\frac{x}{3}$; dies zeigt, **dafs die Tangente an die biquadratisch-kubische Parabel (6) im Punkte mit der Abscisse x durch den Punkt mit den Koordinaten $\left(-\frac{x}{3}, \frac{x}{3}\right)$ geht**; es ist demnach nichts leichter, als diese zu konstruieren. —

1) Brief an Sluse vom 7. Dez. 1657 (*Oeuv. de Huygens,* II, S. 92).
2) *Oeuvres de Huygens*, Bd. II, S. 90 u. 93.

Wir können noch bemerken, dafs die Kurve folgender parametrischer Darstellung fähig ist:

$$x = \frac{a\lambda^4}{(1+\lambda)^4}, \qquad y = \frac{a\lambda^3}{(1+\lambda^4)};$$

aus welcher sich folgende Kollinearitätsbedingung für die drei Punkte $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ ergiebt:

$$\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta\gamma(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) + a\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) + 6\alpha^2\beta^2\gamma^2 = 0;$$

machen wir darin $\beta = \gamma$, so erkennt man, dafs durch jeden Punkt der Kurve vier Tangenten gezogen werden können; daher ist die Kurve selbst von der sechsten Klasse; sie besitzt keine andere Singularität als den im Anfang gelegenen dreifachen Punkt.

IV. Unzählige weitere bemerkenswerte Parabeln wurden vom Grafen von Fagnano entdeckt. Veranlafst durch einen auf die kubische Parabel bezüglichen und von Joh. Bernoulli (s. oben) entdeckten Satz, stellte er im Jahre 1714 (*Giornale de' letterati d'Italia*, XIX, S. 438) folgende Aufgabe: „Gegeben sei eine biquadratische Parabel erster Art (*primaria*), welche die Gleichung $x^4 = y$ hat, und ferner sei ein Teil derselben gegeben; verlangt wird, einen anderen Teil derselben Kurve anzugeben, so dafs die Differenz der angegebenen Teile rektifizierbar ist.“ Da niemand auf die gestellte Frage antwortete, so veröffentlichte Fagnano selbst die Lösung in der wichtigen Schrift: *Nuovo metodo per rettificare la differenza di archi (uno dei quali è dato) in infinite specie di parabole irretificabili*[1]), aus welcher wir hier wenigstens die Grundzüge wiedergeben müssen.

Man betrachte die Parabel mit der Gleichung:

$$y = \frac{2}{m+2} \frac{x^{\frac{m+2}{2}}}{a^{\frac{m}{2}}}, \qquad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

wo m eine rationale Zahl, und a eine gegebene Konstante ist. Bezeichnen wir mit t die Länge der Tangente im Punkte (x, y) vom Berührungspunkte bis zum Schnitt mit der x-Axe, und mit s die Länge des Kurvenbogens, so ist

$$t = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2} = \frac{2x}{m+2}\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^m},$$

$$s = \int dx\sqrt{1 + y'^2} = \int \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^m} \cdot dx;$$

1) *Giornale de' letterati d'Italia,* XXII, 1715; oder auch *Produzioni matematiche,* II. (Pesaro 1750) S. 317—330.

durch teilweise Integration ergiebt sich daraus

$$\frac{m+2}{2} s = x\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^m} + \frac{m}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^m}}$$

oder auch

$$\frac{m+2}{m}(s-t) = \int\frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^m}} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Nehmen wir das Integral auf der rechten Seite zwischen zwei bestimmten Grenzen, so ist seine Bedeutung folgende: Abgesehen von dem konstanten Faktor $\frac{m+2}{m}$ ist dieses gleich einem Bogen der Parabel (7), vermindert um die Differenz zwischen den Längen der Tangenten in seinen Endpunkten, wenn man, wie gewöhnlich, unter „Länge der Tangente" die Strecke zwischen dem Berührungspunkte und dem Schnitte mit der x-Axe versteht. Nehmen wir daher auf der Pararabel vier Punkte P_0, P_1, Q_0, Q_1, welche den Abscissen p_0, p_1, q_0, q_1 entsprechen und ziehen die Tangenten P_0R_0, P_1R_1, Q_0S_0, Q_1S_1, so können wir aus (8) die beiden folgenden Gleichungen ableiten:

$$\text{Bogen } P_0P_1 - (P_1R_1 - P_0R_0) = \frac{m}{m+2}\int_{p_0}^{p_1}\frac{dp}{\sqrt{1+\left(\frac{p}{a}\right)^m}};$$

$$\text{Bogen } Q_0Q_1 - (Q_1S_1 - Q_0S_0) = \frac{m}{n+2}\int_{q_0}^{q_1}\frac{dp}{\sqrt{1+\left(\frac{p}{a}\right)^m}}.$$

Kann man nun zwischen den p und q eine Beziehung aufstellen, derart, dafs das Integral in der ersten dieser Gleichungen identisch wird mit dem in der zweiten, so hat man

$$\text{Bogen } P_0P_1 - (P_1R_1 - P_0R_0) = \text{Bogen } Q_0Q_1 - (Q_1S_1 - Q_0S_0),$$

und die Bogen P_0P_1 und Q_0Q_1 haben dann eine rektifizierbare Differenz. Die Frage ist demnach auf die Integration folgender Differenzialgleichung zurückgeführt:

$$\frac{dp}{\sqrt{1+\left(\frac{p}{a}\right)^m}} + \frac{dq}{\sqrt{1+\left(\frac{q}{a}\right)^m}} = 0, \quad \ldots \quad (9)$$

worin die Wurzeln beliebige Vorzeichen haben. Fagnano hat die Integration in den Fällen $m = 4, 3, 6$ ausgeführt, indem er bezw. die Parabeln erhielt

$$y = \frac{x^3}{3a^2}, \quad y = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5a^{\frac{3}{2}}}, \quad y = \frac{x^4}{4a^3};$$

Das Auftreten der ersteren beweist den angeführten Satz von Joh. Bernoulli, während die dritte den Schlüssel zur Lösung des von Fagnano gestellten Problems liefert; die zweite ist eine Kurve fünfter Ordnung, die Bogen mit rektifizierbaren Differenzen enthält. Alle entsprechenden Kurven wird man erst dann kennen, wenn man alle die Fälle weiſs, in welchen die Differenzialgleichung (9) integrierbar ist[1]).

Drittes Kapitel.

Die Hyperbeln beliebiger Ordnung.

120. Wie man durch Verallgemeinerung der kanonischen Gleichung $y^2 = px$ der Parabel zum Begriffe der Parabeln höherer Ordnung kommt, so gelangt man durch Betrachtung der Gleichung $xy = a^2$ einer auf die Asymptoten bezogenen Hyperbel zu den Kurven, die durch eine Gleichung von folgendem Typus dargestellt werden:

$$x^n y^p = a^{n+p}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wo n, p positive ganze Zahlen sind. Sie heiſsen Hyperboloiden oder Hyperbeln höherer Ordnung[2]), rechtwinklige oder schiefwinklige, jenachdem die Axen senkrecht oder schief zueinander sind[3]), monosinguläre, wenn $p = 1$, bisinguläre, wenn $p = 2$ ist[4]). — Schreiben wir die Gleichung in der Form

$$y^{-\frac{p}{n}} = a^{-\frac{p}{n}-1} \cdot x,$$

so zeigt sich deutlich die Analogie mit der Gleichung (1) in Nr. **116**,

---

1) Den obigen Ausführungen fügen wir noch hinzu, daſs in einigen neueren Werken (Reuschle, *Praxis der Kurvendiscussion* I, Stuttgart 1886; Haas, *Kleyer's Lehrbuch der Differentialrechnung,* Stuttgart 1894) für einige Parabeln spezielle Namen eingeführt sind, die mit Rücksicht auf ihre Gestalt gewählt wurden; es sind folgende: Wendeparabel ($p^2 y = x^3$), Flachparabel ($p^3 y = x^4$), Spitzparabel ($py^3 = x^4$), Wendespitzparabel ($y^5 = p^2 x^3$) u. Wendeflachparabel ($p^4 y = x^5$).

2) Leibniz nannte sie gelegentlich Hyperboloeides (*Leibniz* ed. Gerhardt, V, Halle 1858, S. 90). Andere, wie der Marquis de l'Hôpital (*Analyse des infiniment petits,* 2. Aufl., Paris 1705, S. 14), Caraccioli (*De lineis curvis liber*, Pisis 1740, S. 37) und Maclaurin (*Traité d'Algèbre,* Paris 1753, S. 183) nannten Hyperbeln die Kurven $Ay^{m+n} = B(a+x)^m x^n$, von denen das folgende Kapitel handeln wird (s. auch *Encyclopédie méthodique* II, Paris 1885, S. 33; Montferrier, *Dictionnaire des Sciences mathématiques* II, S. 102, und Hoffmann, *Mathematisches Wörterbuch* III, Berlin 1861, S. 276).

3) Zu den Hyperbeln gehören auch die Kurven $y = x^{-1,41}$, $y = x^{-\frac{9}{8}}$, denen man in der mathematischen Physik unter dem Namen der adiabatischen Diagrammkurven begegnet (Holzmüller, *Die Ingenieur-Mathematik,* I. Teil, Leipzig 1897, S. 136), ebenso die Newton'sche Gravitationskurve mit der Gleichung $x = py^{-2}$ (Daselbst, II. Teil, Leipzig 1898, S. 15 ff.).

4) Reuschle, das o. a. Werk, S. 54—55.

und demnach kann man eine Hyperbel von der Ordnung $n+p$ als Parabel mit dem Index $-\frac{p}{n}$ betrachten. Aber auch, wenn wir die Gleichung (1) dieser Nr. in ihrer ursprünglichen Form beibehalten, erkennt man die Analogie mit Gleichung (2) in Nr. **116**, eine Analogie, die August Comte veranlafste, aus den Parabeln und Hyperbeln eine einzige Klasse zu bilden, deren Elemente er binomische Kurven (courbes binômes) nannte[1]).

Aus Gleichung (1) geht hervor, dafs die entsprechende Kurve im Unendlichen von Ox einen p-fachen und im Unendlichen von Oy einen n-fachen Punkt hat; sie kann daher durch zwei Büschel paralleler Strahlen, zwischen denen eine Korrespondenz (n, p) besteht, erzeugt werden. Im Endlichen besitzt sie keinen vielfachen Punkt; sie ist immer rational und folgender parametrischen Darstellung fähig:

$$x = a\lambda^p, \quad y = \frac{a}{\lambda^n} \cdot \qquad (2)$$

Als Tangentialgleichung der Kurve findet man folgende

$$\xi^n \eta^p = \frac{n^n p^p}{[(n+p)a]^{n+p}};$$

infolgedessen ist die Hyperbel zu sich selbst reziprok, und kann dahin gebracht werden, mit ihrer eigenen Polarreziproken in Bezug auf einen passend gewählten Kreis zusammenzufallen[2]). Es ist leicht zu beweisen, dafs die Evolute der Kurve (1) von der Ordnung $3(n+p)$ ist, und dafs durch jeden Punkt P der Ebene $2(n+p)$ Normalen gehen, deren Fufspunkte auf einem Kegelschnitte liegen, welcher durch P und den Anfang geht.

Die zu Anfang von Nr. **117** gemachte Rechnung beweist, **dafs bei der durch Gleichung (1) dargestellten Hyperbel das Verhältnis der Subtangente zur Abscisse durch $\frac{n+p}{n}$ ausgedrückt wird.** Daraus ergiebt sich eine sehr einfache Art die Tangente zu konstruieren[3]). Wir überlassen es dem Leser, die in Nr. **117** ausgeführte Flächenberechnung der Parabeln auf die der Hyperbeln anzuwenden und bemerken nur noch, dafs die Quadratur der Hyperbeln höherer Ordnung sich in einem Briefe von Fermat an Digby vom 20. April 1657 findet, der auch den Hauptinhalt anderer Briefe, von Fermat an Torricelli gegen Ende des Jahres 1646 gerichtet, wiedergiebt[4]); die Methode, mittelst derer der grofse französische Geometer jenes wichtige Resultat

---

1) *Traité élémentaire de géometrie analytique* (Paris 1843) S. 239.

2) Genocchi in Nouv. Ann. XIII, 1854, S. 132—36.

3) Vgl. auch die in Nr. 117 citierte Abh. von Sobotka.

4) *Oeuvres de Fermat,* II, S. 338. Vgl. auch einen Brief von Fermat an Digby (Das. S. 377), wo auch die von Wallis aufgestellten Prioritätsrechte auf Grund seiner *Arithmetica infinitorum* bezeugt werden.

erhielt, erfährt man aus der schon erwähnten Arbeit *De aequationum localium transmutatione et emendatione*[1]). Mit derselben Sache beschäftigte sich auch Wallis, wobei er auf offenbare Widersprüche stiefs, die zu beseitigen Varignon[2]) sowie der Graf von Fagnano[3]) mit Erfolg sich bemüht haben.

Setzen wir die Axen als rechtwinklig voraus, so ist das durch Rotation um die x-Axe des von einem Hyperbelbogen, seiner Projektion auf diese Axe und die zugehörigen Ordinaten begrenzten Vierseits erzeugte Volumen gegeben durch:

$$\pi \int_{x=x_0}^{x=X} y^2 \cdot dx = \pi \int_{x=x_0}^{x=X} a^{2\frac{n+p}{n}} x^{-\frac{2n}{p}} \cdot dx = \frac{\pi p a^{\frac{2(n+p)}{n}}}{p-2n} \left(X^{\frac{p-2n}{p}} - x_0^{\frac{p-2n}{p}} \right).$$

Im speziellen Falle der apollonischen Hyperbel ist $p = n = 1$, daher wird jener Wert $\pi a^4 \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{X} \right)$; setzen wir $X = \infty$, so finden wir $\frac{\pi a^4}{x_0}$, einen endlichen Wert, welches auch die Anfangsabscisse x_0 sei. Es ist dies eine bemerkenswerte Thatsache, die E. Torricelli entdeckt hat[4]). Sie ist einbegriffen in einem anderen allgemeinen Satz, der für alle Hyperbeln gilt, und der von Roberval entdeckt ist[5]). Setzt man nämlich $p - 2n < 0$ voraus, so erhält man aus dem vorigen allgemeinen Ausdruck für $X = \infty$

$$\frac{\pi p a^{\frac{2(n+p)}{n}}}{2n-p} \frac{1}{x_0^{\frac{2n-p}{p}}},$$

einen endlichen Wert für alle endlichen Werte von x_0. Wäre hingegen $n - 2p < 0$, so würde das durch Rotation der entsprechenden Hyperbel entstehende Volumen unendlich sein. Im Grenzfalle $p = 2n$ ist das durch Rotation der Hyperbel $xy^2 = a^3$ um $0y$ erzeugte Volumen endlich, während die Parabel $x^2y = a^3$ nur dann ein endliches Volumen erzeugt, wenn sie um $0x$ rotiert[6]).

1) *Oeuvres de Fermat,* I, S. 255 ff.; III, S. 216 ff.

2) *Réflexions sur les espaces plus qu'infinis de M. Wallis* (Mém. de Paris, Année MDCCVI).

3) *Riflessioni in occasione della quadratura degli spazi iperbolici* (Produzioni matematiche II, Pesaro 1750).

4) Torricelli teilte sie im J. 1643 dem P. Niceron mit und im folgenden Jahre dem Publikum in seinen *Opera geometrica.*

5) *Epistola Aegidii Personerii de Roberval ad Evangelistam Torricellium* (Mém. de Paris, VI, 1666—1699).

6) Die Notwendigkeit verschiedene Fälle derselben zu unterscheiden, auf die man gemäfs der Gröfse der Zahlen n und p trifft, scheint zuerst von Gregorio Fontana bemerkt zu sein im Art. III der *Ricerche analitiche sopra diversi soggetti* betitelten Abhandlung (Mem. della Soc. Ital. delle Scienze, III, 1786); daselbst werden die fraglichen Kurven iperboloidi genannt.

Das Bogendifferenzial der Hyperbel (1) wird gegeben durch

$$ds = \frac{1}{p} dx \sqrt{p^2 + n^2 a^{\frac{2(n+p)}{p}} x^{-\frac{2(n+p)}{p}}};$$

wird also ausgedrückt durch ein binomisches Differenzial; da nun die drei Zahlen $\frac{1}{2}$, $\frac{n}{2(n+p)}$, $-\frac{p}{2(n+p)}$ alle immer gebrochene Zahlen sind, so ist die Integration nicht und niemals in geschlossener Form ausführbar; **es existiert daher keine rektifizierbare Hyperbel.**

121. Die Hyperbel (1) ist vollständig bestimmt, wenn man aufser den ganzen Zahlen n und p die Konstante a kennt; statt a zu geben, kann man auch einen Punkt x_0, y_0 angeben, durch den sie geht; alsdann kann man (1) schreiben

$$\left(\frac{x_0}{x}\right)^n = \left(\frac{y}{y_0}\right)^p.$$

Wenn im besonderen $n = 1$, so haben wir eine Kurve, der wir schon in Nr. **118** begegneten als Parabel negativer Ordnung und deren Punktkonstruktion wir kennen lernten. In dem noch spezielleren Falle, dafs $n = 1$, $p = 2k$ und der Winkel der Axen ein rechter ist, kann die entsprechende Kurve punktweise durch ein Verfahren konstruiert werden, das Vincenz Viviani[1]) für $k = 1$ anwandte, d. h. zur Konstruktion der Kurve $xy^2 = a^3$, die von ihm iperbola mesolabica genannt wurde wegen der Anwendung, die er von ihr auf die Lösung des Delischen Problems machte. Dieses Verfahren besteht in Folgendem: Wir betrachten einen Halbkreis mit dem Durchmesser $AC = a$ (Taf. X, Fig. 67) und ziehen durch A eine beliebige Gerade, welche die Peripherie des Halbkreises in B und die ihn in C berührende Gerade in D schneidet. Es sei nun BG senkrecht zu AC, GB_1 senkrecht zu AD, B_1G_1 senkrecht zu AC, G_1B_2 senkrecht AD und so weiter. Endlich tragen wir auf der letzten so erhaltenen Geraden $B_{k-1}G_{k-1}$ die Strecke $GM = AD$ ab: der Ort des Punktes M ist die Hyperbel $xy^{2k} = a^{2k+1}$. Aus der angeführten Konstruktion ergeben sich nämlich, wenn wir den Winkel DAC φ nennen und x, y die Koordinaten des Punktes M, die folgenden Relationen:

$$y = AD = \frac{a}{\cos\varphi}$$

$$AB = a\cos\varphi, \qquad AG = a\cos^2\varphi,$$

$$AB_1 = a\cos^3\varphi, \qquad AG_1 = a\cos^4\varphi,$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$AB_{k-1} = a\cos^{2k-1}\varphi, \quad AG_{k-1} = x = a\cos^{2k}\varphi.$$

---

1) *Quinto libro di Euclide o Scienza universale delle proporzioni spiegata colla dottrina del Galileo* (Florenz 1647) S. 278—79.

Nach Elimination von φ aus der ersten und der letzten Gleichung ergiebt sich

$$xy^{2k} = a^{2k+1},$$

womit die Behauptung bewiesen ist. — Nebenher erkennt man aus den angeführten Relationen, dafs wenn man eine Kurve konstruiert derart, dafs die Koordinaten x, y eines ihrer erzeugenden Punkte P gleich AB_{k-1} und AD sind, man hat

$$x = a \cos^{2k-1}\varphi, \qquad y = \frac{a}{\cos\varphi},$$

woraus durch Elimination von φ sich ergiebt

$$xy^{2k-1} = a^{2k};$$

demnach ist der Ort der Punkte P eine Hyperbel gerader Ordnung.

Wir beschliefsen dieses Kapitel mit der Bemerkung, dafs die Hyperbeln für $p = 1$ Spezialfälle der hyperbolischen Kurven mit der Gleichung

$$y = \sum_r \frac{a_r}{x^r}$$

sind, und dafs die Parabeln und diese Hyperbeln besondere Fälle von Kurven sind, die durch eine Gleichung von folgendem Typus dargestellt werden

$$y = \frac{p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \cdots\cdots p_m}{q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \cdots\cdots q_n},$$

von denen Maclaurin wichtige Anwendungen machte[1]). Er bemerkte auch, dafs, wenn $n > m$, sie die x-Axe zur Asymptote haben, wovon man sich unschwer überzeugen kann; wenn dann $n > m + 1$, und man schreibt

$$x^{n-m}y = \frac{p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots\cdot p_m x^{n-m}}{q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \cdots\cdot q_n} = \frac{p_0 + \frac{p_1}{x} + \cdots + \frac{p_m}{x^m}}{q_0 + \frac{q_1}{x} + \cdots + \frac{q_n}{x^n}};$$

so sieht man, dafs für alle positiven Werte von x die Gröfse $x^{n-m}y$ kleiner ist als eine bestimmte endliche Konstante; infolgedessen ist nach einem bekannten Satze[2]) $\int_{x_0}^{\infty} y \cdot dx$ eine endliche Gröfse, daher ist die zwischen einer Ordinate, der Kurve, und der Abscissenaxe belegene Fläche von endlichem Werte. Es ist dieses eine weitere Eigentümlichkeit der fraglichen Kurven, die Maclaurin aufgefunden hat.

1) *Treatise on fluxions* (Edinburgh, 1742) § 327.

2) S. z. B. Serret-Harnack, *Differential- und Integral-Rechnung* II. (2. Aufl. Leipzig 1899) S. 83.

Viertes Kapitel.

Die Perlkurven.

122. Ein centraler Kegelschnitt, der durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gegeben ist (wo $\varepsilon = +1$, wenn es sich um eine Ellipse, $\varepsilon = -1$, wenn es sich um eine Hyperbel handelt), kann auch durch folgende Gleichung dargestellt werden, wenn man als Anfang einen Scheitel der Kurve nimmt:

$$x(2a \pm x) = \mp \varepsilon \frac{a^2}{b^2} y^2.$$

Wenden wir auf diese den Verallgemeinerungsprozeſs an, der uns zu den höheren Parabeln und Hyperbeln führte, so kommt man auf Kurven, die folgende allgemeine Gleichung haben:

$$x^s (a \pm x)^r = \frac{a^{r+s}}{b^p} y^p, \qquad \ldots \ldots \quad (1)$$

wo a und b zwei gegebene Strecken sind und p, r, s drei positive ganze Zahlen, die alle keinen gemeinsamen Faktor haben. Diese heiſsen Perlkurven; die Parabeln sind spezielle Perlkurven, wie man sieht, wenn man in Gleichung (1) $r = 0$ oder $s = 0$ setzt. Andere speziellere Kurven erhält man, indem man $r = 1$, $s = n$, $p = n$, $b = a$ setzt; dann wird Gleichung (1) zu

$$y^n = \frac{(a \pm x)x^n}{a} \qquad \ldots \ldots \quad (2)$$

und ist dann die allgemeine Gleichung der sogenannten Perlkurven von der $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung; wenn schlieſslich wieder $b = a$, aber $p = r + s$, und man das —Zeichen nimmt, so erhält man die Kurven

$$y^{r+s} = (a - x)^r x^s,$$

die man Kreise höherer Ordnung genannt hat[1]).

Einige spezielle Perlkurven erwähnt R. de Sluse in vier an Huygens gerichteten Briefen vom 14. Aug. 1657, 8. Jan., 19. Febr. und 12. April 1658[2]); in einem anderen Briefe von ihm an denselben (15. Juli 1659) wird das Wort „elliptoides“ angewandt, um die betreffenden Kurven zu bezeichnen mit der Anmerkung „perlas vocat Detonvillius“[3]); dies veranlaſst uns auf den Briefwechsel zwischen Sluse

---

1) Caraccioli, *De lineis curvis liber* (Pisis 1740) S. 51; *Encyclopédie méthodique* I. (Paris 1784) S. 336; Montferrier, *Dictionnaire des Sciences math.* I. (Bruxelles 1838) S. 316.

2) *Oeuvres de Huygens*, II, S. 46, 121, 134 u. 167.

3) Das. S. 458.

und Pascal hinzuweisen, deren Briefe vom 6. April und 29. Juni 1658 die hier behandelten Kurven betreffen. Es scheint daher, dafs, wenn der Begriff derselben eine Schöpfung Sluse's ist, der von uns angewendete Name von Pascal herrührt[1]).

Aus der Gleichung (1) geht hervor, dafs die durch sie dargestellte Perlkurve eine algebraische Kurve von der Ordnung gleich der gröfseren der beiden Zahlen $r+s$ und p ist; der Anfang ist ein Punkt von der Vielfachheit gleich der kleineren der Zahlen s und p, während der Punkt $x=\pm a$, $y=0$ eine Vielfachheit besitzt, die durch die kleinere der Zahlen r und p ausgedrückt wird. Wenn $r+s<p$, so sind alle unendlich fernen Punkte der Kurve in dem unendlich fernen von Ox vereinigt, wenn dagegen $r+s>p$, so vereinigen sie sich im unendlich fernen von Oy; wenn endlich $p=r+s$, so hat die Kurve die $r+s$ Punkte auf der unendlich fernen Geraden derartig liegen, dafs $\frac{x}{y}=\omega\frac{a}{b}$, wo ω eine $(r+s)^{\text{te}}$ Wurzel der Einheit bedeutet.

In dem oben citierten Briefe vom 12. April 1658 behauptet Sluse, dafs er im stande sei die Tangenten an alle Perlkurven zu konstruieren; aber welches die von ihm zu dem Zwecke formulierte „unica et brevis regula" gewesen, ist uns nicht bekannt. Jedenfalls ist es leicht, sich davon zu überzeugen, dafs er sich wohl nicht gerühmt habe, etwas erreicht zu haben, das er nicht im stande gewesen zu leisten. Beachten wir nämlich, dafs aus (1) folgt

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{p}\left[\frac{s}{x}\pm\frac{r}{a\pm x}\right];$$

daher wird die Subtangente gegeben durch

$$x-y\frac{dx}{dy}=x\frac{a(s-p)\pm(r+s-p)x}{as\pm(r+s)x},$$

welcher Ausdruck sich mit Zirkel und Lineal konstruieren läfst, welches auch die ganzen Zahlen p, r, s sein mögen; die Regel von de Sluse konnte nichts anderes sein, als ein spezieller Ausdruck dieser Konstruktion.

In demselben Briefe vom 16. April bekannte Sluse, dafs er nicht wüfste die Quadratur und die Schwerpunkte aller Perlkurven zu finden; es ist leicht einzusehen, dafs er hier auf eine Schwierigkeit stiefs, die erst die moderne Analysis völlig aufzuklären im stande ist. Man beachte nämlich, dafs die Gleichung (2) ergiebt:

$$\int y\cdot dx=ba^{-\frac{r+s}{p}}\int x^{\frac{s}{p}}(a+x)^{\frac{r}{p}}\cdot dx;$$

nun finden wir auf der rechten Seite ein binomisches Differenzial,

---

1) C. Le Paige, *Correspondance de F. R. de Sluse, publiée pour la première fois et précédée d'une introduction* (Bullettino di Bibl. e Storia etc. XVII, 1887) S. 494—98.

welches nur dann in geschlossener Form integrierbar ist, wenn eine der Gröfsen $\frac{r}{p}, \frac{s}{p}, \frac{r+s}{p}$ eine ganze Zahl ist.

Diese drei Umstände treten gleichzeitig ein, wenn $p = 1$. In diesem Falle hat man

$$\int y \cdot dx = \frac{b}{a^{r+s}} \int x^s (a \pm x)^r \cdot dx = \frac{b}{a^{r+s}} \int x^s \cdot dx \sum_{k=0}^{k=r} (\pm 1)^k \binom{r}{k} a^{r-k} x^k$$

$$= \frac{b}{a^{r+s}} \sum_{k=0}^{k=r} (\pm 1)^k \binom{r}{k} a^{r-k} \int x^{k+s} \cdot dx$$

$$= \frac{b}{a^{r+s}} \sum_{k=0}^{k=r} (\pm 1)^k \binom{r}{k} a^{r-k} \frac{x^{k+s+1}}{k+s+1}.$$

Integriert man zwischen $x = 0$ und $x = \mp a$, so findet man für die Fläche A folgenden Wert:

$$A = (\mp 1)^{s-1} ab \sum_{k=0}^{k=r} (-1)^k \binom{r}{k} \frac{1}{k+s+1}; \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

im speziellen für die Kurve

$$x(a-x)^r = b^r y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

findet man

$$A = \left(\frac{a}{b}\right)^r a^2 \sum_{k=0}^{k=r} (-1)^k \binom{r}{k} \frac{1}{k+2} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Nun beachte man, dafs für $x = \frac{a}{2}$ die Gl. (4) ergiebt $y = \frac{a}{2^{r+1}} \left(\frac{a}{b}\right)^r$ und dafs die Fläche T des Rechtecks, dessen Seiten a und dieser Wert von y sind, gegeben ist durch

$$T = \frac{a^2}{2^{r+1}} \left(\frac{a}{b}\right)^2;$$

infolgedessen ist

$$\frac{A}{T} = 2^{r+1} \sum_{k=0}^{k=r} (-1)^k \binom{r}{k} \frac{1}{k+2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

eine elegante Relation, die sich in einem Artikel befindet, der einem Briefe an Huygens vom 31. Jan. 1659 beigefügt ist, und betitelt ist *La Quadrature des Perles de Monsieur Sluse par Cl. Mylon. En Juin 1658*[1]. Beispielsweise liefert Gleichung (6): für $r = 2$, $\frac{A}{T} = \frac{2}{3}$; für $r = 3$, $\frac{A}{T} = \frac{4}{5}$ u. s. fort.

Einer analytischen Schwierigkeit von demselben Grade, wie sie die Quadratur der Perlkurven bietet, begegnet man auch bei der Kubatur der durch Rotation derselben um die x-Axe erzeugten Körper; man bekommt nämlich

$$V = \pi \int y^2 \cdot dx = \pi b^2 a^{-2\frac{r+s}{p}} \int x^{\frac{2s}{p}} (a \pm x)^{\frac{2r}{p}} \cdot dx.$$

1) *Oeuvres de Huygens*, II, S. 337.

Die Berechnung von V hängt daher von einem binomischen Differential ab, welches in geschlossener Form nur dann integrierbar ist, wenn eine der Gröfsen $\frac{2r}{p}$, $\frac{2s}{p}$, $\frac{2(r+s)}{p}$ eine ganze Zahl ist; dies tritt im speziellen auch hier wieder ein, wenn $p = 1$. — Ähnliche Verhältnisse wiederholen sich bei der Bestimmung der Schwerpunkte.

123. Die Perlkurven erfreuen sich nicht besonderer geometrischer Eigentümlichkeiten, sie besitzen daher vom wissenschaftlichen Standpunkte nur geringes Interesse. Jedoch die Seiten des gelehrten Briefwechsels von Huygens, die dieselben erwähnen, haben eine ziemliche, bis jetzt noch unbeachtete Bedeutung für den Historiker, der sich aus ihnen ein Bild der Cartesischen Geometrie, wie sie in ihrem ersten Entwickelungsstadium gewesen ist, rekonstruieren kann; es dürfte daher gerechtfertigt sein, wenn wir an dieser Stelle dabei verweilen, einiges über die speziellen Perlkurven, die auf jenen Briefseiten betrachtet werden, anzuführen.

Es ist Sluse's Brief vom 14. Aug. 1657, in welchem sich die erste Perlkurve[1]), nämlich die mit der Gleichung

$$x^2(a - x) = b^2 y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

findet. Daselbst wird die Bestimmung der Tangente und des Schwerpunktes vorgelegt, und die Kurve irrtümlicherweise als symmetrisch in Bezug auf Ox bezeichnet, wie man aus der Figur 68 ersieht; diese veranlafste wahrscheinlich den Namen Perlkurve; eine leichte Diskussion zeigt dagegen, dafs die Gestalt der Kurve durch Fig. 69 (Taf. X) wiedergegeben wird[2]). In der vom 3. Sept. 1657 datierten Antwort an Sluse[3]) zeichnet Huygens exakt den begrenzten Bogen OMA (Fig. 69) — in welchem auch der Wendepunkt mit der Abscisse $\frac{a}{3}$ markiert ist — aber er unterdrückt die unendlichen Zweige und fügt willkürlich den zu Ox symmetrischen Bogen hinzu. — Mit der ersten Perlkurve hat sich auch Fr. van Schooten beschäftigt[4]), indem er seine Betrachtungen auf den Bogen OMA beschränkte. Er fand, wenn man die zum Punkte mit der Abscisse x gehörende Subtangente mit d bezeichnet, dafs dann $d = \frac{2x^2 - ax}{2a - 3x}$, was leicht zu verifizieren ist; als Folgesatz

1) *Oeuvres de Huygens,* II, S. 47. Unabhängig von Sluse wurde die durch die Gleichung $x^3 + a^2 x = b^2 y$ dargestellte Kurve für Zwecke der Analysis vom Abte Caluso untersucht (*De la resolution des équations numeriques de tous les degrés,* Mém. de Turin, VI, 1792—1800); er schlug vor, ihr den auf ihre Gestalt bezüglichen Namen Anacampis zu geben.

2) Die Kurve berührt die x-Axe im Anfangspunkte, sie hat den unendlich fernen von Oy als Spitze mit der unendlich fernen Geraden als zugehöriger Tangente, sie ist demnach vom Geschlecht 0, von der Klasse 3.

3) *Oeuvres de Huygens,* II, S. 49; s. a. S. 116. Dieselbe Figur findet man in der *Inventio methodi ad tangentes linearum curvarum,* einem Anhange zu einem Briefe Huygens an J. de Witt (das. IV, S. 312 ff.).

4) Brief an Huygens vom 29. Okt. 1657 in *Oeuvres de H.* II, S. 73.

leitet er die Bestimmungsgleichung für die (drei) durch einen beliebigen Punkt der Ebene laufenden Tangenten an die Perlkurve ab. Der Wert für d zeigte Schooten, dafs die Tangente im Punkte mit der Abscisse $\frac{a}{2}$ durch den Anfangspunkt gehe, und dafs der Punkt M mit der Abscisse $\frac{2a}{3}$ ein Kulminationspunkt sei. Aus demselben Werte für d ergiebt sich:

$$2x^2 + (3d - a)x - 2ad = 0;$$

welche Gleichung, wenn d gegeben ist, die Abscissen derjenigen beiden Kurvenpunkte bestimmt, deren Tangenten durch den Punkt $(d, 0)$ gehen[1]. Die Diskriminante hat nun den Wert $(a + d)(a + 9d)$, ist also immer positiv, wenn $d > 0$ ist; demnach **gehen von jedem Punkte der positiven x-Axe zwei reelle Tangenten an diese Perlkurve.** Schooten bemerkte diese Eigentümlichkeit nur für das Stück OA. — Nicht weniger bemerkenswert sind die von Schooten für die Quadratur aufgestellten Sätze. Vor allem hat er bemerkt, dafs das Doppelte der Fläche $OFMAO$ gleich dem Rechteck ist, dessen Länge $OA = a$ und dessen Breite gleich $\frac{9}{8}$ der Maximal-Ordinate ist; diese beiden Flächen sind nämlich an Inhalt gleich $\frac{1}{12}\frac{a^4}{b^2}$. Ferner bemerkte er, dafs, wenn man die Geraden OF, FM zieht, diese mit den zugehörigen Bögen der Perlkurve zwei gleich grofse Flächen begrenzen, wovon man sich durch eine Integration leicht überzeugen kann.

Am Schlusse des oben erwähnten Briefes schlägt Fr. van Schooten die Untersuchung dreier neuen Kurven vor; die erste derselben hat folgende Gleichung
$$ax^2 = y^3 + 2ay^2 + a^2y;$$
setzen wir in dieser $x = -\eta$, $y = \xi - a$, so wird diese zu
$$a^2\eta = \xi^2(a - \xi); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (8)$$
demnach ist die betreffende Kurve ein Spezialfall der durch Gleichung (7) dargestellten. Dies hat Schooten nicht bemerkt — er glaubte, dafs die Kurve von parabolischer Form sei[2], während sie das in Taf. X, Fig. 70 gezeichnete Aussehen hat — auch Sluse und Huygens erkannten dies nicht[3] und gaben zwei Konstruktionen für die Tangente derselben an, die sich auf die Untersuchung derjenigen Punkte gründeten, in denen diese Gerade die Koordinataxen schneidet. Über die eleganten Formeln für die Quadratur dieser Kurve zu berichten sowie diese darzulegen, dazu gebricht es uns hier an Raum.

In dem o. a. Briefe vom 8. Jan. 1658 machte R. de Sluse die Bemerkung, dafs die Perlkurve (8) zu einer Serie von Kurven gehöre, deren erste Elemente folgende Gleichungen haben:

---

1) Man beachte, dafs, da die x-Axe Tangente ist, durch jeden ihrer Punkte zwei andere Tangenten der Perlkurve gehen.

2) *Oeuvres de Huygens* II, S. 76. 3) Das. S. 88, 89, 90 u. 93.

$$ay - y^2 = ax, \quad ay - y^2 = x^2, \quad ay^2 - y^3 = a^2x, \quad ay^2 - y^3 = ax^2,$$

und fügte hinzu, dafs man auch die analoge Serie betrachten könne,

$$ay + y^2 = ax, \quad ay + y^2 = x^2, \quad ay^2 + y^3 = a^2x, \quad ay^2 + y^3 = ax^2;$$

nun ist klar, dafs die Kurve $ay^2 + y^3 = a^2x$ eben nur das Spiegelbild in Bezug auf Ox zu der homologen in der ersten Serie ist, die von (8) nicht verschieden ist. Dies hat de Sluse nicht bemerkt, und daher hat er sich damit aufgehalten, direkt einige Eigenschaften derselben aufzufinden. Wir werden seinem Beispiele nicht folgen, sondern bemerken, dafs weiterhin in demselben Briefe die Rede ist von einer Perlkurve vierter Ordnung, nämlich von der durch folgende Gleichung dargestellten:

$$ay^3 - y^4 = a^2x^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Sie ist eine in Bezug auf Oy symmetrische Kurve, welche Gerade Tangente im Anfangspunkte ist, der eine Spitze ist; de Sluse betrachtete nur die im Winkel der positiven Koordinataxen gelegene Hälfte, indem er bemerkte, dafs die gröfste Abscisse der Ordinate $\frac{3a}{4}$ entspricht; die Punkte $x = \frac{\pm a}{4}$, $y = \frac{a}{2}$ sind Wendepunkte (s. Fig. 72). Über die Fläche der halben Perlkurve bemerkt de Sluse „hoc spatium si fuerit dimensum, scias, te circulum ipsum facile metiri posse"; in der That beträgt diese Fläche

$$F = \int_{y=0}^{y=a} x \cdot dy = \frac{1}{a}\int y\sqrt{ay - y^2} \cdot dy = \pi\left(\frac{a}{4}\right)^2,$$

ist demnach gleich einem Kreise mit dem Radius $\frac{a}{4}$. In demselben Briefe legt Sluse seinem berühmten Korrespondenten auch die Frage vor nach dem Verhältnis zwischen dem Volumen V, das durch Rotation dieser Fläche um Oy entsteht und dem Volumen U des Cylinders, dessen Grundfläche der Kreis mit dem Radius gleich der zur Ordinate $\frac{3}{4}a$ gehörenden Abscisse, und dessen Höhe a ist. Huygens antwortet unterm 22. Jan. 1658, dafs dieses Verhältnis gleich 64 : 135 sei, „nisi me calculus fallit"[2]). Da nämlich

$$V = \pi\int_{y=0}^{y=a} x^2 \cdot dy = \frac{\pi}{a^2}\int_{y=0}^{y=a}(ay^3 - y^4)dy = \frac{\pi a^3}{20}, \qquad U = \frac{27\pi a^3}{256}$$

ist, so ergiebt sich in der That $\frac{U}{V} = \frac{64}{135}$.

Von der vierten Ordnung ist ferner die Perlkurve, die die Gleichung hat

$$ay^3 - y^4 = x^4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

und von der de Sluse in dem Briefe an Huygens vom 19. Febr. 1658[3]) spricht. Von derselben sowie von der vorigen ist auch die Rede in

1) *Oeuvres de Huygens*, II, S. 121. 2) Das. S. 124. 3) Das. S. 134.

den Briefen, die zwischen den beiden genannten Geometern gewechselt wurden am 4., 12. und 14. März 1658[1]). Aus dem Inhalte derselben ergiebt sich eine bemerkenswerte Konstruktion der fraglichen Kurve. Schreibt man nämlich die Gleichung (10) folgendermafsen

$$y^2(ay - y^2) = x^4,$$

und betrachtet den Kreis mit der Gleichung $ay - y^2 = x_1^2$, so ergiebt sich $x = \sqrt{x_1 \cdot y}$; demnach ist x die mittlere Proportionale zwischen x_1 und y. Man nehme daher auf der y-Axe die Strecke $OA = a$, beschreibe über OA als Durchmesser einen Kreis, greife auf OA einen beliebigen Punkt M heraus (Taf. XI, Fig. 71) und ziehe die Sehne NN' parallel zu Ox durch M. Dann trage man auf Oy $ML = MN$ ab und beschreibe über dem Durchmesser OL einen Kreis; dieser schneidet die Gerade NN' in zwei Punkten PP' der Perlkurve. — Betrachten wir der Analogie folgend denselben Kreis $ay - y^2 = x_1^2$, so läfst sich Gleichung (9) schreiben $x_1 y = ax$. Beschreibt man daher wie vorhin den Kreis über OA als Durchmesser (Taf. XI, Fig. 72) und zieht eine beliebige, dazu senkrechte Sehne NMN', nimmt auf Oy $ML = a$, so wird die durch O zu LN gezogene Parallele die Sehne NN' in einem Punkte P der Perlkurve (9) schneiden. — Weitere Details über die speziellen Perlkurven finden sich in dem gelehrten Briefwechsel von Huygens.

Fünftes Kapitel.

Die Kurven von Lamé und die triangulär-symmetrischen Kurven.

124. Die Gleichungen

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1, \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1,$$

die bezüglich eine Gerade, eine Hyperbel, einen centrischen Kegelschnitt und eine Parabel darstellen, sind offenbar Spezialfälle von folgender Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

wo a und b beliebige Gröfsen und m eine rationale Zahl ist, den man den Index oder Exponenten nennen kann. Sie kommen (wie die Perlkurven $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordn.) in der Kategorie der trinomischen Kurven von A. Comte[2]) vor, und um allgemein betrachtet zu werden, zum ersten-

1) *Oeuvres de Huygens,* II, S. 144, 148 u. 150.

2) *Géométrie analytique* (Paris 1843) S. 249. — Dieser Name pafst auch auf die allgemeineren Kurven $\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1$, die Euzet in den Nouv. Ann. XIII, 1854, betrachtet hat.

mal bei G. Lamé[1]); sie werden, wenn die Koordinataxen rechtwinklig sind, gewöhnlich Kurven von Lamé genannt[2]). Sie spielen eine wichtige Rolle in der Theorie der verallgemeinerten Hyperbelfunktionen[3]); augenscheinlich können sie als eine Verallgemeinerung nicht nur der Kegelschnitte, sondern auch der Kreuzkurve, der Kohlenspitzkurve und der regulären Astroiden gelten. (Vgl. Nr. **97** und **104.**) — Wenn m eine gerade Zahl, so ist die Kurve (1) zu beiden Axen symmetrisch; ihre reellen Punkte liegen alle innerhalb des von den Geraden $x = \pm a$, $y = \pm b$ begrenzten Rechtecks, wenn m zugleich positiv ist; die Kurve schmiegt sich diesem Rechtecke um so enger an, je größer m ist. Ist m dagegen ungerade, so ist die Kurve nur in dem Falle $b = a$ symmetrisch, aber zur Halbierungslinie des Winkels der positiven Axen; ihre reellen Punkte liegen, wenn m positiv ist, alle innerhalb des von den Geraden $x + y = 0$ und $x + y = \frac{2a}{\sqrt[m]{2}}$ begrenzten Streifens. Als spezielle Beispiele führen wir die beiden Kurven

$$\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \left(\frac{y}{b}\right)^4 = 1 \quad \text{und} \quad x^5 + y^5 = a^5$$

an, deren Gestalt auf Taf. XI die Figuren 73 und 74 wiedergeben.

Setzt man übrigens $\frac{x}{a} = \frac{\xi}{k}$, $\frac{y}{b} = \frac{\eta}{k}$, so wird die Gl. (1) zu

$$\xi^m + \eta^m = k^m \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1')$$

Folglich kann jede Lamé'sche Kurve durch Projektion aus der analogen aber spezielleren Kurve (1') erhalten werden.

Was nun die durch Gleichung (1) dargestellten Kurven angeht, so hat Lamé a. a. O. einen bemerkenswerten Satz bewiesen, der ferner von Magnus[4]) dargethan und von Gilbert[5]) von neuem aufgefunden wurde. Um diesen kennen zu lernen, betrachten wir die ∞^1 Kurven, die durch folgende Gleichung dargestellt werden

---

1) *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de geometrie* (Paris 1818) S. 105 ff. — Auf eine spezielle Lamé'sche Kurve, nämlich die mit der Gleichung $x^3 + y^3 = c^3$, wandte Barrow seine Tangentenmethode an; s. die *Lectiones geometricae*, zuerst herausgeg. London 1670 und reproduziert in *The math. Works of Is. Barrow ed. Whewell* (Cambridge 1860).

2) Ausnahme von dieser Regel macht der Abt Aoust, der den Namen Strophoiden gebraucht (*Analyse infinitésimale des courbes planes,* Paris 1873, S. 58) und der Lord Mc. Laren, der sie Zweifache Ovale nannte (*Equation of the glisette of the twofold oval* $\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^n}{b^n} = 1$. Proc. of the Edinburgh Roy. Soc., XVIII, 1890).

3) S. Kap. VIII des Werkes von S. Günther, *Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen* (Halle 1881).

4) *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie* (Berlin 1833) S. 586.

5) *Sur les courbes planes à équations trinomes* (Nouv. Ann. 2e Serie, IX, 1870).

$$\left(\frac{x}{\xi}\right)^m + \left(\frac{y}{\eta}\right)^m = 1, \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

und wo die Gröfsen ξ, η durch die Relation verknüpft sind:

$$\left(\frac{\xi}{a}\right)^p + \left(\frac{\eta}{b}\right)^p = 1; \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

es wird behauptet, dafs deren Enveloppe eine Lamé'sche Kurve von der Art (1) ist mit dem Index $\frac{mp}{m+p}$. In der That, wenden wir die Methode der unbestimmten Multiplikatoren an, so erkennt man, dafs die Gleichung der fraglichen Enveloppe durch Elimination von ξ, η, aus Gleichung (2) vermittelst folgender Relationen entsteht

$$\xi^{m+p} = a^p x^m, \qquad \eta^{m+p} = b^p y^m;$$

sie ist daher

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mp}{m+p}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{mp}{m+p}} = 1;$$

diese Gleichung beweist durch ihre Form den ausgesprochenen Satz.

Ein anderer bemerkenswerter Satz bezieht sich auf die Krümmung der Lamé'schen Kurven[1]). Man kann ihn in folgender Weise erhalten: aus der Gleichung (1) ergiebt sich

$$-\left(\frac{b}{a}\right)^m = \left(\frac{y}{x}\right)^{m-1} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

oder auch

$$-\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \frac{dy}{dx} = \left(\frac{x}{y}\right)^{m-1};$$

differenzieren wir diese nach x, so folgt

$$-\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = (m-1)\left(\frac{x}{y}\right)^{m-2}\left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx}\right),$$

welche Gleichung mit (4) multipliziert ergiebt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (m-1)\frac{1}{xy}\frac{dy}{dx}\left(y - x\frac{dy}{dx}\right). \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Dieser Ausdruck zeigt, dafs der Krümmungsradius R_m der Kurve (1) im Punkte $P(x, y)$ durch folgende Formel gegeben ist:

$$R_m = \frac{xy\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{(m-1)\frac{dy}{dx}\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)}. \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

1) G. Fouret, *Construction du rayon de courbure de certaines classes de courbes, notamment des courbes de Lamé et des paraboles et hyperboles des divers ordres* (C. R. CX, 1890); R. Godefroy, *Sur les rayons de courbure de certaines courbes et surfaces, en particulier de courbes et surfaces de Lamé* (Journ. de l'Ec. polyt. Heft LXII, 1892).

Führt man noch den Bogen s als unabhängige Variabele ein, so läfst sich daraus ableiten

$$\frac{4}{(m-1)R_m} = xy\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \\ x & y \end{vmatrix}.$$ [1])

Betrachten wir nun den so entstandenen Ausdruck für $(m-1)R_m$, so sehen wir, dafs dieser weder von a und b, noch auch von m abhängt, sondern nur von den Koordinaten x, y des betrachteten Punktes und von der Richtung der Geraden, die daselbst die Kurve berührt; mit anderen Worten — benutzen wir die von S. Lie eingeführte Nomenklatur[2]) — es ist $(m-1)R_m$ eine Funktion nur von den Linienelementen der Kurve, die ihren Sitz im Punkte P haben. Daraus folgt, wenn wir eine andere Lamé'sche Kurve vom Typus (1) betrachten z. B. folgende

$$\left(\frac{x}{a'}\right)^{m'} + \left(\frac{y}{b'}\right)^{m'} = 1,$$

und wir nehmen an, dafs sie die vorige im Punkte P berühre, dafs der Wert der Funktion $(m'-1)R_{m'}$ derselbe sein wird, wie der der Funktion $(m-1)R_m$. Daraus folgt

$$(m-1)R_m = (m'-1)R_{m'}, \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{R_m} : \frac{1}{R_{m'}} = \frac{m-1}{m'-1}, \quad . \quad (7)$$

welche Beziehung folgender Satz ausdrückt: **Wenn zwei auf dieselben Axen bezogene Lamé'schen Kurven mit den Indices m und m' sich in einem Punkte berühren, so wird das Verhältnis der Krümmungen in diesem Punkte durch $\frac{m-1}{m'-1}$ ausgedrückt.** Wenn man daher den Krümmungsradius in einem Punkte der unendlich vielen sich daselbst berührenden Lamé'schen Kurven konstruieren kann, so ergeben sich daraus dieselben für alle die anderen. Nehmen wir z. B. $m'=2$, so erhält man $R_m = \frac{1}{m-1}R_2$, somit ist die Bestimmung von R_m zurückgeführt auf die Konstruktion des Krümmungsradius in einem Punkte P eines Kegelschnittes, der unzweideutig durch die Lage seiner Axen, durch den Punkt P und die zugehörige Tangente bestimmt ist. Ähnliche Reduktionen ergeben sich, wenn man $m'=-1$ oder $m'=\frac{1}{2}$ setzt.

Mit Benutzung Euler'scher Integrale gelangt man zu einer eleganten Formel für die Quadratur der Lamé'schen Kurven. Beachten wir nämlich, dafs die Kurve (1) folgender parametrischer Darstellung fähig ist

$$x = a\cos^{\frac{2}{m}}\lambda, \qquad y = b\sin^{\frac{2}{m}}\lambda,$$

1) Bezügl. einer anderen Form, die man diesem Ausdrucke geben kann, s. R. Godefroy, *Théorèmes sur les rayons de courbure d'une classe de courbes géométriques* (Nouv. Ann. 3. Ser. V, 1886).

2) Man s. z. B. Lie-Scheffer, *Geometrie der Berührungstransformationen* I. (Leipzig 1896) S. 11.

so ist, wenn wir mit A die Gesamtfläche der Kurve bezeichnen

$$\frac{1}{4}A = \int_{\lambda=\frac{\pi}{2}}^{\lambda=0} y \cdot dx = \frac{ab}{m}\int_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{m}+1}\lambda \cdot \cos^{\frac{2}{m}+1}\lambda \cdot d\lambda;$$

nun ist im allgemeinen (vgl. Nr. **170**)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\mu-1}\lambda \cdot \sin^{\nu-1}\lambda \cdot d\lambda = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)}$$

und daher

$$\frac{1}{4}A = \frac{ab}{m}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{m}+1\right)},$$

und weil $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$, so folgt schliefslich

$$A = \frac{2ab}{m}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

und dieses ist die angedeutete Formel[1]).

125. Man projiziere eine Lamé'sche Kurve derart, dafs der unendlich fernen Geraden eine solche in endlicher Entfernung entspricht; es entsteht dann eine neue, trinomische Kurve, die in homogenen Koordinaten durch eine Gleichung von folgendem Typus dargestellt werden kann:

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^m + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^m + \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^m = 0. \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Alle Kurven, die einer solchen analytischen Darstellung fähig sind, heifsen nach De la Gournerie triangulär symmetrische Kurven[2]); m ist ihr Exponent, und das Dreieck, worauf sie bezogen sind, das Fundamentaldreieck. Im speziellen, wenn $m = 1$, so hat man eine Gerade, wenn $m = -1$, einen dem Fundamentaldreieck umbeschriebenen Kegelschnitt; wenn $m = \frac{1}{2}$, einen demselben Dreiecke einbeschriebenen Kegelschnitt; wenn $m = 2$, einen Kegelschnitt, in Be-

1) Für den speziellen Fall, dafs m eine Paarzahl, siehe die Abhandlung von S. Spitzer, *Bestimmung der Flächeninhalte jener Kurven, die durch die Gleichung* $\left(\frac{x}{a}\right)^{2m} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2m} = 1$, *und des Körperinhalts jener Flächen, die durch die Gleichung* $\left(\frac{x}{a}\right)^{2m} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2m} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2m} = 1$ *gegeben sind, worin m eine ganze Zahl bezeichnet* (Archiv LXI, 1877); ferner, für den Fall $a = b$, Cesàro, *Elementi di calcolo infinitesimale* (Neapel, 1899) S. 324.

2) J. de la Gournerie, *Recherches sur les surfaces reglées tetraédrales symétriques* (Paris 1867) S. 196 ff.

zug auf den dieses Dreieck ein zu sich selbst polares (autopolares) ist, u. s. w.

Es ist nun leicht einzusehen: **Wenn man auf eine triangulär-symmetrische Kurve eine beliebige projektive Transformation anwendet, so erhält man eine andere triangulär-symmetrische Kurve mit demselben Exponenten, die zum Fundamentaldreieck das transformierte des ursprünglichen Fundamentaldreiecks hat.** Etwas ähnliches ergiebt sich bei gewissen reziproken Transformationen, mit denen wir uns nun beschäftigen wollen.

Betrachten wir den Kegelschnitt

$$k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

und beachten, dafs die Koordinaten der Tangente im Punkte (x_1, x_2, x_3) an die Kurve (9) gegeben werden durch

$$r\xi_i = \frac{x_i^{m-1}}{a_i^m} \cdots (i = 1, 2, 3), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

wo r ein Proportionalitätsfaktor ist, so hat der Pol dieser Tangente in Bezug auf den Kegelschnitt (10) die Koordinaten X_1, X_2, X_3, die durch folgende Gleichung bestimmt werden

$$\varrho X_i = \frac{x_i^{m-1}}{k_i a_i^m} \cdots (i = 1, 2, 3), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

wo ϱ wieder ein Proportionalitätsfaktor ist. Eliminieren wir die x aus (9) und (12), so erhalten wir die Gleichung der Polarreziproken der triangulären Kurve (9) in Bezug auf den Kegelschnitt (10); es ist folgende

$$(k_1 a_1 X_1)^{\frac{m}{m-1}} + (k_2 a_2 X_2)^{\frac{m}{m-1}} + (k_3 a_3 X_3)^{\frac{m}{m-1}} = 0. \quad . \quad . \quad (13)$$

Sie gehört einer triangulären Kurve an mit dem Exponenten $\mu = \frac{m}{m-1}$ und hat dasselbe Fundamentaldreieck wie (9); also: **Die Polarreziproke einer triangulär-symmetrischen Kurve mit dem Exponenten m in Bezug auf einen Kegelschnitt, für welchen das Fundamentaldreieck autopolar ist, erweist sich als eine ebensolche Kurve mit dem Exponenten $\mu = \frac{m}{m-1}$.** Wir bemerken zweierlei: Erstens, dafs die Relation zwischen m und μ in folgender symmetrischer Form geschrieben werden kann $\frac{1}{m} + \frac{1}{\mu} = 1$. Zweitens, dafs jede triangulär-symmetrische Kurve mit dem Exponenten μ, wie z. B. folgende

$$\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^\mu + \left(\frac{x_2}{\alpha_2}\right)^\mu + \left(\frac{x_3}{\alpha_3}\right)^\mu = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

durch Polarisierung von (9) in Bezug auf einen passend gewählten Kegelschnitt erhalten werden kann; in der That koinzidieren die Gleichungen (13) und (14), wenn die k_1, k_2, k_3 folgender Bedingung genügen

$$k_1 a_1 \alpha_1 = k_2 a_2 \alpha_2 = k_3 a_3 \alpha_3.$$

Die vorigen Formeln führen noch zu weiteren Folgerungen. Wenn man die x aus den Gleichungen (9) und (11) eliminiert, so findet man

$$(a_1 \xi_1)^{\frac{m}{m-1}} + (a_2 \xi_2)^{\frac{m}{m-1}} + (a_3 \xi_3)^{\frac{m}{m-1}} = 0; \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

dies ist die Tangentialgleichung der Kurve (9) und es ist bemerkenswert, daſs sie dieselbe Gestalt hat wie Gleichung (9), nur der Exponent m ist zu μ geworden; diese Zahl kann daher der Tangential-, Index- oder Exponent der betrachteten Kurve genannt werden.

Man erkennt alsbald, **daſs die Polarkurven jeder Ordnung r eines beliebigen Punktes der Ebene in Bezug auf eine trianguläre Kurve mit dem Exponenten m eine analoge Kurve mit dem Exponenten $(m-r)$ ist, die dasselbe Fundamentaldreieck hat.** Betrachten wir insbesondere die beiden Kurven

$$\left(\frac{x_1}{l_1}\right)^p + \left(\frac{x_2}{l_2}\right)^p + \left(\frac{x_3}{l_3}\right)^p = 0, \quad \left(\frac{x_1}{m_1}\right)^q + \left(\frac{x_2}{m_2}\right)^q + \left(\frac{x_3}{m_3}\right)^q = 0; \ . \quad (16)$$

die letzte Polare eines Punktes der ersteren in Bezug auf die zweite hat zur Gleichung

$$\frac{x_1^{q-1} X_1}{m_1^q} + \frac{x_2^{q-1} X_2}{m_2^q} + \frac{x_3^{q-1} X_3}{m_3^q} = 0;$$

daher sind seine Koordinaten $x_1 x_2 x_3$ gegeben durch die Formeln

$$r \xi_i = \frac{x_i^{q-1}}{m_i^q} \quad . \quad . \quad . \quad (i = 1, 2, 3);$$

eliminiert man mit Hilfe dieser Gleichungen die x aus der ersten Gleichung (16), so findet man

$$\left(\frac{m_1^{\frac{q}{q-1}}}{l_1}\right)^p \xi_1^{\frac{p}{q-1}} + \left(\frac{m_2^{\frac{q}{q-1}}}{l_2}\right)^p \xi_2^{\frac{p}{q-1}} + \left(\frac{m_3^{\frac{q}{q-1}}}{l_3}\right)^p \xi_3^{\frac{p}{q-1}} = 0.$$

Dies beweist, daſs, **wenn zwei trianguläre Kurven mit den Exponenten p und q gegeben sind, bezogen auf dasselbe Dreieck, so ist die Enveloppe der letzten Polaren der Punkte der ersteren in Bezug auf die zweite eine Kurve derselben Art mit dem Tangentialexponenten $\frac{p}{q-1}$.** Der andere Exponent ist somit $\frac{p}{p-q+1}$. Es möge bemerkt werden, daſs dieser Satz für $q = 2$ mit einem schon früher aufgestellten übereinstimmt; ferner, daſs die Exponenten der resultierenden Kurven sich nicht ändern, wenn man die Rollen der Kurven (16) vertauscht, falls $p = q$ oder $p + q = 1$.

126. Man setze

$$\varrho x_i' = x_i^m, \quad (i = 1, 2, 3); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

man gelangt dann zu einer Korrespondenz zwischen den Punkten $P(x_1, x_2, x_3)$ einer Ebene Π und der Punkten $P'(x_1', x_2', x_3')$ einer

zweiten Ebene Π'. Nun wird infolge von (17) die Gleichung (9) zu

$$\frac{x_1'}{a_1^m} + \frac{x_2'}{a_2^m} + \frac{x_3'}{a_3^m} = 0,$$

welches eine Gerade darstellt. Folglich: **Die triangulär-symmetrischen Kurven sind solche Kurven, die in der Ebene Π den Geraden der Ebene Π' entsprechen bei einer geometrischen Transformation, die durch die Gleichungen (17) bestimmt ist.** Von diesem Gesichtspunkte aus wurden die triangulär-symmetrischen Kurven neuerdings von E. Timerding untersucht, der, weil er sie für neue Kurven hielt, sie mit dem neuen Namen courbes-puissances belegte[1]).

Die Untersuchung der Krümmung der triangulär-symmetrischen Kurven liefert einen wichtigen neuen Satz, den wir aus dem in Nr. **124** bewiesenen in folgender Weise ableiten können. Wir betrachten zwei Lamé'sche Kurven Γ_m und Γ_n in einer Ebene π mit den Indices m und n, die sich einander im Punkte P berühren. Wir projizieren sie auf eine Ebene π', die nicht zu π parallel ist. Dann erhalten wir zwei trianguläre Kurven Γ_m' und Γ_n', die sich einander in P', der Projektion von P, berühren. Nennen wir nun die Krümmungsradien von Γ_m und Γ_n in P bezw. R_m und R_n, sowie die von Γ_m' und Γ_n' in P' bezw. R_m' und R_n'. Zufolge des früher angeführten Satzes haben wir dann $\frac{R_m}{R_n} = \frac{n-1}{m-1}$. Nun ist bekannt[2]), dafs, wenn zwei Kurven sich in einem Punkte berühren, sich das Verhältnis ihrer Krümmungen in diesem Punkte durch irgend welche projektive Transformation nicht ändert. Demnach ist $\frac{R_m'}{R_n'} = \frac{R_m}{R_n}$. Diese Beziehung mit der vorigen kombiniert ergiebt

$$\frac{R_m'}{R_n'} = \frac{n-1}{m-1},$$

welche Gleichung folgenden Satz von Jamet ausdrückt: **Wenn zwei triangulär-symmetrische Kurven mit den Exponenten m und n das Fundamentaldreieck gemeinsam haben und sich in einem Punkte berühren, so ist das Verhältnis der Krümmungen in diesem Punkte $\frac{m-1}{n-1}$.** Setzen wir im speziellen $n = -1$: **Der Krümmungsradius einer triangulär-symmetrischen Kurve mit dem Exponenten m steht in dem Verhältnis $\frac{2}{1-m}$ zum Krümmungsradius in P desjenigen**

1) S. den Artikel *Sur une certaine famille de courbes algébriques* (Nouv. Ann. 3. Série, XVII, 1898).

2) Mehmke, *Über zwei die Krümmung von Curven und das Gaufs'sche Krümmungsmafs von Flächen betreffende Eigenschaften der linearen Punkttransformationen* (Zeitschr. f. Math. XXXVI, 1891); Wölffing, *Das Verhältnis der Krümmungsradien im Berührungspunkte zweier Kurven* (Das. XXXVIII, 1893).

dem Fundamentaldreieck umbeschriebenen Kegelschnittes, der die Kurve in P berührt[1]). Demnach ist die Konstruktion des Krümmungsradius in einem beliebigen Punkte irgend einer triangulären Kurve zurückgeführt auf die Konstruktion des Krümmungskreises in P des Kegelschnittes, der durch die vier Punkte P, A_1, A_2, A_3 und die Tangente in P bestimmt ist[2]).

127. Der in der Gleichung (9) auftretende Exponent m ist der Annahme gemäfs eine rationale positive oder negative Zahl; den absoluten Wert desselben, soweit als möglich abgekürzt, wollen wir mit $\frac{p}{q}$ bezeichnen. Dann sehen wir, wenn wir die Gleichung (9) rational machen, dafs, wenn $m = \frac{p}{q}$ ist, die entsprechende Kurve von der Ordnung pq ist; wenn dagegen $m = -\frac{p}{q}$, so ist ihre Ordnung $2pq$. Im ersten Falle geht die Kurve nicht durch die Ecken des Fundamentaldreiecks; im zweiten Falle dagegen hat sie in jeder Ecke des Fundamentaldreiecks die Vielfachheit pq; die entsprechenden Tangenten reduzieren auf nur p verschiedene Geraden. In diesem Falle schneidet die Kurve die Seiten des Fundamentaldreiecks nur in den Ecken. Wenn aber m positiv ist, so bilden die $p \cdot q$ Schnittpunkte mit einer beliebigen Seite des Fundamentaldreiecks p Gruppen von je q zusammenfallenden Punkten.

Da, wie wir (Nr. **125**) gesehen haben, die Tangentialgleichung einer triangulären Kurve von derselben Form wie die Punktgleichung ist, so entsprechen jenen Eigenschaften, zu denen uns obige Diskussion der Gleichung (9) führte, ebenso viele andere infolge der Dualität: verweilen wir einen Augenblick bei der Besprechung derjenigen, welche sich auf die Klasse der untersuchten Kurve beziehen. Im allgemeinen wird der Tangentialexponent der Kurve (9) durch $\mu = \frac{m}{m-1}$ gegeben. Wenn nun $m = \frac{p}{q}$, so ist $\mu = \frac{p}{p-q}$; daher, wenn $p > q$, so ist die Klasse $p(p-q)$; wenn aber $p < q$, ist die Klasse $2(q-p)$; ist hingegen $m = -\frac{p}{q}$, so ist $\mu = \frac{p}{p+q}$, und die Klasse der Kurve ist immer $= p(p+q)$. Dieses verschiedene Verhalten hat La Gournerie veranlafst, die triangulären Kurven in drei Arten einzuteilen:

---

1) Jamet, *Sur les courbes et les surfaces tetraédrales symétriques* (Ann. de l'Ec. norm. sup. 3. Ser. IV, 1887, Supplément). Vgl. auch F. Machovec, *Über die Krümmungsmittelpunkte der Dreieckskurven* (*courbes triangulaires*) (Prager Ber. 1891); Cesàro, *Lezioni di geometria intrinseca* (Neapel 1896) S. 101.

2) Diese Aufgabe, gelöst von Chasles und dann von Mannheim, wurde neuerdings von G. Fouret untersucht in dem Aufsatze *Construction du rayon de courbure des courbes triangulaires symétriques, de courbes planes anharmoniques et des lignes asymptotiques de la surface de Steiner* (C. R. CX, 1890).

in die erste rechnete er diejenigen, bei denen der Exponent m gröfser als 1, in die zweite, bei denen er zwischen 0 und 1 liegt und in die dritte die mit negativem Exponenten. Jede Spezies wird wieder eingeteilt in drei Arten, jenachdem von den Zahlen p und q nur die eine oder beide Zahlen ungerade sind. Die speziellen Eigenschaften jeder der neun resultierenden Arten sind von dem oben erwähnten französischen Geometer weitläufig untersucht worden, und wir verweisen den Leser, der weitere Auskunft wünscht, auf dessen Arbeit. Daselbst ist jedoch nicht von dem Geschlechte jener Kurven die Rede: die darauf bezüglichen Fragen sind aber in der Note von Jamet untersucht, *Sur le genre des courbes planes triangulaires* (Bull. de la Soc. math. de France, XVI, 1888).

Wir beschliefsen dieses Kapitel mit dem Hinweise auf einen Grenzfall der triangulären Kurven[1]. Schreiben wir Gleichung (9) in folgender Weise

$$c_1 x_1^m + c_2 x_2^m + c_3 x_3^m = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

und nehmen an, dafs

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Nun suchen wir den Grenzwert, den Gleichung (18) erreicht, wenn m sich dem Werte 0 nähert. Beachten wir nun, dafs, wenn c eine endliche Konstante bedeutet

$$\lim_{m=0} (m \cdot c) = 0,$$

so ist der gesuchte Grenzwert

$$\lim_{m=0} (c_1 x_1^m + c_2 x_2^m + c_3 x_3^m) = \lim (mc)$$

oder auch

$$\sum_{k=1}^{k=3} c_k \lim \frac{x_k^m - 1}{m} = c.$$

Es ist aber

$$\lim_{m=0} \frac{x_k^m - 1}{m} = \log x_k$$

und daher

$$\sum_{k=1}^{k=3} c_k \log x_k = c,$$

oder, wenn wir $e^c = C$ setzen,

$$x_1^{c_1} x_2^{c_2} x_3^{c_3} = C.$$

Dies ist die gesuchte Gleichung; infolge von (19) kann sie geschrieben werden

$$\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{c_1} \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^{c_2} = C;$$

oder, wenn wir $\frac{x_1}{x_3} = x$, $\frac{x_2}{x_3} = y$ setzen

$$x^{c_1} \cdot y^{c_2} = C. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

---

1) Cesàro, die o. a. *Lezioni,* S. 103.

Wenn die Seite $x_3 = 0$ ins Unendliche verlegt ist, so stellt diese Gleichung, wenn c_1 und c_2 rationale Zahlen sind, eine Parabel oder Hyperbel höherer Ordnung dar. Wenn aber c_1 und c_2 irrational sind, so erhält man Kurven, die nicht mehr algebraisch sind, die man interscendente binomische Kurven nennen kann. Wir werden ihnen von einem andern Gesichtspunkte aus im folgenden Abschnitte (Kap. 19) wieder begegnen, wollen jedoch hier bemerken, dafs der Satz von Jamet auf die hier betrachteten Kurven angewendet zu folgendem Schlusse führt: **Der Krümmungsradius in einem Punkte P einer binomischen, algebraischen oder interscendenten Kurve ist doppelt so grofs, als der Radius desjenigen Kreises, der den dem Fundamentaldreieck umbeschriebenen und jene Kurve in P berührenden Kegelschnitt in P oskuliert.** Diesen Satz teilte Jamet schon im Jahre 1875 der Société mathématique de France mit.

Sechstes Kapitel.

Die Polyzomalkurven.

128. Den Namen „polyzomal curves" (abgeleitet von τὸ ζῶμα, der Gürtel) hat Cayley[1]) allen denjenigen Kurven gegeben, die durch eine Gleichung von folgender Form dargestellt werden

$$\sum_{i=1}^{i=\nu} \sqrt{U_i} = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

wo die Wurzeln beliebiges Vorzeichen haben und die U ternäre Formen ν^{ten} Grades in projektiven Koordinaten eines Punktes sind[2]). Man setzt immer voraus, dafs $\nu > 2$, da in den Fällen $\nu = 1$ und $\nu = 2$ die Gleichung (1) zu $U_1 = 0$ und $U_1 - U_2 = 0$ wird, deren Untersuchung keine Verschiedenheit bietet von der einer allgemeinen Kurve ν^{ten} Grades; man setzt ferner voraus, dafs zwei beliebige der U keinen quadratischen Quotienten haben. Unter den somit allgemein betrachteten Typus fallen eine grofse Zahl schon bekannter Kurven; vor allen die centrischen Kegelschnitte, wenn man sie z. B. betrachtet als Örter der Punkte, für welche die Summe oder Differenz der Entfernungen von zwei festen Punkten konstant ist; ferner die Cartesischen Ovale (Abschn. III, Kap. 9) als Örter der Punkte, für welche die Summe der Abstände von zwei festen Punkten, mit gegebenen Zahlen multipliziert,

---

1) S. die Abh. *On polyzomal curves, otherwise the curves* $\sqrt{U} + \sqrt{V} + \cdots = 0$ (*Trans. of the R. Soc. of Edinburgh*, XXV, 1868).

2) Die Franzosen haben für die Kurven $U_i = 0$ den Namen ceintures adoptiert.

konstant ist (Nr. 77), und endlich alle im Kap. 10 des III. Abschn. untersuchten Kurven. Wir können noch hinzufügen die von Descartes in dem Briefe an P. Mersenne vom 23. Aug. 1638 betrachtete Kurve, in welchem er Fermat auffordert, die von ihm erfundenen Methoden anzuwenden „a trouver la tangente d'une ligne courbe qui a cete proprieté, que l'aggregat des 4 lignes tirées de chascun de ses poins vers 4 autres poins donnez, comme vers A, B, C, D, est touiours esgale à une ligne donnée“[1]). Endlich ist eine solche Kurve ein Spezialfall der Tschirnhausen'schen Kurve mit n Brennpunkten; jede derselben ist der Ort eines Punktes M, der einer Beziehung von folgendem Typus genügt

$$\sum_i \mu_i \cdot \overline{MF_i} = Const.,$$

wo F_i feste Punkte und die μ_i gegebenen Konstanten sind[2])

Die Gleichung (1) enthält $\nu \cdot \frac{(r+1)(r+2)}{2} - 1$ wesentliche Konstanten; wenn man sie rational macht, so wird sie zu

$$\Pi \sum_{i=1}^{i=\nu} \sqrt{U_i} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

wo das Symbol Π bedeuten soll, dafs man alle die $2^{\nu-1}$ Polynome betrachten soll, die man aus dem Polynom $\sqrt{U_1} + \sqrt{U_2} + \sqrt{U_3} + \cdots \sqrt{U_\nu}$ erhält, wenn man das Vorzeichen des ersten Summanden festhält und die Vorzeichen der folgenden auf alle möglichen Weisen variiert. Das erste Glied von (1') ist somit im allgemeinen eine rationale Funktion vom Grade $2^{\nu-1} \cdot \frac{1}{2} r$, zeigt also, **dafs die durch Gleichung (1) dargestellte Kurve von der Ordnung $n = 2^{\nu-2} \cdot r$ ist.** Giebt man den in Gleichung (1) auftretenden Wurzeln alle die verschiedenen möglichen Vorzeichen, so erhält man im allgemeinen $2^{\nu-1}$ Zweige der Kurve, die zu je zwei und zwei gemeinsame Punkte haben. Man erhält diese Punkte, wenn man die Schnitte der Kurven von folgendem Typus betrachtet:

$$\sqrt{U_{h_1}} + \sqrt{U_{h_2}} + \cdots + \sqrt{U_{h_\alpha}} = 0, \quad \sqrt{U_{h_{\alpha+1}}} + \sqrt{U_{h_{\alpha+2}}} + \cdots + \sqrt{U_{h_\nu}} = 0,$$

wo $h_1, h_2, h_3 \cdots h_\nu$ eine Permutation der Zahlengruppe $1, 2, 3 \cdots \nu$ ist. Wenn $\alpha = 1$ oder $= \nu - 1$, so heifsen diese Kurven Zoma und Antizoma, während sie im allgemeinen Falle parazomale komplementäre Kurven heifsen. Man kann sich leicht davon überzeugen, **dafs jeder Schnittpunkt einer Zoma mit der entsprechenden Antizoma ein Berührungspunkt jener mit der gegebenen Polyzomalkurve ist.** Diese Schnitte sind für jede Zoma an Zahl $r \cdot 2^{\nu-2} r$, daher im ganzen

1) *Oeuvres de Descartes*; ed. Cousin, VIII. (Paris 1824) S. 105; ed. Adam et Tannery II. (Paris 1898) S. 324.

2) *Medicina mentis* (Amsterdam 1686) S. 91.

$2^{\nu-3} \cdot \nu r^2$; da jeder ein Berührungspunkt der Polyzomalkurve mit ihrer Zoma ist, so wird diese äquivalent mit $2^{\nu-2} \nu r^2$ Schnitten der Kurve (1) mit den eigenen Zomen; somit erschöpfen sie alle Schnitte jener (die von der Ordnung $2^{\nu-2} r$ ist) mit ihren ν Zomen (die von der Ordnung r sind).

Umgekehrt die $2^{\alpha-2} r \cdot 2^{\beta-2} r = 2^{\nu-4} r^2$ Schnitte der beiden komplementären parazomalen, durch die Gleichung (2) dargestellten Kurven sind Doppelpunkte der gegebenen Kurve. Sie sind auch die einzigen vielfachen Punkte, die die Kurve im allgemeinen besitzt. Welches ist ihre Anzahl? Um diese Frage beantworten zu können, beachten wir, dafs, wenn man für α einen der Werte $2, 3, 4 \cdots \nu - 2$ wählt, man $\binom{\nu}{\alpha}$ Systeme vom Typus (2) erhält; jedes derselben entsteht ebenso aus dem Werte α als aus dem Werte $\nu - \alpha$; daher ist die Anzahl der verschiedenen Systeme vom Typus (2)

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha=2}^{\alpha=\nu-2}\binom{\nu}{\alpha} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\nu}\left[\binom{\nu}{\alpha} - 2(\nu+1)\right] = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\nu}\binom{\nu}{\alpha} - (\nu+1) = 2^{\nu-1} - \nu - 1 .$$

Daraus ergiebt sich, dafs die Gesamtzahl der Doppelpunkte der Kurve ausgedrückt wird durch

$$d = 2^{\nu-4} r^2 (2^{\nu-1} - \nu - 1) .$$

Da die Kurve im allgemeinen keine Spitzen besitzt, so ist ihre

$$\text{Klasse} = 2^{\nu-3} r [r(\nu+1) - 2],$$

während ihr

$$\text{Geschlecht} = 2^{\nu-4} r [r(\nu+1) - 6] + 1$$

ist.

129. Diese Zahlen erfahren Veränderungen, wenn die ν Kurven $U_i = 0$ eine gewisse Zahl k von Punkten gemeinsam haben; es zeigt sich im Besonderen, dafs die Zahl der Doppelpunkte infolgedessen wächst um $2^{\nu-4}(\nu - 1) k$, und dafs daher das Geschlecht sich um ebenso viel und die Klasse der Kurve sich um das Doppelte vermindert. Im Speziellen, wenn die U folgende Gestalt haben

$$U_i = l_i(\Theta + L_i \Phi_i),$$

wo die l_i Konstanten sind und die Gröfsen Θ, L_i, Φ_i ternäre Formen vom Grade bezw. $r, s, r - s$ sind, so wird die Zahl der Doppelpunkte ausgedrückt durch

$$2^{\nu-4} r [(2^{\nu-1} - 2) r - (\nu - 1) s];$$

bei der vorliegenden Annahme kann man aber noch hinzufügen, dafs die linke Seite von (1') den Faktor Φ^{ω} habe, wo ω eine positive ganze Zahl ist; alsdann erfährt die Ordnung der Kurve eine Verminderung um $\omega(r - s)$ Einheiten.

In besonderen Fällen kann es überdies eintreten, dafs die Polyzomalkurve in andere von niederer Ordnung zerfällt. Als Beweis möge folgendes von Cayley angenommene Beispiel dienen:

Man betrachte die Tetrazomale, die folgende Gleichung hat:

$$\sqrt{a_1 U_1} + \sqrt{a_2 U_2} + \sqrt{a_3 U_3} + \sqrt{a_4 U_4} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und nehme an, dafs die Funktionen U durch die Identität verknüpft seien

$$k_1 U_1 + k_2 U_2 + k_3 U_3 + k_4 U_4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

wo die k gegebene Konstanten sind. Wenn man aus den Gl. (3) (4) U_4 eliminiert, so findet man:

$$k_4(\sqrt{a_1 U_1} + \sqrt{a_2 U_2} + \sqrt{a_3 U_3})^2 + a_4(k_1 U_1 + k_2 U_2 + k_3 U_3) = 0,$$

oder
$$0 = (k_4 a_1 + k_1 a_4) U_1 + (k_4 a_2 + k_2 a_4) U_2 + (k_4 a_3 + k_3 a_4) U_3$$
$$+ 2k_4\sqrt{a_2 a_3}\sqrt{U_2}\sqrt{U_3} + 2k_4\sqrt{a_3 a_1}\sqrt{U_3}\sqrt{U_1} + 2k_4\sqrt{a_1 a_2}\sqrt{U_1}\sqrt{U_2}.$$

Die rechte Seite kann als eine homogene quadratische Funktion von $\sqrt{U_1}, \sqrt{U_2}, \sqrt{U_3}$ angesehen werden, sie zerfällt als Produkt in zwei lineare Faktoren, wenn die (Determinante) Diskriminante

$$\begin{vmatrix} k_1 a_4 + k_4 a_1 & k_4\sqrt{a_1 a_2} & k_4\sqrt{a_2 a_3} \\ k_4\sqrt{a_1 a_2} & k_2 a_4 + k_4 a_2 & k_4\sqrt{a_2 a_3} \\ k_4\sqrt{a_1 a_3} & k_4\sqrt{a_2 a_3} & k_4 a_4 + k_4 a_2 \end{vmatrix} = 0$$

ist, das will sagen, wenn

$$\frac{a_1}{k_1} + \frac{a_2}{k_2} + \frac{a_3}{k_3} + \frac{a_4}{k_4} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Es geht hieraus hervor, **wenn die Beziehungen (4) und (5) bestehen, so zerfällt die Tetrazomale (3) in zwei Trizomale.**

Die Darlegungen dieses Kapitels scheinen uns hinreichend zur Charakterisierung der bis jetzt angestellten Untersuchungen über eine Klasse von Kurven, mit denen sich nach Cayley noch keiner beschäftigt hat. Dennoch sind die Fragen über die Polyzomalkurven, die noch zu behandeln wären, sehr zahlreich. Analytisch haben sie zwar eine einfache und klare Definition, aber unbekannt ist, welches ihre charakteristischen geometrischen Eigenschaften sind, mit anderen Worten, welches ist die geometrische Definition der Polyzomalkurven? Aufserdem, mit Bezug darauf, dafs es Kurven giebt, die in mehrfacher Weise polyzomal sind[1]), welches sind die Kurven, die mehrerer analytischer Darstellungen vom Typus (1) fähig sind? Anderseits, mit Rücksicht darauf, dafs es zerfallende Polyzomalkurven giebt, welche

---

1) Jeder Kegelschnitt ist es in ∞^3 Weisen, entsprechend den ∞^3 ihm umbeschriebenen Dreiecken, und jede Kurve vierter Ordnung in einer begrenzten Zahl von Weisen (vgl. Salmon-Fiedler, *Analyt. Geom. der höheren ebenen Kurven,* S. 295) als Polyzomalkurve darstellbar.

Relationen müssen zwischen den U statthaben, damit die Kurve (1) in Polyzomalkurven niederer Ordnung zerfalle? Diese Probleme sind schwierig und genügend interessant, um die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sich zu ziehen. Erst wenn diese gelöst sind, dürfte es an der Zeit sein, zur Untersuchung der Kurven

$$\sum_{i=1}^{i=\nu} \sqrt[m]{U_i} = 0$$

überzugehen, die eine natürliche Erweiterung der Polyzomalkurven sind[1]).

Siebentes Kapitel.

Die Kurven von Darboux und die Equilateren von P. Serret.

130. Zu den in den fünf vorhergehenden Kapiteln untersuchten Kurven führte uns ein einziger, jedoch in verschiedener Weise gehandhabter Begriff, nämlich die Verallgemeinerung der Kegelschnitte, indem man eine ihrer kanonischen Gleichungen verallgemeinerte. Die Erweiterungen, mit denen wir uns jetzt beschäftigen wollen, verfolgen einen ähnlichen Zweck, stützen sich jedoch auf besondere geometrische Eigenschaften, deren sich die Kurven zweiter Ordnung erfreuen.

Wir betrachten eine Parabel und zwei feste Tangenten derselben, m und n; M und N seien ihre Berührungspunkte, M_∞ und N_∞ ihre unendlich fernen Punkte und O ihr Schnittpunkt. Wir bezeichnen nun mit $T''T'$ die Punkte, in denen eine beliebige dritte Tangente der Kurve die Geraden m und n schneidet. Da dann die Doppelverhältnisse $(ONT'N_\infty)$ und $(MOT''M_\infty)$ einander gleich sind, so hat man

$$\frac{ON}{OT'} = \frac{MO}{MT''};$$

weil aber $MT'' = OT'' - OM$, so kann man schreiben

$$\frac{OT'}{ON} + \frac{OT''}{OM} = 1\,.$$

Demnach begrenzt eine beliebige Tangente der Parabel auf zwei festen Tangenten zwei variabele, von dem gemein-

---

1) Zu diesem Typus gehören die Kurven konstanten Potentials, deren kartesische Gleichung

$$\sum_i \frac{k_i}{\sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}} = Const.$$

ist; sie finden sich behandelt in der Abhandlung von G. Scheffers, *Funktionen der Abstände von festen Punkten* (Würtemberger Mitth., 2[te] Reihe, II. 1900).

samen Schnittpunkt an zu rechnende Strecken, die durch eine lineare Relation mit konstanten Koeffizienten mit einander verknüpft sind. Dieser Satz führte Darboux[1]) zur Betrachtung der Enveloppe $\varDelta$ der Geraden, die n gegebene Gerade r_k $(k = 1, 2, 3 \ldots n)$ in ebensovielen Punkten A_k schneiden und deren Abstände von einer gleichen Zahl Punkten O_k, die auf diesen Geraden liegen, der Gleichung genügen

$$\sum_k \lambda_k \cdot \overline{O_k A_k} = c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wo die λ gegebene Zahlenkoeffizienten sind und c eine gegebene Länge bedeutet. Um eine derartige Envoloppe zu charakterisieren, wollen wir annehmen, dafs

$$\frac{x - x_k}{\cos \alpha_k} = \frac{y - y_k}{\sin \alpha_k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

die Gleichung der Geraden r_k sei, während x_k, y_k die Koordinaten des Punktes O_k seien. Es folgt daraus, wenn l_k der Abstand eines beliebigen Punktes (x, y) der Geraden r_k vom Punkte O_k ist, dafs

$$x = x_k + l_k \cos \alpha_k, \qquad y = y_k + l_k \sin \alpha_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

sein wird. Wir nehmen nun einen beliebigen Punkt P (x_o, y_o) und untersuchen, wie viele Geraden der Enveloppe $\varDelta$ durch ihn hindurchgehen. Es sei

$$x - x_o = \lambda (y - y_o) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

eine derselben; sie schneidet r_k in einem Punkte A_k, deren Abstand von O_k nichts anderes ist als der Wert von l_k, den man erhält, wenn man die Gleichung auflöst, die aus der Elimination von x, y aus den Gleichungen (3) (4) resultiert. Dieser ist also

$$\overline{O_k A_k} = \frac{(x_k - x_o) - \lambda (y_k - y_o)}{\lambda \sin \alpha_k - \cos \alpha_k}.$$

Setzen wir diesen Wert in Gleichung (1) ein, so erhalten wir

$$\sum_k \lambda_k \frac{(x_k - x_o) - \lambda (y_k - y_o)}{\lambda \sin \alpha_k - \cos \alpha_k} = c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Da diese Gleichung vom Grade n in λ ist, und jeder ihrer Wurzeln eine Gerade der Enveloppe $\varDelta$ entspricht, die durch den beliebigen Punkt P geht, so schliefsen wir: **Die Enveloppe $\varDelta$ ist von der n^{ten} Klasse.** Falls die Gleichung (4) zwei einander gleiche Wurzeln λ enthält, so gehört auch der Punkt P der Enveloppe $\varDelta$ an, man erhält daher die Punktgleichung von $\varDelta$, wenn man die Diskriminante der linken Seite von (5) als Funktion von λ aufgefafst gleich 0 setzt; diese Diskriminante ist nun vom Grade $2(n-1)$ in den Koeffizienten, und diese sind linear in den Koordinaten x_0, y_0 des Punktes P; **dem-**

1) *Sur une classe de courbes unicursales* (C. R., XCIV, 1882; *Ann. de l'École norm. sup.*, 3[te] Serie, VII, 1890).

nach ist die Kurve Δ im allgemeinen von der Ordnung $2(n-1)$. — Wir wollen auch die Tangenten aufsuchen, die einer gegebenen Richtung parallel sind; wir betrachten zu dem Zwecke die Gleichung

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

nehmen an, dafs in dieser der Winkel α gegeben sei, und suchen p in der Art zu bestimmen, dafs die durch sie dargestellte Gleichung die Kurve Δ berührt. Wir eliminieren daher aus Gleichung (6) die x, y vermittelst (3) und erhalten folgenden Wert für $l_k = \overline{O_k A_k}$

$$\overline{O_k A_k} = -\frac{x_k \cos\alpha + y_k \sin\alpha - p}{\cos(\alpha - \alpha_k)};$$

setzen wir dies in (1) ein, so wird jene zu

$$\sum_k \lambda_k \frac{x_k \cos\alpha + y_k \sin\alpha - p}{\cos(\alpha - \alpha_k)} + c = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Da dies eine lineare Gleichung in λ ist, so sieht man, **dafs die Kurve Δ nur eine einzige Tangente parallel zu einer gegebenen Richtung hat;** dies bedeutet dann, **dafs die unendlich ferne Gerade $(n-1)$fache Tangente der Enveloppe Δ ist**[1]). Die Kurve Δ ist infolgedessen rational und hat keine anderen vielfachen oder Inflexions-Tangenten; sie ist aber mit $2(n-2)(n-3)$ Doppelpunkten und $3(n-2)$ Spitzen versehen.

Eliminieren wir p aus den Gleichungen (6) und (7), so erhalten wir

$$\sum_k \lambda_k \frac{(x - x_k)\cos\alpha + (y - y_k)\sin\alpha}{\cos(\alpha - \alpha_k)} = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Lassen wir in dieser Gleichnng α variieren, so stellt sie alle Geraden der fraglichen Enveloppe dar. Setzen wir im Speziellen $\alpha = \frac{\pi}{2} + \alpha_k$ ein, so fällt α fort, **folglich berührt die Enveloppe Δ die n Geraden r_k.**

Setzen wir $n = 2$, so erhält man eine Kurve zweiter Ordnung, die die beiden Geraden und die unendlich ferne Gerade berührt: sie ist also die Parabel, von der wir ausgegangen sind. Nehmen wir $n = 3$, so erhält man eine Kurve 3ter Klasse, 4ter Ordnung, ohne Doppelpunkte, aber mit 3 Spitzen, welche die unendlich ferne Gerade in den Kreispunkten berührt: sie ist demnach eine dreispitzige Hypocykloide (vgl. Nr. **73**). Setzen wir schliefslich $n = 4$, so erhält man eine Kurve 4ter Klasse und 6ter Ordnung, die mit 4 Doppelpunkten und 5 Spitzen versehen ist und die unendlich ferne Gerade dreifach berührt; auf diese Kurve stiefs Laguerre im Verlaufe seiner Untersuchungen über Transformationen durch reziproke Halb-

---

1) Umgekehrt: eine beliebige Kurve von der Klasse n, welche die unendlich ferne Gerade als $(n-1)$fache Tangente hat, kann in der oben angegebenen Weise definiert werden, ebenso aber auch in derjenigen, die in der nachfolgenden Nummer auseinander gesetzt werden wird.

strahlen; nach einem Vorschlage von ihm wird sie Hypercykel genannt[1]).

131. Wir nehmen wieder die Betrachtung einer Parabel auf; a, b, c, d seien vier feste Tangenten derselben und t eine bewegliche Tangente. Es seien A, B, C die Spurpunkte von a, b, c auf d; L, M, N die analogen Schnitte auf t. Die unendlich fernen Geraden und die Geraden a, b, c bestimmen auf den Tangenten d und t projektive Punktreihen, daher ist

$$(ABCD_\infty) = (LMNT_\infty) \quad \text{oder} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{LN}{MN}$$

oder, wenn man will

$$MN \cdot AC - LN \cdot BC = 0;$$

daher existiert bei einer Parabel eine homogene Beziehung mit konstanten Koeffizienten zwischen den Strecken, die drei feste Tangenten auf einer beweglichen abschneiden. Um zu zeigen, dafs die Enveloppen Δ sich einer ähnlichen Eigenschaft erfreuen, betrachten wir $n+1$ beliebige Geraden r_k $(k = 0, 1, 2 \ldots n)$ und suchen die Enveloppe der Geraden r, die sie in $(n+1)$ Punkten schneiden derart, dafs

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} \lambda_k \cdot \overline{A_k A_{k+1}} = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

wo die λ wiederum gegebene Zahlenkoeffizienten sind. Es seien nun

$$\xi_k x + \eta_k y + 1 = 0 \ldots (k = 0, 1, 2 \ldots n) \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

die Gleichungen der Geraden r_k; nehmen wir nun einen beliebigen Punkt $P(x_0, y_0)$, so wird durch die beiden Gleichungen

$$x = x_0 + l \cos\alpha, \quad y = y_0 + l \sin\alpha; \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

eine beliebige von ihm ausgehende Gerade dargestellt. Alsdann wird die Strecke PA_k durch den Wert l gemessen, den man durch Auflösung der Gleichung erhält, die aus der Elimination von x, y aus den Gleichungen (9) (10) sich ergiebt. Daher ist

$$\overline{PA_k} = -\frac{\xi_k x_0 + \eta_k y_0 + 1}{\xi_k \cos\alpha + \eta_k \sin\alpha}$$

und
$$\overline{A_k A_{k+1}} = \frac{\xi_k x_0 + \eta_k y_0 + 1}{\xi_k \cos\alpha + \eta_k \sin\alpha} - \frac{\xi_{k+1} x_0 + y_{k+1} y_0 + 1}{\xi_{k+1} \cos\alpha + y_{k+1} \sin\alpha}.$$

Setzen wir diese in (8) ein, so erhält man eine Gleichung n^{ten} Grades in $\operatorname{tg}\alpha$, was beweist, **dafs die Enveloppe der Geraden r von der n^{ten} Klasse ist.** Wenn wir nun die Geraden r suchen, die parallel zu einer gegebenen Richtung sind, so erkennt man — wenn man in analoger Weise, wie oben geschehen, verfährt — dafs es deren nur eine

---

1) Laguerre, *Sur les hypercycles* (C. R., XCIV, 1882).

einzige giebt; **demnach ist die unendlich ferne Gerade für die fragliche Enveloppe eine $(n-1)$-fache Gerade.** Somit hat man die Grundlagen, nun auf die vorhin ausgesprochenen Sätze zu schliefsen. Die Enveloppen $\varDelta$ können daher in doppelter Hinsicht als Verallgemeinerungen der gewöhnlichen Parabeln angesehen werden. Wir werden sie Kurven von Darboux I[ter] Art nennen. Die Bezeichnung Kurven von Darboux II[ter] Art werden wir für die Enveloppen reservieren, mit denen wir uns beschäftigen wollen.

132. Bekanntlich ist das von zwei festen Tangenten eines Kreises und einer beweglichen Tangente gebildete Dreieck von konstantem Umfange, sofern nur der Umfang des Dreiecks in passender Weise durchlaufen wird. Diese Bemerkung führte Darboux zu der Frage[1]): **Welches ist die Enveloppe der Geraden, die mit n Geradenpaaren ebenso viele Dreiecke mit einer konstanten Summe der Umfänge bildet?** Wir wollen diese Enveloppe mit Ω_n bezeichnen, ihre Klasse mit ν und die gegebenen Geraden ferner mit r'_k, r''_k $(k = 1, 2, 3 \cdots n)$, mit s die gegebene Summe der Umfänge und mit O einen beliebigen Punkt ihrer Ebene bezeichnen. Eine durch O gezogene Gerade a bestimmt mit den Geradenpaaren $r'_1 r''_1, r'_2 r''_2 \cdots r'_{n-1} r''_{n-1}$ $n-1$ Dreiecke; sei σ die Summe ihrer Umfänge; dann giebt es noch ∞^1 Geraden, die mit $r'_n r''_n$ ein Dreieck mit dem Umfange $s - \sigma$ bilden; ihre Enveloppe ist ein Kreis Ω_1, an den man von O aus zwei Tangenten $\bar{a}$ ziehen kann. Wenn eine derselben mit a zusammenfällt, so bekommt man eine durch O gehende Gerade der Enveloppe Ω_n. Wir ziehen durch O aber eine beliebige Gerade $\bar{a}$ und nennen den Umfang des Dreiecks, das sie mit $r'_n r''_n$ bildet, p; alle die Geraden, die mit den Paaren $r'_1 r''_1, r'_2 r''_2, \ldots, r'_{n-1} r''_{n-1}$ Dreiecke bilden, deren Umfangssumme $s-p$ ist, umhüllen eine Kurve Ω_{n-1}, an die man von O aus ν_{n-1} Tangenten a ziehen kann. Dies ist ein Beweis, dafs zwischen den Geraden a und $\bar{a}$ eine algebraische Korrespondenz $(2, \nu_{n-1})$ besteht. Da dieselbe ν_n Coincidenzen besitzt, so folgt daraus, dafs $\nu_n = \nu_{n-1} + 2$ ist; ersetzen wir hierin n successive durch $n-1$, $n-2, \ldots, 2$ und addieren die resultierenden Gleichungen, indem wir beachten, dafs $\nu_1 = 2$, so erschliefsen wir: $\nu_n = 2n$; **demnach ist die Enveloppe Ω_n von der Klasse $2n$.** — Wir bezeichnen jetzt mit ν'_n die Anzahl der Tangenten von Ω_n, die zu einer beliebigen Richtung parallel sind. Verfahren wir in ähnlicher Weise wie vorhin, so erhalten wir in den entsprechenden uneigentlichen Strahlenbüschen $\nu'_{n-1} + 2$ Koinzidenzen, da nun diese durch die unendlich ferne Gerade doppelt gezählt und die zu jener Richtung parallelen Tangenten von Ω_n dargestellt werden, so erkennt man, dafs $\nu'_{n-1} + 2 = \nu'_n + 2$; daher ist

$$\nu'_n = \nu'_{n-1} = \nu'_{n-2} = \cdots = \nu'_1;$$

1) *Sur une propriété du cercle* (C. R., XCIV, 1882; Ann. de l'Ec. norm. sup. Ser. 3, VII, 1890).

nun ist Ω_1 ein Kreis, also $\nu_1' = 2$, und folglich ist im allgemeinen $\nu_n' = 2$. Daraus geht hervor, **dafs die unendlich ferne Gerade für die Enveloppe Ω_n eine $2(n-1)$-fache Gerade ist.**

Zu denselben Schlüssen kann man auch auf dem Wege der Rechnung gelangen. Man stelle die n gegebenen Geradenpaare dar durch die Gleichungen

$$\frac{x - x_k}{\sin(\alpha_k \mp \delta_k)} = \frac{y - y_k}{\cos(\alpha_k \mp \delta_k)} \qquad (k = 1, 2, 3 \cdots n).$$

Wir nehmen dann einen beliebigen Punkt $P(x_0, y_0)$, ziehen durch ihn die beliebige Gerade
$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\sin\alpha}$$

und suchen die Bedingung auf dafür, dafs sie der gegebenen Enveloppe Ω_n angehöre. Wir werden dann die Gleichung finden

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{[(x_k - x_0)\cos\alpha + (y_k - y_0)\sin\alpha]\cos\delta_k}{\cos\frac{\alpha - \alpha_k + \delta_k}{2}\cdot\sin\frac{\alpha - \alpha_k - \delta_k}{2}} = s, \quad . \quad . \quad (12)$$

die als Grundlagen der analytischen Untersuchung der fraglichen Enveloppe dienen kann, insbesondere zur Behandlung der algebraischen und geometrischen Fragen, von denen Darboux in seiner Abhandlung spricht und auf denen das erhebliche Interesse beruht, das die betrachteten Kurven beanspruchen dürfen. Wir können uns hier in das Studium derselben nicht vertiefen; bevor wir jedoch die Kurven von Darboux II^{ter} Spezies verlassen, wollen wir noch bemerken, dafs sie durch die Kreispunkte der Ebene gehen, rational sind und in speziellen Fällen sich auf Darboux'sche Kurven Ier Spezies reduzieren. Aufserdem können sie als die Polarreziproken in Bezug auf einen Kreis angesehen werden von solchen Kurven, die eine Gleichung von der Form
$$\varrho = f(\cos\omega, \sin\omega)$$

haben, wo f eine rationale, ganze oder gebrochene Funktion von $\cos\omega$ und $\sin\omega$ bedeutet.

133. Eine gleichseitige Hyperbel ist eine Kurve zweiter Ordnung, deren Asymptoten rechtwinklig aufeinander stehen. Giebt es nun Kurven $n$ter Ordnung, bei denen n Asymptoten in einen Punkt zusammenlaufend den umliegenden Winkelraum in n gleiche Teile teilen, also ein „reguläres Büschel“ bilden? Diese Frage hat sich P. Serret vorgelegt, der den mit dieser Eigenschaft ausgestatteten Kurven den Namen Equilateren gab[1]).

1) S. die Abhandlungen *Sur les hyperboles équilatères d'ordre quelconque; Sur les faisceaux réguliers et les équilatères d'ordre n* und *Sur les équilatères comprises dans les équations* $0 = \sum_1^{n-2} l_1 T_1' \equiv H_n$, $0 = \sum_1^{2k-1} l_1 T_1^n \equiv H_n + \lambda H_n'$ (C. R., CXI, 1895).

Um die allgemeine Gleichung derselben zu finden, nehmen wir den Schnittpunkt der Asymptoten als Anfang und eine derselben als x-Axe. Die Gleichungen der Asymptoten selbst werden dann sein:

$$x \cos \frac{2k\pi}{n} - y \sin \frac{2k\pi}{n} = 0. \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots, n-1)$$

Daher ist die gesuchte Gleichung

$$\prod_{k=0}^{k=n-1} \left(x \cos \frac{2k\pi}{n} - y \sin \frac{2k\pi}{n} \right) - \varphi_{n-2}(x, y) = 0. \quad . \quad (13)$$

wo φ_{n-2} eine beliebige Funktion vom Grade $(n-2)$ in x, y ist. Diese Gleichung hängt von $\frac{n(n-1)}{2}$ Konstanten ab. Läfst man den Schnittpunkt und die Orientierung der Asymptoten beliebig sein, so wächst diese Zahl um 3, **daher hängt eine Equilatere $n$ter Ordnung von $\frac{n(n-1)}{2} + 3$ Konstanten ab, d. h. von $2n - 3$ Konstanten weniger, als eine allgemeine Kurve $n$ter Ordnung.** P. Serret hat einige hübsche Eigenschaften der Equilateren entdeckt, die man als Erweiterungen bekannter Eigenschaften der gleichseitigen Hyperbel auffassen kann, z. B. hat er bemerkt, dafs in ähnlicher Weise, wie bei dieser, so auch bei jenen folgendes zutrifft: **zwei beliebige Equilateren bestimmen ein Büschel von Equilateren, deren Centren auf einem Kreise liegen, und ihre Asymptoten umhüllen eine Hypocykloide.** Bezüglich des Beweises verweisen wir der Kürze wegen den Leser auf die vorher erwähnten Artikel und bemerken, dafs binnen Kurzem (Nr. **161**—**164**) wir auf eine besondere Kategorie von Equilateren stofsen werden, die uns die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen liefern wird.

Achtes Kapitel.

Die Rhodoneen (Rosenkurven) von G. Grandi.

134. Zu den Kurven, denen das gegenwärtige Kapitel hauptsächlich gewidmet ist, gelangte Guido Grandi, als er nach einer geometrischen Definition von Kurven suchte, welche die Gestalt von Blumen hätten, also Rosetten mit mehreren Blättern. Er nannte Rhodoneen die in der Ebene liegenden, Clelien die sphärischen. Hier werden wir uns ausschliefslich mit den ersteren — die von den Franzosen Rosaces, von den Deutschen Rosenkurven genannt werden — beschäftigen. In Polarkoordinaten werden sie durch Gleichungen von folgendem Typus dargestellt:

$$\varrho = R \sin \mu\omega, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wo R eine gegebene Länge, und μ ein Zahlenkoeffizient ist, den man ersichtlich immer als positiv annehmen kann. Die wunderschönen Eigenschaften dieser Kurven wurden von Grandi dem Leibniz in zwei Briefen mitgeteilt, die auf den Dezember 1713 zurückgehen[1]), wurden aber Allgemeingut erst zehn Jahre später, infolge einer der Gesellschaft der Wissenschaften zu London eingereichten Abhandlung[2]); ihre vollständige Theorie wurde dann von Grandi selbst im Jahre 1728 in einem besonderen Werkchen dargelegt[3]). Vor nicht gar langer Zeit, jedoch unabhängig von Grandi, wurden die Rosenkurven im allgemeinen untersucht von E. W. Hyde[4]) — und zwar unter dem Namen foliate curves — und ferner von Himstedt[5]).

Setzen wir $\omega = \frac{\pi}{2\mu} - \overline{\omega}$, so wird die Gleichung (1) zu

$$\varrho = R \cos \mu \overline{\omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und kann dann Gleichung (1) vollständig ersetzen. In der Gestalt (2) erhält man die Gleichung der Rhodoneen, wenn man folgende Entstehungsweise derselben in Formeln kleidet[6]): „Seien OA und AM zwei einander gleiche Strecken, die in O und in A drehbar sind; die erstere rotiert um O mit einer gewissen Geschwindigkeit, die zweite um A mit der m-fachen Geschwindigkeit; der Ort des Punkt M ist dann eine Rhodonee.“ Nehmen wir nämlich die Anfangslage der Geraden als Polaraxe und nehmen an, dafs dann AM in die Verlängerung AB von OA falle und $OA = a$, so haben wir, nachdem OA sich um den Winkel α gedreht hat,

$$\sphericalangle AOx = \alpha, \qquad \sphericalangle MAB = m\alpha; \qquad OM = \varrho, \qquad \sphericalangle MOx = \omega,$$

ferner

$$\omega = \alpha + \frac{m\alpha}{2}, \qquad \varrho = 2a \cos \frac{m\alpha}{2};$$

demnach ist die Gleichung des Ortes von M

$$\varrho = 2a \cos\left(\frac{m}{m+2}\,\omega\right),$$

beweist also durch ihre Gestalt die Behauptung. — Es ist leicht, aus dem eben bewiesenen Satze eine Methode herzuleiten, alle Rhodoneen mechanisch zu zeichnen[7]).

1) *Leibniz* ed. Gerhardt IV, S. 221—24.

2) *Florum geometricarum manipulus* (Phil. Trans. 1723).

3) *Flores geometrici ex rhodonearum et claeliarum descriptione resultantes* (Florentiae 1728).

4) S. die Abh. *Foliate curves* in The Analyst II, 1875.

5) *Über diejenigen ebenen Kurven, welche der Polargleichung* $r = a \sin \lambda \Theta$ *entsprechen* (Progr. Löbau, 1888).

6) Pirondini, *Sur une famille remarquable de courbes* (Mathésis 2. Ser., IV, 1894).

7) Betr. anderer Methoden s. Aubry, *De l'usage des figures de l'espace pour la definition et la transformation de certaines courbes* (Journ. de math. spéc.

Aus (1) geht hervor, wenn k eine beliebige ganze Zahl bedeutet, dafs, wenn $\mu\omega = k\pi$ ist, $\varrho = 0$, und wenn $\mu\omega = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ist, $\varrho = R$ wird; der Radius vector variiert also zwischen den Grenzen O und R, und daher liegt die Kurve ganz innerhalb des Kreises, dessen Mittelpunkt der Pol O und dessen Radius R ist[1]); wir wollen diesen Kreis den Fundamentalkreis der Rhodonee nennen. Berücksichtigen wir auch imaginäre Winkel, so sehen wir, wenn $\mu\omega = \pm \operatorname{arc\,tg} i$, dafs dann $\varrho = \infty$ wird; dies zeigt, **dafs die Schnitte der Kurve mit der unendlich fernen Geraden sämtlich mit den Kreispunkten der Ebene zusammenfallen.**

Wie wir oben erkannt haben, mufs, damit $\varrho = 0$ werde, $\mu\omega = k\pi$ sein; wenn nun μ irrational ist, so sind zwei Werte von ω, die dieser Bedingung genügen, notwendigerweise inkongruent $mod\, 2\pi$; in der That: wäre

$$\mu\omega_1 = k_1\pi, \quad \mu\omega_2 = k_2\pi, \quad \omega_1 - \omega_2 = 2k\pi,$$

wo k, k_1, k_2 ganze Zahlen, so würde sich ergeben

$$\mu = \frac{k_1 - k_2}{2k},$$

welche Beziehung absurd ist, da die linke Seite irrational, die rechte Seite rational ist. Demnach: **Wenn μ irrational ist, so geht die Rosenkurve unendlich oft durch den Pol, umfafst daher unendlich viele Blätter**[2]); in diesem Falle kann die Kurve nicht algebraisch sein.

Wenn dagegen

$$\mu = \frac{a}{b},$$

wo a und b ganze, relative Primzahlen sind, so zeigt eine leichte Diskussion: **Die durch die Gleichung**

$$\varrho = R \sin\left(\frac{a}{b}\omega\right)$$

dargestellte Rosenkurve besteht aus a Blättern, wenn die beiden Zahlen a und b beide ungerade sind, dagegen aus $2a$ Blättern, wenn eine derselben gerade, die andere ungerade ist. Wenn $b > 1$, so überdecken sich die Blätter der Rosenkurve, jedes folgende die ersteren, so dafs man sagen könnte, die Kurve habe b Schichten; ist $b = 1$, so besteht sie nur aus einer einzigen Schicht, sie besteht aus unendlich vielen Schichten, wenn μ irrational ist.

Betrachten wir zwei aufeinander folgende Werte von ω, für welche $\varrho = 0$ wird, z. B.

$$\omega_1 = \frac{k\pi}{\mu}, \qquad \omega_2 = \frac{(k+1)\pi}{\mu};$$

---

4. Ser., IV, 1895, S. 202—4). Auf eine besonders bemerkenswerte werden wir im folgenden Abschnitt hinweisen, indem wir zeigen, dafs die Rhodoneen spezielle Epicykloiden sind.

1) Grandi, *Flores geometrici etc.* S. 4. 2) Das. S. 12.

da nun $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{(2k+1)}{\mu}\,\frac{\pi}{2}$, so ist der zum Werte $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ gehörige Radius vector gleich dem Maximum R; und weil

$$R \sin \mu \left(\frac{2k+1}{\mu}\,\frac{\pi}{2} \pm \alpha \right) = (-1)^k R \cos \mu \alpha ,$$

so ist klar, **dafs zwei zu einem Maximal-Vector symmetrische Radienvectoren einander gleich sind,** mit anderen Worten: **Die Blätter der Rosenkurve sind symmetrisch in Bezug auf die Maximal-Radien**[1]). Demnach besitzt die Kurve ∞^1 Symmetrieaxen, wenn μ irrational ist; wenn $\mu = \frac{a}{b}$, besitzt sie deren $2a$, wenn eine der Zahlen a, b ungerade ist, a, wenn beide ungerade sind.

Die Quadratur der Rosenkurven hat zu zwei erwähnungswerten, von Grandi entdeckten Sätzen Veranlassung gegeben, die wir nun mit Hilfe der modernen Methoden beweisen wollen.

Sei A die Fläche eines Blattes der durch Gleichung (1) dargestellten Rosenkurve. Dann haben wir

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{\mu}} \varrho^2 \cdot d\omega = \frac{R^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{\mu}} \sin^2 \mu\omega \cdot d\omega = \frac{R^2}{4\mu}\left| \mu\omega - \frac{1}{2}\sin 2\mu\omega \right|_0^{\frac{\pi}{\mu}} = \frac{\pi R^2}{4\mu};$$

nun hat ein Quadrant des Fundamentalkreises den Inhalt $Q = \frac{\pi R^2}{4}$, also ist

$$A = \frac{1}{\mu} Q ,$$

welche Gleichung den ersten Satz von Grandi ausdrückt[2]). Wenn insbesondere $\mu = \frac{a}{b}$, so ist $A = \frac{b\pi R^2}{4a}$; wenn daher a und b beide ungerade sind, so besteht die Kurve aus a Blättern, deren Fläche $b\frac{\pi R^2}{4}$ $b \cdot Q$ ist, wenn jedoch nur eine dieser Zahlen ungerade ist, so ist die Gesamtfläche $2b \cdot Q$; somit ist, wenn $b = 1$, die Fläche gleich dem vierten Teile oder gleich der Hälfte des Fundamentalkreises, jenachdem a ungerade oder gerade.

Bezeichnen wir mit B die Fläche, die von den beiden zu den Winkeln $\frac{\pi}{4\mu}$ und $\frac{3\pi}{4\mu}$ gehörenden Radienvectoren und zwischenliegenden Kurvenbogen umschlossen wird, so haben wir (s. oben)

$$B = \frac{R^2}{4\mu}\left| \mu\omega - \frac{1}{2}\sin 2\mu\omega \right|_{\frac{\pi}{4\mu}}^{\frac{3\pi}{4\mu}} = \frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) \cdot$$

Nun haben jene beiden Vectoren die gemeinsame Länge

$$R \sin \frac{\pi}{4} = \frac{R}{\sqrt{2}} ,$$

1) Grandi, *Flores geometrici etc.* S. 4. 2) Das. S. 15.

und begrenzen zusammen mit einem Kreisbogen, dessen Mittelpunkt O, einen Kreissektor, dessen Fläche

$$C = \frac{\pi R^2}{8\mu};$$

demnach hat die zwischen diesem Kreisbogen und dem angrenzenden Bogen der Rosenkurve gelegene Lünette den Flächeninhalt

$$\mathfrak{L} = B - C = \frac{R^2}{4\mu},$$

und daher
$$\frac{\mathfrak{L}}{R^2} = \frac{1}{4\mu},$$

und diese Formel drückt den zweiten der Sätze von Grandi aus[1]).

Wir bemerken noch, dafs das Bogendifferenzial der Rosenkurve gegeben ist durch:

$$ds = R\sqrt{1 - \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2}\sin^2\mu\omega} \cdot d\mu\omega;$$

die Rektifikation der Rosenkurve hängt also von elliptischen Integralen ab[2]).

135. In dem Falle, dafs μ rational, also $= \frac{a}{b}$ ist, kann man leicht die kartesische Gleichung der Rosenkurve erhalten[3]). Wendet man nämlich auf die beiden Seiten der identischen Gleichung

$$\sin a\omega = \sin\left(b\frac{a}{b}\omega\right)$$

die bekannte Formel an

$$\sin m\omega = \binom{m}{1}\cos^{m-1}\omega \cdot \sin\omega - \binom{m}{3}\cos^{m-3}\omega \cdot \sin^3\omega$$
$$+ \binom{m}{5}\cos^{m-5}\omega \cdot \sin^5\omega - \cdots,$$

wo m eine beliebige, positive ganze Zahl ist, so erhält man

$$\binom{a}{1}\cos^{a-1}\omega \cdot \sin\omega - \binom{a}{3}\cos^{a-3} \cdot \sin^3\omega + \binom{a}{5}\cos^{a-5}\sin^5\omega - \cdots$$
$$= \binom{b}{1}\cos^{b-1}\left(\frac{a}{b}\omega\right) - \binom{b}{3}\cos^{b-3}\left(\frac{a}{b}\omega\right)\sin^3\omega + \cdots$$

Nun ist wegen allgemeiner Beziehungen und wegen Gleichung (1)

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\omega = \frac{x}{\varrho}, \quad \sin\omega = \frac{y}{\varrho}, \quad \sin\left(\frac{a}{b}\omega\right) = \frac{\varrho}{R},$$
$$\cos\left(\frac{a}{b}\omega\right) = \frac{\sqrt{R^2 - \varrho^2}}{R}.$$

1) Grandi, *Flores geometrici etc.* S. 20. 2) Das. S. 31.

3) Der erste, der die kartesischen Gleichungen der algebraischen Rhodoneen aufstellte, war Luigi dei marchesi Ridolfi; man sehe die heute vergessene, aber wertvolle Arbeit: *Di alcuni usi delle epicicloidi e di uno strumento per la loro descrizione e specialmente per quella dell' ellisse* (Florenz 1844) S. 24, Note. Vgl. auch Himstedt a. O. S. 4.

Setzen wir dies in die vorige Gleichung ein, so bekommen wir:

$$R^b\left[\binom{a}{1}x^{a-1}y - \binom{a}{3}x^{a-3}y^3 + \binom{a}{5}x^{a-5}y^5 - \cdots\right]$$
$$= \binom{b}{1}(x^2+y^2)^{\frac{a+1}{2}}\left(R^2-\overline{x^2+y^2}\right)^{\frac{b-1}{2}}$$
$$- \binom{b}{3}(x^2+y^2)^{\frac{a-1}{2}}\left(R^2-\overline{x^2+y^2}\right)^{\frac{b-3}{2}} + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Sind a und b beide ungerade, so ist diese Gleichung rational und vom Grade $a+b$; in allen anderen Fällen mufs man, um die Gleichung rational zu machen, beide Seiten ins Quadrat erheben, und sie wird alsdann vom Grade $2(a+b)$. Demnach: **Wenn μ eine rationale Zahl $\frac{a}{b}$ ist, so stellt die Gleichung (1) immer eine algebraische Kurve dar, deren Ordnung $a+b$ ist, wenn beide Zahlen a, b ungerade sind, jedoch $2(a+b)$ ist, wenn eine derselben gerade.** Die Kurve ist also immer von einer geraden Ordnung, und einer ist eine symmetrische Funktion der Zahlen a, b. Wir fügen noch hinzu, dafs, wenn $b=1$, sie auch rational ist: in diesem Falle liefert nämlich (1)

$$x = R\sin a\omega\cdot\cos\omega\,,\qquad y = R\sin a\omega\cdot\sin\omega\,;$$

die rechten Seiten dieser Gleichungen lassen sich aber als rationale Funktionen von $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$ ausdrücken.

Unsere Gleichung (3) beweist ferner, **dafs der Anfang ein vielfacher Punkt von der Ordnung a oder $2a$ ist, jenachdem von den Zahlen a, b beide oder nur eine ungerade ist.** — Die Bestimmung derjenigen Doppelpunkte, welche die Kurve im Endlichen aufser dem Mittelpunkte hat, läfst sich hingegen leichter durch Gleichung (1) ausführen; man erhält nämlich einen solchen Doppelpunkt, indem man die beiden Werte ω_1, ω_2 aufsucht, für welche (q ganzzahlig vorausgesetzt)

$$\omega_1-\omega_2 = 2q\pi \qquad \text{und} \quad \sin\left(\frac{a}{b}\omega_1\right) = \sin\left(\frac{a}{b}\omega_2\right),$$

oder $$\omega_1-\omega_2 = (2q-1)\pi \quad \text{und} \quad \sin\left(\frac{a}{b}\omega_1\right) = -\sin\left(\frac{a}{b}\omega_2\right);$$

man kann nun die beiden ersten ersetzen durch

$$\omega_1-\omega_2 = 2q\pi\,,\qquad \omega_1+\omega_2 = \frac{b}{a}(2r-1)\pi\,,$$

die beiden letzten durch

$$\omega_1-\omega_2 = (2q-1)\pi\,,\qquad \omega_1+\omega_2 = \frac{b}{a}2r\pi\,.$$

In diesen Gleichungen hat man den ganzen Zahlen q und r derartige Werte zu erteilen, dafs die zugehörigen Werte ω_1 und ω_2 inkongruent *mod.* 2π sind. Eine leichte Diskussion führt uns zu dem Schlusse,

dafs die Zahl der Lösungen $\frac{1}{2}a(b-1)$, und daher haben wir folgenden Satz[1]): **Die durch die Gleichung $\varrho = R \sin\left(\frac{a}{b}\omega\right)$ dargestellte Rosenkurve besitzt in einer Entfernung vom Mittelpunkte, die weder 0 noch unendlich grofs ist, Doppelpunkte, deren Zahl $\frac{1}{2}a(b-1)$ oder $2a(b-1)$ ist, jenachdem von den Zahlen a, b keine oder eine einzige ungerade ist.**

136. Der vorhin bewiesene Satz über die Ordnung einer algebraischen Rosenkurve eignet sich auch zur Beantwortung folgender Frage: „Welches ist die Zahl der verschiedenen Arten von Rhodoneen von gegebener Ordnung n?“ Natürlich müssen wir n als gerade annehmen. Wenn nun $f(n)$ die gesuchte Zahl ist, so wird diese offenbar die Summe der Zahlen $f_1(n)$ und $f_2(n)$ sein, von denen die erste die Anzahl derjenigen verschiedenen Paare ungerader, relativ primer Zahlen bedeutet, welche der Relation

$$(\alpha) \qquad a + b = n,$$

genügen[2]), während die zweite die Anzahl derjenigen Zahlenpaare, von denen die eine gerade, die andere ungerade ist, bedeutet, die der Relation genügen

$$(\beta) \qquad 2(a + b) = n.$$

Beschäftigen wir uns vorerst mit der Gleichung (α). Da a und b relativ prim sein sollen, so ist auch jede derselben relativ prim zu n. Nehmen wir umgekehrt für a einen beliebigen zu n relativ primen Wert an, kleiner als n, so darf man für b den Wert $n - a$ nehmen; demnach ist die Anzahl der Zahlenpaare, die der Gleichung (α) genügen, gleich der Anzahl der Primzahlen, die kleiner als n sind. Bedienen wir uns daher eines von Gaufs[3]) eingeführten Symbols, so können wir schreiben

$$f_1(n) = \varphi(n).$$

Wir gehen über zu (β); da n eine gerade Zahl, so kann man diese schreiben $a + b = \frac{n}{2}$; da hier eine der Zahlen a, b gerade, die andere ungerade sein mufs, so ist diese Relation unmöglich, wenn $\frac{n}{2}$ gerade ist; also ist

$$f_2(n) = 0, \quad \text{wenn } \frac{n}{2} \text{ gerade;}$$

wenn hingegen $\frac{n}{2}$ ungerade ist, so entspricht jeder zu $\frac{n}{2}$ relativ-

1) Himstedt, a. a. O. S. 5—7.

2) Als verschiedene Paare sind auch zu betrachten solche, die durch Vertauschung der Elemente auseinander entstehen, da sie verschiedene Kurven liefern.

3) *Disquisitiones arithmeticae*, Art. 38.

primen Zahl, die kleiner als $\frac{n}{2}$ ist, eine Lösung der Gleichung (β). Demnach ist
$$f_2(n) = \varphi\left(\frac{n}{2}\right), \quad \text{wenn } \frac{n}{2} \text{ ungerade.}$$
Und so schliefsen wir: **Die Zahl der verschiedenen Arten von Rhodoneen von der Ordnung n wird gegeben durch $\varphi(n)$, wenn n ein Vielfaches von 4 ist, dagegen durch $\varphi(n) + \varphi\left(\frac{n}{2}\right)$, wenn n eine einfache Paarzahl ist.** Somit giebt es nur eine einzige Rhodonee zweiter Ordnung, zwei der vierten Ordnung (entsprechend den Werten $\mu = 3$ und $\mu = \frac{1}{3}$), vier von der sechsten Ordnung (entsprechend den Werten $\mu = 2, \frac{1}{2}, 5, \frac{1}{5}$), ebenso vier von der achten Ordnung u. s. w.

Gehen wir nunmehr zur Untersuchung der einfachsten Fälle über:

I. $\mu = 1$, $n = 2$; $\varrho = R \sin \omega$. Gehen wir zu kartesischen Koordinaten über, so erhalten wir als Gleichung $x^2 + y^2 = Ry$, die einem Kreise mit dem Mittelpunkte $\left(0, \frac{R}{2}\right)$ angehört, dessen Radius $= \frac{R}{2}$. Grandi glaubte irrtümlicherweise, dafs zu dieser Rhodonee auch der symmetrisch in Bezug auf die x-Axe gelegene Kreis gehöre.

II. $\mu = 3$, $n = 4$; $\varrho = R \sin 3\omega$. Diese Rhodonee hat nur eine Schicht; sie besteht aus drei gleichen Blättern, deren Symmetrieaxen die Radien des Fundamentalkreises sind, die mit Ox die Winkel bezügl. $\frac{\pi}{3}$, π, $\frac{5\pi}{3}$ bilden. Wegen ihrer Form ist die Kurve gleichseitiges Kleeblatt (reguläres Trifolium) genannt worden, und wir sind ihr schon in Nr. **75** begegnet.

III. $\mu = \frac{1}{3}$, $n = 4$; $\varrho = R \sin \frac{\omega}{3}$. Als kartesische Gleichung hat die Kurve $R^3 y = (x^2 + y^2)(3R^2 - 4(x^2 + y^2))$; sie berührt die x-Axe im Anfangspunkte und schneidet sie in den Punkten mit der Abscisse $\pm \frac{R\sqrt{3}}{2}$, hat den Punkt $\left(0, \frac{R}{2}\right)$ als Doppelpunkt und den Punkt $(0, -R)$ als einfachen Punkt. Die Kreispunkte der Ebene sind Doppelpunkte derselben. Sie ist eine rationale Kurve vierter Ordnung, von Gestalt ähnlich der Pascal'schen Schnecke (Nr. **70**), mit einem Knotenpunkt.

IV. $\mu = 2$, $n = 6$; $\varrho = R \sin 2\omega$. Sie ist eine Rhodonee von einer Schicht, bestehend aus vier gleichen Blättern (s. Taf. XI, Fig. 75), sie ist von der sechsten Ordnung und hat folgende kartesische Gleichung
$$(x^2 + y^2)^3 = 4R^2 x^2 y^2.$$
Man kann sie als eine Grenzform der Skarabäen (s. Nr. **105**) ansehen, d. h. als Fufspunktkurve einer regulären Astroide in Bezug auf ihren Mittelpunkt, oder auch als Ort der Fufspunkte der vom Scheitel eines rechten Winkels auf die sämtlichen Lagen einer Strecke von

konstanter Länge, deren Endpunkte die Schenkel dieses Winkels durchlaufen, gefällten Lote[1]). Die französischen Geometer nennen sie Rosace à quatre branches[2]); Ridolfi bemerkte (o. a. O.) ihre Anwendbarkeit auf das Problem der Würfelverdoppelung.

V. $\mu = \frac{1}{2}$, $n = 6$; $\varrho = R \sin \frac{\omega}{2}$. Diese Rhodonee (Taf. XI, Fig. 76) ist von der sechsten Ordnung und wird in kartesischen Koordinaten durch die Gleichung dargestellt:

$$4(x^2 + y^2)^3 + R^4 y^2 - 4R^2(x^2 + y^2)^2 = 0.$$

Sie ist symmetrisch in Bezug auf beide Koordinataxen, hat im Anfangspunkt einen Berührungsknoten mit der x-Axe als zugehöriger Tangente; die Endpunkte des auf der x-Axe gelegenen Durchmessers des Fundamentalkreises sind einfache Punkte, während die Punkte D, D_1 $\left(0, \pm \frac{R\sqrt{2}}{2}\right)$ Doppelpunkte derselben sind. Sie hat aufserdem zwei Doppeltangenten parallel zu Ox und zwei parallel zu Oy. Indem Grandi nur eine Hälfte der fraglichen Kurve betrachtete, nämlich nur den Bogen $OBDA'D_1B_1O$[4]), war er nicht imstande die hervorstechendsten Eigenschaften ihrer Gestalt zu bemerken, wie die Existenz des Berührungsknotens und der Doppeltangenten.

137. Wir überlassen dem Leser die Diskussion der übrigen Rosenkurven sechster Ordnung und empfehlen ihm das Werkchen von Ridolfi für das Studium derjenigen von ihnen, die zur Teilung eines Winkels in beliebige gleiche Teile dienen können[5]). Wir aber haben hier noch zwei Umstände zu erwähnen. Erstens: Wenn man auf die Kurve (1) die Transformation durch reziproke Radienvectoren anwendet, bezw. in der Gleichung $\omega = \omega_1$, $\varrho \cdot \varrho_1 = k^2$ setzt, so erhält man die Kurve mit der Gleichung

$$\varrho_1 = \frac{k^2}{R} \sec \mu \omega_1,$$

läfst man hierin μ variieren, so erhält man unendlich viele Kurven, die G. Sacchi[6]) Côtes'sche Spiralen nannte, die jedoch heute den Namen Ährenkurven tragen[7]); im besonderen erhält man für $\mu = 3$ eine Trisektrix von Longchamps (s. Nr. **49**).

---

1) S. die *Institutiones analyticae a V. Riccato et H. Saladino collectae* (Bononiae 1756) I. Lib. III, Cap. VII, Probl. VI; *Nouvelle corresp. math.* Question 311 (IV, 1878, S. 155 u. 290).

2) S. z. B. Briot und Bouquet, *Géométrie analytique* (Paris 1878) S. 22.

3) Ridolfi, a. a. O. S. 35—37.

4) *Flores geometrici etc.*, Fig. 8[a].

5) Ridolfi, a. a. O., S. 17—19.

6) *Sulla geometria analitica delle curve piane* (Pavia 1854) S. 11. Vgl. auch Nouv. Ann. de math. 1860, S. 38.

7) Aubry, a. a. O. S. 201 und 251.

Unsere zweite Bemerkung ist die, dafs man, ohne die Arbeiten von Grandi zu kennen, auch zu den Rhodoneen gelangt ist, als man an die Lösung folgenden kinematischen Problems heranging[2]): „Die Bahn eines Punktes zu finden, der in einer geraden Linie schwingt, während diese um einen festen Punkt rotiert.“ Zum Beweise, dafs die gesuchte Kurve eine Rhodonee ist, nehmen wir den festen Punkt als Koordinatenanfang und nennen seinen veränderlichen Abstand vom bewegten Punkte s; bezeichnen wir nun mit t die Zeit, mit m die Anzahl der in der Zeiteinheit ausgeführten Schwingungen, sowie mit ϑ eine Konstante, so haben wir zunächst eine Relation von folgendem Typus

$$s = a \sin 2m\pi (t + \vartheta).$$

Ist nun φ der Winkel, den die sich drehende Gerade mit der x-Axe nach Verlauf der Zeit t bildet, so haben wir

$$x = s \cdot \cos\varphi, \qquad y = s \cdot \sin\varphi;$$

wenn nun aufserdem n die Anzahl der Umdrehungen der Geraden in der Zeiteinheit ist, und τ eine andere Konstante, so ist noch

$$\varphi = 2n\pi (t + \tau).$$

Eliminieren wir s und φ aus den vorhergehenden Gleichungen, so erhalten wir die beiden folgenden

$$x = a \sin 2m\pi (t + \vartheta) \cos 2n\pi (t + \tau),$$
$$y = a \sin 2m\pi (t + \vartheta) \sin 2n\pi (t + \tau),$$

welche die parametrische Darstellung der Bahnlinie liefern. Sind ϱ, ω die Polarkoordinaten des Punktes (x, y), so ergiebt sich daraus

$$\varrho = a \sin 2m\pi (t + \vartheta), \qquad \omega = 2n\pi (t + \tau),$$

und nach Elimination von t die Gleichung

$$\varrho = a \sin \left[\frac{m}{n} \omega + 2m\pi (\vartheta - \tau)\right],$$

welche in der That eine Rhodonee darstellt. — Die in diesem Kapitel untersuchten Kurven als Lösungen des vorhin zitierten Problems der Kinematik betrachtet, wurden Schwingungskurven genannt[2]); nach unseren Ausführungen geht hervor, dafs dieser Name im mathematischen Wörterbuche, das ohnehin schon zu reich an Namen ist, als dafs man es mit überflüssigen Synonymen überladen sollte, gestrichen werden könnte.

1) E. Auth, *Untersuchungen über diejenigen Curven, welche erzeugt werden durch Schwingungen eines Punktes auf einer Geraden, während die Gerade zugleich rotiert* (Diss. Marburg, 1866).

2) Melde, *Die Lehre von den Schwingungskurven* (Leipzig 1864).

Neuntes Kapitel.

Die geometrischen Blätter.[1])

138. Wenn alle die Kräfte, die bei der Entwickelung einer Pflanze mitwirken, mathematisch erkannt wären und ebenso der innere Mechanismus ihrer Organe, so würde man im stande sein die ganze Lebensentwickelung durch Formeln darzustellen, insbesondere würde man die Gleichungen derjenigen Kurven erhalten können, welche den Umrifs ihrer Blätter darstellen. Aber umgekehrt, wenn man auch diese Gleichungen kennte, würde man dennoch nicht das Leben jener Pflanze durch Formeln darstellen können; doch auch von diesem Ziele ist man noch weit entfernt, indem man sich begnügen mufs, die Blattumrisse durch Gleichungen darzustellen, die nicht exakt, sondern nur in einfacher Weise angenähert diese wiedergeben. Welche Bedeutung demnach für den Fortschritt der Botanik die Untersuchungen haben, welche Bodo Habenicht[2]) angestellt hat, um eine angenäherte analytische Darstellung der Form der Baumblätter zu erhalten, dies zu beurteilen möge dem Leser überlassen bleiben; wir beschränken uns hier darauf, seine mathematischen Betrachtungen (mit erläuternden Zusätzen) darzulegen[3]).

Der Umrifs eines jeden Blattes ist eine in Bezug auf eine Axe symmetrische Kurve[4]), wenn wir von einigen Ausnahmen absehen. Jeder Punkt desselben befindet sich in endlichem Abstande von irgend einem anderen beliebigen Punkte des Blattes, daher wird sich der Umrifs in Polarkoordinaten ϱ, ω durch eine Gleichung von folgendem Typus darstellen lassen

$$\varrho = F(\omega),$$

wo F im reellen Gebiete eine monodrome, kontinuierliche und endliche Funktion von ω ist. Jeder Radius vector mufs die Kurve in

1) Von Brocard angewandter Name (*Note de bibliographie des courbes géométriques.* Partie complementaire, Bar-le-Duc, 1899, S. 100). Verf. hatte früher den Namen botanische Kurven vorgeschlagen (s. Verhandlungen des I. internationalen Mathematiker-Kongresses, Leipzig 1898, S. 294).

2) *Die analytische Form der Blätter* (Quedlinburg, 1895).

3) Es dürfte wohl überflüssig sein, auf die Analogie der vorliegenden Untersuchungen mit denen über das Trifolium pratense (Nr. 111) und die Rhodoneen (vgl. das vor. Kap.) hinzuweisen. Wir wollen noch bemerken, dafs diesen das Pflanzenleben betreffenden Forschungen auf das Tierreich bezügliche entsprechen; siehe nämlich den Schlufs von Kap. 6 des folgenden Abschnittes, aufserdem J. F. Blake, *On the measurement of the curves formed by cephalopodes and other mollusk* (Phil. Magazine, 1878).

4) Sieht man von dieser einschränkenden Bedingung ab, so wächst die Zahl der darstellenden Kurven ungemein; man erhält z. B. solche, die durch die Gleichung $\varrho = a + b \cos n\omega + c \sin n\omega$ dargestellt werden, auf die auch Habenicht stiefs (a. a. O. S. 14).

einem einzigen Punkte schneiden, daher wird F ferner eine periodische Funktion mit der Periode 2π sein, also von der Form $\varphi(\sin\omega, \cos\omega)$. Wählt man nun als Polaraxe die Symmetrielinie des Blattes, so müssen gleichen und entgegengesetzten Werten von ω dieselben Werte von ϱ entsprechen: dies erfordert, dafs $\sin\omega$ in der Funktion φ nicht auftritt. Es ergiebt sich dann folgende Gestalt der Gleichung

$$\varrho = f(\cos\omega),$$

wo f eine ähnliche Funktion ist wie die vorige F. Den einfachsten Fall erhält man, indem man setzt

$$\varrho = a_0 + a_1 \cos\omega + a_2 \cos^2\omega + a_3 \cos^3\omega + \cdots\cdots + a_n \cos^n\omega \; . \; . \quad (1)$$

Setzt man nun für $\cos^k\omega$ $(k = 1, 2, 3 \ldots n)$ den Ausdruck in Funktionen von $\cos\omega$, $\cos 2\omega$, $\ldots$ $\cos k\omega$, so kann man (1) durch eine Gleichung von folgendem Typus ersetzen

$$\varrho = b_0 + b_1 \cos\omega + b_2 \cos 2\omega + b_3 \cos 3\omega + \cdots\cdots b_n \cos n\omega \; . \; . \quad (2)$$

Wenn man nun — dem Beispiele von Habenicht folgend[1]) — noch aufserdem die Bedingung einführt, dafs die Summe der Vectoren, die den Winkeln ω und $\omega + \pi$ entsprechen, gleich einer Konstanten c (genannt der Durchmesser des Blattes) sei, so erhält man

$$\varphi(\omega) + \varphi(\omega + \pi) = c,$$

für alle Werte von ω; demnach mufs in der Gleichung (1)

$$a_2 = a_4 = \cdots\cdots = 0$$

sein und in (2)

$$b_2 = b_4 = \cdots\cdots = 0.$$

Dieser Umstand reduziert die vorhin angeführten Gleichungen auf folgende Form

$$\varrho = a_0 + a_1 \cos\omega + a_3 \cos^3\omega + \cdots\cdots a_{2p+1} \cos^{2p+1}\omega \; . \; . \; . \quad (1')$$

$$\varrho = b_0 + b_1 \cos\omega + b_3 \cos 3\omega + \cdots\cdots b_{2p+1} \cos(2p+1)\omega \; . \; . \quad (2')$$

Diese stellen dann Kurven von der Ordnung $4(p+1)$ dar, deren „Durchmesser“ bezw. $2a_0$ oder $2b_0$ sind. — Setzen wir

$$\varrho_k = b_k \cos k\omega, \qquad (k = 0, 1, 3 \ldots 2p+1),$$

so erhalten wir offenbar die Gleichungen von $p + 2$ Rhodoneen; und da Gleichung (2′) infolgedessen äquivalent ist mit folgender Gleichung

$$\varrho = \varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_3 + \cdots + \varrho_p,$$

so ist klar, dafs man die durch Gleichung (2′) dargestellte Kurve durch Addition der Radienvectoren jener $p + 2$ Rhodoneen (deren erste

1) Die neue Bedingung ist jedoch von ihm nicht immer beibehalten worden, und so (S. 5—7) betrachtet er an einer Stelle die Kurven

$$\varrho = a + b \cos 2n\omega, \qquad \varrho = a + b \cos^{2n}\omega,$$

die er dann ausschliefst, weil sie eine doppelte Symmetrie besitzen.

ein Kreis ist) erhalten kann. Eine ähnliche Konstruktion erhält man auch vermittelst der Gleichung (1'). Setzt man nämlich

$$\bar{\varrho}_k = a_k \cos^k \omega\,, \qquad (k = 0, 1, 3 \ldots, 2p+1)$$

so erhalten wir die Gleichungen von $p+2$ Kurven von einer Art, mit der wir uns binnen kurzem (in Nr. **139**) beschäftigen werden, und da nun (1') wird zu

$$\varrho = \bar{\varrho}_0 + \bar{\varrho}_1 + \bar{\varrho}_3 + \cdots\cdots \bar{\varrho}_p\,,$$

so kann die durch (1') dargestellte Kurve leicht mit Hilfe jener konstruiert werden.

Der einfachste Fall der Kurven (1') und (2') ist ein Kreis. Es folgt dann jener mit der Gleichung

$$\varrho = a_0 + a_1 \cos \omega\,,$$

welche eine Pascal'sche Schnecke ist (s. Nr. **70**); da die geometrischen Blätter ohne Knoten sein sollen, so ist $a_0 > a_1$ anzunehmen. — Lassen wir p unbestimmt, so gehört dem Typus (1') auch die Kurve von der Ordnung $4(p+1)$ an, welche die Gleichung hat:

$$\varrho = a(1 + \cos^{2p+1}\omega)\,; \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Sie heifst die $(2p+1)^{\text{te}}$ Herzkurve. Ähnlich dieser sind die Kurven mit der allgemeinen Gleichung

$$\varrho = a\left(1 + \sqrt[2p+1]{\cos\omega}\right), \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

die ebenfalls von der Ordnung $4(p+1)$ sind.

Die Gleichungen (1') und (2') schienen Habenicht noch nicht hinreichend, um die Gestalt der Blätter irgend einer Pflanze gut darzustellen, und deswegen hat er sie in verschiedener Weise modifiziert[1]). Es erscheint uns nicht angebracht, hier auf diese Modifikationen einzugehen, zumal sie den Boden verlassen, der zu Anfang durch die Bestimmungen über die Funktionen F, φ und f gelegt wurde. Wir wollen dagegen bemerken, dafs die Gleichungen vom Typus (1') und (2') dennoch dazu dienen können, die Gestalt eines beliebigen Blattes mit grofser Annäherung zu bestimmen. Man betrachte nämlich auf demselben $p+2$ ausgezeichnete Punkte, und wenn man p hinreichend grofs nimmt, so bekommt man alle wichtigen Punkte des Blattes hinein. Schreibt man nun die Gleichungen (1') oder (2'), so dafs sie den Polarkoordinaten aller dieser Punkte genügen, so erhält man $p+2$ lineare Gleichungen für die Konstanten $a_0, a_1, \ldots, a_{2p+1}$, die zur Bestimmung derselben und somit auch der Gleichungen (1') oder (2') dienen können.

1) Um Beispiele zu geben, findet H. für das Blatt des Sauerklees die analytische Darstellung $\varrho = 4(1 + \cos 3\omega) + 4\sin^2 3\varphi$,

während das des Epheus wiedergegeben wird durch

$$\varrho = 3(1 + \cos^9\omega) + 2\cos\omega + \sin^2\omega - 2\sin^2 3\varphi \cos^4\frac{\omega}{2}\,.$$

Zehntes Kapitel.

Die Ovale, die dreieckigen Kurven und die Orbiformen.

139. Man betrachte einen Kreis mit dem Centrum C und dem Radius r, sowie einen Punkt O seiner Ebene (Taf. XI, Fig. 77); man ziehe durch O einen beliebigen Strahl t und nenne P den einen Schnitt desselben mit der Peripherie jenes Kreises; darauf projiziere man P senkrecht auf den Durchmesser OC in Q, dann Q in P_1 auf den Strahl, darauf P_1 in Q_1 auf OC u. s. w. Man erhält dann schliefslich einen Punkt P_n auf t, der, wenn t um O rotiert, eine Kurve durchläuft, die man nach einem Vorschlage von F. Münger eine eiförmige Kurve oder ein Oval nennt[1]). Um dessen Gleichung zu finden, nehmen wir O als Pol, OC als Polaraxe und bezeichnen mit d die Länge der Strecke OC. Dann ist die Gleichung des gegebenen Kreises:

$$\varrho^2 - 2d\varrho\cos\omega + d^2 - r^2 = 0; \quad \ldots \quad (1)$$

nennen wir dann die Radienvectoren der Punkte $P_1, P_2, \ldots P_n$ bezw. $\varrho_1, \varrho_2 \ldots \varrho_n$, so ist offenbar

$$\varrho_1 = \varrho\cos^2\omega, \quad \varrho_2 = \varrho\cos^4\omega, \quad \ldots\ldots \quad \varrho_n = \varrho\cos^{2n}\omega;$$

setzen wir nun in (1) ein $\varrho = \frac{\varrho_n}{\cos^{2n}\omega}$, so erhalten wir

$$\varrho_n^2 - 2d\varrho_n\cos^{2n+1}\omega + (d^2 - r^2)\cos^{4n}\omega = 0, \quad \ldots \quad (2)$$

welches die Polargleichung des Ovales ist. Gehen wir zu kartesischen Koordinaten über, so bekommen wir

$$(x^2 + y^2)^{2n+1} - 2dx^{2n+1}(x^2 + y^2)^n + (d^2 - r^2)x^{4n} = 0. . \quad (3)$$

Das konstruierte Oval ist also eine Kurve von der Ordnung $2(2n+1)$, welche in O einen $4n$-fachen Punkt hat, dessen zugehörige Tangenten mit der y-Axe zusammenfallen; im Anfangspunkte sind auch alle Schnitte der Kurve mit dieser Axe konzentriert; die Schnitte mit der x-Axe hingegen sind der Anfangspunkt $4n$mal gezählt und die Punkte mit den Abscissen $d \pm r$, d. h. die Endpunkte A, B des Durchmessers OC. Alle unendlich fernen Punkte der Kurve fallen in die Kreispunkte der Ebene. Die Kurve ist symmetrisch in Bezug auf die x-Axe und berührt die beiden von O an den gegebenen Kreis gezogenen Tangenten.

Nehmen wir in Gleichung (3) $n = 0$, so erhalten wir den Kreis wieder, von dem wir ausgegangen sind. Nehmen wir dagegen $n = 1$, so bekommen wir eine Kurve sechster Ordnung, dargestellt durch die Gleichung

$$(x^2 + y^2)^3 - 2dx^3(x^2 + y^2) + (d^2 - r^2)x^4; \quad \ldots \quad (4)$$

die Kreispunkte der Ebene sind Spitzen der Kurve mit der unend-

1) F. Münger, *Die eiförmigen Kurven,* Inaugural-Dissert. (Bern, 1894).

lich fernen Geraden als gemeinsamer Tangente. Jenachdem der feste Punkt O aufserhalb, auf der Peripherie oder innerhalb des gegebenen Kreises liegt, nimmt sie verschiedene Gestalt an (Taf. XI, Fig. 78a, b, c). Bemerkenswert ist der Fall $d = 0$; die entsprechende Kurve ist auch zu Oy symmetrisch, besteht demnach aus zwei gleichen geschlossenen Zügen; wegen ihrer Gestalt wurde sie von Münger Doppeleilinie genannt; sie wird in Polar- bezw. kartesischen Koordinaten durch die Gleichungen dargestellt:

$$\varrho = r\cos^2\omega, \qquad (x^2 + y^2)^3 - r^2x^4 = 0.$$

Alle Ovale sechster Ordnung können noch auf eine andere Weise konstruiert werden, die verdient hervorgehoben zu werden: Die gegebenen Stücke sind dieselben, die Punkte mögen wie vorhin mit $P, Q, P_1 \ldots$ bezeichnet werden. Man beschreibe um den Mittelpunkt Q mit dem Radius QO einen Kreis und bestimme dessen zweiten Schnitt M_1 mit t; wir behaupten, der Ort des Punktes M_1 ist ein Oval sechster Ordnung (Taf. XI, Fig. 77). Bezeichnen wir noch mit ω die Winkel QOP, QM_1P, so wird

$$\sphericalangle\, QPM_1 = \frac{\pi}{2} + \omega, \quad \sphericalangle\, PQM_1 = \frac{\pi}{2} - 2\omega,$$

daher ergiebt sich aus dem Dreiecke PQM_1

$$\frac{PM_1}{\cos 2\omega} = \frac{QM_1}{\cos\omega}.$$

Da aber $\dfrac{QM_1}{\cos\omega} = \dfrac{OQ}{\cos\omega} = OP$, so ist $PM_1 = OP\cdot\cos 2\omega$;

daraus folgt $\quad OM_1 = OP(1 + \cos 2\omega) = 2\cdot OP\cdot\cos^2\omega.$

Setzen wir nun, wie wir es vorhin gethan, $OP = \varrho$, und ferner $OM_1 = \varrho'$, so ist

$$\varrho = \frac{\varrho'}{2\cos^2\omega}.$$

Setzen wir dies in (1) ein, so findet man

$$\varrho'^2 - 4d\varrho'\cos^3\omega + 4(d^2 - r^2)\cos^4\omega = 0,$$

und dann

$$(x^2 + y^2)^3 - 4d(x^2 + y^2)x^3 + 4(d^2 - r^2)x^4 = 0;$$

da diese sich von (4) nicht unterscheidet, als nur durch die Vertauschung von d und r in $2d$ und $2r$, so ist die obige Behauptung erwiesen.

140. Zu der Reihe von Untersuchungen, welche die Bestimmung der Gleichungen von vorher gestaltlich bekannten Kurven im Auge haben, hat auch der berühmte Euler einen wichtigen Beitrag geliefert[1]). Während fast bei allen übrigen von ihm ausgehenden Forschungen ihm eine Schar von Schülern oder Kommentatoren folgte, sind die-

1) S. die Abh. *De curvis triangularibus* (Acta Academiae Sc. Imp. Petrop. pro anno MDCCLXXVIII, Pars posterior, Petersburg 1781).

jenigen Forschungen, mit denen wir uns jetzt beschäftigen wollen, soweit uns bekannt, leider von niemandem fortgesetzt worden. Es bleibt uns also, wenn wir über sie in den Hauptzügen berichten wollen, nichts anderes übrig, als getreulich die Gedanken des grofsen schweizerischen Mathematikers wieder zu geben, und wir würden erfreut sein, wenn dieser Hinweis jemanden veranlassen sollte, sich eifrigst mit diesen Fragen wieder zu beschäftigen, um Lösungen zu erhalten, die den Anforderungen in Bezug auf Strenge und Vollständigkeit besser genügen.

Dreieckige Kurven nennt man solche, deren sämtliche reellen Punkte drei endliche Bogen BC, CA, AB bilden, die sich zu zweien in den Punkten A, B, C berühren (Taf. XI, Fig. 79), die also Spitzen der Kurve sind. Ein Beispiel einer derartigen Kurve bietet die dreispitzige Hypocykloide (Nr. 72); dafs es deren noch unzählig viele andere giebt, ist zuerst von Euler bewiesen worden, indem er folgendes Problem der geometrischen Optik löste: „Gegeben ein leuchtender Punkt, eine Kurve zu finden derart, dafs jeder von jenem ausgehende Lichtstrahl nach zweifacher Reflexion an ihr zum Ausgangspunkte zurückkehrt[1].“ Die Untersuchung der dreieckigen Kurven ist schwerer als die ihrer Evolventen; es ist daher nützlicher in der Untersuchung mit diesen zu beginnen. Wir bezeichnen mit a, b, c die Länge der Bogen BC, CA, AB der dreieckigen Kurven und nehmen an, dafs der die Evolvente erzeugende Faden als Anfangslage AF eine Strecke von der Länge f habe. F ist dann der Anfang der Evolvente. Stellen wir uns nun vor, dafs der Faden sich von dem Bogen AB abwickele, dann wird zu Ende dieser Operation der Faden die Tangente an die beiden Bogen AB und BC bilden, während der die Evolvente erzeugende Punkt F in G_1 angelangt ist, so dafs $BG_1 =$ Bogen $\widehat{BA} + AF = c + f$. Man setze die Abwickelung auf dem Bogen BC fort, und man wird am Ende zu einem Punkte H gelangen, derart, dafs die Gerade CH Tangente in C an die dreieckige Kurve ist, und man hat alsdann, Bogen $\widehat{BC} + CH = BG_1$, und daher ist $CH = f + c - a$. Wickeln wir nun den Faden auf den

1) Dieses Problem findet sich formuliert in einem Briefe von Euler an Goldbach vom 16. Februar 1745 (s. P. H. Fufs, *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII Siècle,* I. St. Petersburg, 1843, S. 314) und lieferte für lange Zeit Stoff zu einem Ideenaustausch zwischen diesen Geometern, nicht nur bevor Euler die Lösung veröffentlicht hatte (*Solutio problematis in Actis Lipsiensibus propositi.* Acta erudit. 1746, oder auch a. a. O. S. 341—354), sondern auch nachher (s. das oben angeführte Werk von Fufs); die gefundene Linie wird daselbst immer mit dem Namen „curva catoptrica“ bezeichnet; eine von der Euler'schen verschiedene Methode, sie zu bestimmen, wurde von Oechlin erdacht und von Euler dem Goldbach am 25. Juni 1748 mitgeteilt (s. *Correspondance etc.* I, S. 463).

Bogen CA auf, so erhält man zuletzt eine Lage F_1 des beweglichen Punktes, derart, dafs AF_1 die dreieckige Kurve berührt, so dafs $AF_1 = \widehat{AC} + CH = f + b + c - a$. Setzen wir die Abwickelung des Fadens noch weiter fort, so erhält man die Tangente BG, an die Kurve in B, von der Länge, dafs $\widehat{AB} + BG_1 = AF_1$ und daher $BG = f + b + c - a - c = f + b - a$; im weiteren Verlauf entsteht dann die Strecke CH_1, die die Kurve wieder in C berührt, so dafs $CH_1 = \widehat{BC} + BG = a + f + b - a = f + b$; lassen wir schliefslich sich den Faden wieder auf CA aufwickeln, so kommen wir zum Ausgangspunkte F zurück. Es geht daraus hervor, dafs jede Evolvente einer dreieckigen Kurve eine geschlossene Kurve von der Gestalt eines Ovals ist, $FG_1HF_1GH_1$, wie es die Figur zeigt; alle Tangenten der dreieckigen Kurve sind doppelte Normalen des Ovales[1]). Euler nannte sie orbiforme Kurven, und stellte bei ihnen mit Hilfe folgender Überlegung eine interessante Eigenschaft fest:

Aus dem Vorigen ergiebt sich

$$F_1F = 2f - a + b + c, \quad G_1G = 2f + a - b + c,$$
$$H_1H = 2f + a + b - c.$$

Ist nun XX_1 eine beliebige Tangente der Kurve und S ihr Berührungspunkt, so ist, wenn wir z. B. annehmen, dafs sie dem Bogen AC angehöre

$$SX = \text{Bogen } \widehat{SC} + CH = \text{Bogen } \widehat{SC} + f + c - a;$$
$$SX_1 = \text{Bogen } \widehat{AS} + AF = \text{Bogen } \widehat{AS} + f$$

daher

$$SX + SX_1 = \text{Bogen } \widehat{AS} + \text{Bogen } \widehat{SC} + 2f + c - a,$$

d. h. $$XX_1 = 2f - a + b + c.$$

Folglich: **Die Normale in einem beliebigen Punkte einer orbiformen Kurve trifft diese in einem zweiten Punkte X_1, in welchem sie ebenfalls normal ist, und der Abstand der beiden Punkte X und X_1 ist konstant**; es ist dies eine bemerkenswerte Eigentümlichkeit, von der man glaubte, dafs sie ausschliefslich dem Kreise zukomme.

Setzen wir $f = a + k$, so nehmen die vorigen Relationen eine mehr symmetrische Form an, die bemerkenswert ist; sie werden dann nämlich zu

---

1) Diese Kurven sind also, um mit G. Humbert zu reden (*Sur les courbes planes rectificables,* Liouvilles Journ. 4. Ser. IV, 1888, S. 141) komplexe Kurven; er nennt einfache Kurven solche, deren Normalen im allgemeinen einfache Normalen sind, komplexe solche, bei denen jede Normale eine doppelte Normale ist; es ist bekannt, dafs eine nicht zerfallende Kurve nicht alle ihre Normalen als mehrfache von einem Grade > 2 haben kann.

$$AF = a + k, \qquad BG = b + k, \qquad CH = c + k;$$
$$AF_1 = b + c + k, \quad BG_1 = c + a + k, \quad CH_1 = a + b + k;$$
$$FF_1 = GG_1 = HH_1 = XX_1 = a + b + c + 2k.$$

141. Die oben aufgestellten Sätze eignen sich zur Auffindung der allgemeinen Gleichung der Orbiformen. Es sei nämlich FMF_1M_1 (Taf. XI, Fig. 80) eine Orbiforme bezogen auf die Doppelnormale FF_1 als Axe; MM_1 sei eine zweite beliebig gewählte Doppelnormale, welche FF_1 in N schneidet; P und P_1 seien die Projektionen von M und M_1 auf FF_1. Wir setzen

$$FF_1 = MM_1 = 2f; \quad FP = X, \quad PM = Y, \quad PP_1 = x,$$
$$P_1M_1 = -y, \quad \frac{dY}{dX} = P, \quad \frac{dy}{dx} = p,$$

und erhalten dann:

$$MN = Y\sqrt{1+P^2}, \qquad M_1N_1 = -y\sqrt{1+p^2}, \qquad P = p.$$

Sei S der Punkt, in welchem das von M auf FF_1 gefällte Lot die durch M_1 zu FF_1 gezogene Parallele schneidet, so ist, weil

$$\frac{MS}{MP} = \frac{MM_1}{MN},$$

$$MS = 2f\frac{MP}{MN} = \frac{2f}{\sqrt{1+P^2}}, \quad \text{und daher } M_1S = \frac{2fP}{\sqrt{1+P^2}}.$$

Ferner ist, weil $P = p$,

$$MS = \frac{2f}{\sqrt{1+p^2}}, \qquad M_1S = \frac{2fp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Da ferner

$$MS = MP + M_1P_1 = Y - y, \qquad M_1S = FP_1 - FP = x - X,$$

so ergiebt sich

$$Y - y = \frac{2f}{\sqrt{1+p^2}}, \qquad x - X = \frac{2fp}{\sqrt{1+p^2}} \quad \ldots \quad (5)$$

Wir setzen nun

$$X + x = 2Q, \qquad Y + y = 2R. \quad \ldots \quad (6)$$

Kombinieren wir diese mit der vorigen Gleichung, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} Y &= R + \frac{b}{\sqrt{1+p^2}} \\ X &= Q - \frac{fp}{\sqrt{1+p^2}} \end{aligned}\right\} \ldots (7) \qquad \left.\begin{aligned} y &= R - \frac{f}{\sqrt{1+p^2}} \\ x &= Q + \frac{fp}{\sqrt{1+p^2}} \end{aligned}\right\} \ldots (8)$$

Differenzieren wir diese, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} dY &= dR - \frac{fp \cdot dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}} \\ dX &= dQ - \frac{f \cdot dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} dy &= dR + \frac{fp \cdot dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}} \\ dx &= dQ + \frac{f \cdot dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}} \end{aligned}\right\},$$

und weil nun
$$\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx} = p,$$
so folgt
$$dR \mp \frac{fp\cdot dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}} = p\cdot dQ \mp \frac{fp\cdot dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}},$$
worin die Vorzeichen einander entsprechen, und die dann darauf zurückgehen, daſs $dR = p\cdot dQ$, mit anderen Worten, daſs
$$R = \int p\cdot dQ\,. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$
Da wir auf alle Bedingungen des Problems Rücksicht genommen haben, so sehen wir: Nimmt man für Q eine beliebige Funktion von p, die der einzigen Bedingung unterworfen ist, daſs die Integration $\int p\cdot dQ$ ausführbar sei, so liefert die Gleichung (9) R, und daher liefern die Gleichungen (7) die Koordinaten des Punktes M in Funktionen des Parameters p; die Gleichungen (8) liefern dann die des entsprechenden Punktes M_1; belassen wir den Wurzeln ihre Doppeldeutigkeit, so sind die Gleichungen (7) und (8) nicht wesentlich verschieden. Wir können daher die Gleichung (8) als allgemeine parametrische Darstellung der Orbiformen ansehen.

Zu einer anderen bequemeren Darstellung gelangt man, indem man beachtet, daſs sich (9) auch schreiben läſst
$$R = pQ - \int Q\cdot dp\,;$$
setzt man dann $\int Q\cdot dp = S$, oder auch $Q = \frac{dS}{dp}$, so hat man
$$R = p\frac{dS}{dp} - S,$$
und daher
$$x = \frac{dS}{dp} + \frac{fp}{\sqrt{1+p^2}}, \qquad y = p\frac{dS}{dx} - S - \frac{f}{\sqrt{1+p^2}} \quad .\,. \quad (10)$$
In dieser neuen parametrischen Darstellung der Orbiformen ist S eine beliebige Funktion von p, die jedoch in der Art zu wählen ist, daſs die x, y immer als endlich sich ergeben; wollen wir eine algebraische Kurve erhalten, so kann man setzen
$$S = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \cdots \alpha_m p^m}{\beta_0 + \beta_1 p + \beta_2 p^2 + \cdots \beta_n p^n},$$
wo $m < n$ ist und der Nenner keine reellen linearen Faktoren enthält.

Aus Gleichung (10) kann man die analytische Darstellung der dreieckigen Kurven ableiten, wenn man sich erinnert, daſs diese die Evoluten der Orbiformen sind. Um die Rechnung zu vereinfachen, beachten wir, daſs die ∞^1 Orbiformen, die den unendlich vielen Werten, welche die Konstante f annehmen kann, entsprechen, die Evolventen einer und derselben dreieckigen Kurve sind, so kann man, um die Darstellung dieser zu erhalten, annehmen, daſs für f ein möglichst günstiger Wert gewählt sei, z. B. $f = 0$; dann hat man
$$x = \frac{dS}{dp}, \qquad y = p\frac{dS}{dp} - s. \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Benutzen wir die bekannten Ausdrücke für die Koordinaten t und u des Krümmungsmittelpunktes, so ergiebt sich

$$t = \frac{dS}{dp} - p(1+p^2)\frac{d^2S}{dp^2}, \qquad u = p\frac{dS}{dp} - S + (1+p^2)\frac{d^2S}{dp^2}. \quad . \quad (12)$$

Dies ist die gesuchte analytische Darstellung der dreieckigen Kurve; sie zeigt, dafs der Krümmungsradius R der Kurve (11) gegeben wird durch

$$R = \sqrt{(1+p^2)^3}\,\frac{d^2S}{dp^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Aus (12) kann man ableiten

$$\frac{dt}{dp} = -3p^2\frac{d^2S}{dp^2} - p(1+p^2)\frac{d^3S}{dp^3}, \quad \frac{du}{dp} = 3p\frac{d^2S}{dp^2} + (1+p^2)\frac{d^3S}{dp^3} \quad (14)$$

und daher ist

$$\frac{dt}{dp} + p\frac{du}{dp} = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

in jedem reellen Punkte der Kurve, für welchen $\frac{dt}{dp} = 0$, ist auch $\frac{du}{dp} = 0$ und umgekehrt, daher ist dieser Punkt ein singulärer Punkt, d. h. eine der drei Spitzen der Kurve (vorausgesetzt, dafs diese die einzigen vielfachen Punkte der Kurve seien).

Aus der Gleichung (14) leitet man ferner ab, wenn s den Bogen der dreieckigen Kurve bedeutet:

$$\frac{ds}{dp} = \sqrt{\left(\frac{dt}{dp}\right)^2 + \left(\frac{du}{dp}\right)^2} = \frac{d}{dp}\left[\sqrt{(1+p^2)^3}\,\frac{d^2S}{dp^2}\right],$$

weshalb wegen (13) $\qquad s = R + Const.,$

was man übrigens voraussehen konnte, weil ja die Kurve (12) die Evolute der Kurve (10) ist.

Elftes Kapitel.

Die Multiplikatrix- und die Mediatrix-Kurven.

142. Bei der in Nr. **139** dargelegten Konstruktion der Münger'schen Ovale führen wir die spezielle Voraussetzung ein, dafs der Punkt O auf der Peripherie des gegebenen Kreises liegt; dies ist gleichbedeutend mit der Annahme $d = r$; die dortigen Gleichungen (2) und (3) werden dann zu

$$\varrho_n = 2r \cdot \cos^{2n+1}\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

resp.

$$(x^2 + y^2)^{n+1} = 2r\,x^{2n+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und stellen dann eine Kurve von der Ordnung $2(n+1)$ dar, die im Anfange einen $(2n+1)$fachen Punkt hat, dessen sämtliche Tangenten mit der y-Axe zusammenfallen.

Die einfachste Kurve dieser Art, nächst dem Kreise, erhält man, wenn $n = 1$; in diesem Falle ergiebt sich eine Kurve vierter Ordnung, die einige Astronomen, unter diesen sogar Kepler[1]), zur Darstellung der Bahn des Planeten Mars angewendet haben; später wurde sie von Pater Villapaudo erdacht, der sie wegen der von ihr gemachten Anwendung auf die Verdoppelung des Würfels Proporzionatrice secondaria nannte[2]); mehr als zwei Jahrhunderte später (1868) wurde dieselbe Kurve von L. Seidel bemerkt, der sie wegen ihrer Form (s. Taf. XI, Fig. 78 *b*) das eigentliche Oval nannte[3]); endlich vor wenigen Jahren traf G. de Longchamps im Verlaufe seiner Untersuchungen über diejenigen Linien, die sich mit Lineal und Winkelscheit konstruieren lassen, auch auf diese Kurve und gab ihr den Namen folium simple[4]). Aus der Polargleichung der Kurve

$$\varrho = 2r \cos^3 \omega$$

ergiebt sich die Kurvenfläche (die Kepler vergebens zu bestimmen versucht hatte) als

$$F = 4d^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \omega \cdot d\omega = 4r^2 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\pi}{2} = \frac{5}{8} r^2 \pi,$$

d. i. also $\frac{5}{8}$ der Fläche des gegebenen Kreises.

Kehren wir zur allgemeinen Gleichung (1) zurück. Wir betrachten einen beliebigen Punkt P_n der durch sie dargestellten Kurve; wir projizieren ihn in H auf den Durchmesser OC und tragen dann auf der Geraden OP_n die Strecke $OM = OH$ ab; der Ort der Punkte M hat dann offenbar die Polargleichung:

$$\varrho = 2r \cos^{2n+2} \omega, \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

ist daher eine ähnliche Kurve, wie die durch (1) dargestellte. Zwei andere verwandte Kurven werden erhalten durch die Konstruktionen, die wir uns jetzt anschicken darzulegen:

Gegeben der Kreis mit dem Centrum C und dem Radius r und einer seiner Durchmesser OCO' (Taf. XI, Fig. 81). Man ziehe durch O einen beliebigen Strahl t und bestimme dessen Schnitt M_1 mit der in O' zu OO' errichteten Senkrechten; die in M_1 zu t errichtete Senkrechte schneide diesen Durchmesser in N_1 und die in N_1 zu OO' errichtete Senkrechte scheide t in $M_2 \ldots$; fährt man so weiter fort, erhält man schliefslich auf t einen Punkt M_n, dessen geometrischen

1) *Astronomia nova* (Prag 1609) S. 337.

2) V. Viviani, *Quinto libro di Euclide o Scienza universale delle proporzioni* (Florenz 1647) S. 275—280.

3) A. Wittstein, *Notiz über das eigentliche Oval* (Archiv, 2. Ser. XIV, 1895).

4) *Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre* (Paris 1890) S. 126. Vgl. *Cours de problèmes de géométrie analytique* II. (Paris 1899) S. 400.

Ort wir nun bestimmen wollen. Beachten wir zu dem Zwecke, dafs, wenn ω der Winkel zwischen den Geraden OO' und t ist, wir der Reihe nach haben

$$OM_1 = \frac{2r}{\cos\omega}, \quad ON_1 = \frac{2r}{\cos^2\omega}, \quad OM_2 = \frac{2r}{\cos^3\omega} \cdots\cdots$$

$$OM_n = \frac{2r}{\cos^{2n-1}\omega};$$

der gesuchte Ort hat folglich die Polargleichung

$$\varrho = \frac{2r}{\cos^{2n-1}\omega}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

er ist demnach eine Kurve $(2n-1)$ter Ordnung, die den Anfang als $(2n-2)$fachen Punkt hat. Sie wurde von Cartesius erfunden, der, um sie zu konstruieren, ein geeignetes Gefüge von Winkelscheiten ersann und sich derselben bediente, um zwischen zwei Strecken eine beliebige mittlere Proportionale zu konstruieren[1]); später widmete ihr der Pater Caraccioli ein besonderes Kapitel seines schon angeführten Werkes[2]). Setzen wir im speziellen $n = 2$, so geht sie auf die kubische Duplikatrix von Longchamps zurück (s. Nr. **50**). — Wenn wir nun in dem Punkte M_n die Senkrechte M_nK zu t errichten und auf dieser Geraden die Strecke $OR = OK$ abtragen, so erhalten wir offenbar als Ort des Punktes R, die Kurve mit folgender Gleichung

$$\varrho = \frac{2r}{\cos^{2n}\omega}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Ein Blick auf die Gleichungen (1), (3), (4) und (5) zeigt, dafs wir im stande sind, punktweise alle Kurven zu konstruieren, die in Polarkoordinaten durch eine Gleichung von folgendem Typus dargestellt werden können

$$\varrho = a \cdot \cos^m\omega, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

wo m eine beliebige positive oder negative ganze Zahl ist.

143. Zu der Kategorie der durch Gleichung (4) dargestellten Kurven gehört auch eine Kurve vierter Ordnung, die — wenn wir die Konjektur und die Schlüsse P. Tannery's[3]) annehmen wollen — schon von Eudoxus von Knidos angewandt sein dürfte, um das Delische Problem zu lösen. Damit der Leser erkenne, wohin die Argumentationen des bekannten gelehrten Franzosen zielen[4]), ist es nötig sich zu erinnern, dafs Archytas von Tarent eine sehr geniale Lösung jenes Problems erdacht hat, die sich auf stereometrische Be-

---

1) *La géométrie* (Paris 1886) S. 17.

2) *De lineis curvis liber* (Pisis 1740) S. 112—126.

3) *Sur les résolutions du problème de Délos par Archytas et par Eudoxe* (Bordeaux Mém. 2e Ser. II, 1878).

4) Näheres hierüber sehe man in G. Loria, *Le scienze esatte nell' antica Grecia,* Lib. I, Nr. 51, 52, 73.

trachtungen stützt; er führte nämlich jene berühmte Aufgabe auf die Untersuchung der Schnitte der drei Flächen, Cylinder, Kreisring, Kegel zurück, die durch folgende drei Gleichungen dargestellt sind:

$$x^2 + y^2 = ax, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = a\sqrt{x^2 + y^2},$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{b^2}x^2 \quad (\text{wo } a > b).$$

Um sich obige Zurückführung klar zu machen, setze man

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad v = \sqrt{x^2 + y^2},$$

dann wird

$$v^2 = ax, \qquad u^2 = av, \qquad u = \frac{a}{b}x,$$

und daher

$$a:u = u:v = v:b,$$

somit sind u und v die gesuchten mittleren Proportionalen. Während nun der theoretische Wert dieser Lösung von niemandem in Zweifel gezogen wird, ist der praktische Nutzen kurzerhand zu verneinen, was nicht Wunder nehmen kann, wenn man weifs, in welcher Weise sie von dem Kommentator Eutokius von Askalon dargestellt wurde[1]). Sie kann jedoch in eine andere völlig ausführbare umgewandelt werden, wenn man die Projektionen der Kurven, in welchen diese drei Hilfsflächen sich gegenseitig schneiden, auf die Koordinatebenen betrachtet. Von diesen Projektionen bieten sich zunächst die auf die xy-Ebene dar; die eine ist der Kreis $x^2 + y^2 = ax$, die andere eine Kurve, welche als kartesische Gleichung hat

$$a^2(x^2 + y^2) = \frac{a^4}{b^4}x^4, \quad \dots\dots \quad (7)$$

und als Polargleichung

$$\varrho = \frac{b^2}{a}\frac{1}{\cos^2\omega}. \quad \dots\dots \quad (8)$$

Diese Kurve ist es, von der Tannery annimmt, dafs sie von Eudoxus angewendet sei, um in der Ebene die von seinem Lehrer entworfene Konstruktion auszuführen, und dafs dieses die von ihm mit dem vagen Namen Kampyla (καμπύλη γραμμή) bezeichnete Kurve sei.

Um sie zu zeichnen, kann man in folgender Weise verfahren: Man nehme (Taf. XI, Fig. 82) die beiden Strecken $AD = a$ und $AB = b$ so gegeneinander geneigt, dafs der Winkel ABD ein rechter wird, ziehe dann durch A eine beliebige Gerade, welche das von B auf AD gefällte Lot BE im Punkte G schneidet; dann trage man auf AD die Strecke $AH = AG$ ab, die in H zu AD errichtete Senkrechte schneidet AG in einem Punkte P der durch Gleichung (8) dargestellten Kurve. Diese ist symmetrisch in Bezug auf beide Koordinataxen, hat den Anfang als isolierten Punkt, und ihre reellen

1) *Archimedis opera omnia* ed. Heiberg, III. (Lipsiae 1881) S. 98 ff.

Punkte liegen alle aufserhalb des Streifens der Ebene, der von den beiden Geraden $x = \pm \frac{b^2}{a}$ begrenzt wird. Sie ist folgender parametrischer Darstellung fähig:

$$x = \frac{b^2}{a} \frac{1}{\cos \omega}, \qquad y = \frac{b^2}{a} \frac{\sin \omega}{\cos^2 \omega}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

aus welcher sich für die drei Punkte (α), (β), (γ) die Kollinearitätsbedingung ergiebt

$$\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{tg} \alpha & \cos \alpha \\ 1 & \operatorname{tg} \beta & \cos \beta \\ 1 & \operatorname{tg} \gamma & \cos \gamma \end{vmatrix} = 0,$$

oder auch

$$\cos(\beta + \gamma) + \cos(\gamma + \alpha) + \cos(\alpha + \beta) = 1.$$

Setzen wir $\alpha = \beta = \gamma = \vartheta$, so findet man die Gleichung

$$3 \cos 2\vartheta = 1$$

für die Bestimmung der Wendepunkte der Kurve; diesen entsprechen demnach die Werte

$$\vartheta = \operatorname{arc} \cos \left(\pm \sqrt{\frac{2}{3}} \right);$$

dies zeigt uns, dafs die Kurve zu Wendepunkten die vier Punkte mit den Koordinaten hat

$$x = \pm \frac{b^2}{a} \sqrt{\frac{3}{2}}, \qquad y = \pm \frac{b^2}{a} \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

B. Tortolini[1]) hat die Beobachtung gemacht, dafs die (7) eine Kurve ist, die man auf zwei verschiedene Arten als Spezialfall einer von einem Kegelschnitt abgeleiteten Kurve ansehen kann. Um sich davon zu überzeugen, betrachte man einen beliebigen Punkt M der Ellipse (s. Taf. XI, Fig. 83)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

und bestimme den Schnitt T der zugehörigen Tangente mit der Fokalaxe und ferner den Punkt M', in welchem die Gerade OM die Parallele durch T zur anderen Axe schneidet. Die Gleichung des Ortes von $M'(x', y')$ ist nichts anderes als das Resultat der Elimination von x und y aus den drei Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}, \qquad xx' = a^2,$$

lautet also

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = \frac{x'^4}{a^4}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

welche im Falle $b = a$ identisch mit (7) ist. — Wenn man dagegen, nachdem die Normale in M an die genannte Ellipse gezogen ist, den

1) S. die bibliographische Revue, *Sopra alcune curve derivate dall' ellisse* (Annali di Matem. IV, 1861).

Schnittpunkt M_1 derselben mit der durch T zur y-Axe gezogenen Parallelen bestimmt, so erhält man die Gleichung des Ortes von $M_1(x_1, y_1)$ durch Elimination von x und y aus den Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad xx_1 = a^2, \qquad \frac{a^2 x_1}{x} - \frac{b^2 y_1}{y} = a^2 - b^2$$

als

$$b^2 x_1^2 y_1^2 = (x_1^2 - a^2)(x_1^2 - a^2 + b^2)^2; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

auch diese nimmt im Falle $b = a$, von dem Faktor x_1^2 befreit, die Form von (7) an, wie oben angedeutet.

144. Diejenigen Kurven, welche — in gleicher Weise wie die meisten in diesem Kapitel auftretenden — zur Lösung des verallgemeinerten Delischen Problems, d. h. zur Vervielfältigung des Würfels und zur Einschaltung einer beliebig vielfachen mittleren Proportionale zwischen zwei gegebenen Strecken dienen können, kann man Multiplikatrix- bezw. Mediatrix-Kurven nennen. Zu dieser grofsen Kurven-Gattung gehören auch vier Gruppen von Kurven, die Alexis Clairaut erdacht hat, als er erst zwölf und ein halbes Jahr alt war. Die Abhandlung, in welcher er diese veröffentlichte, erntete in der Sitzung vom 18. Mai 1726 die Billigung und den Beifall der Pariser Akademie und wurde kurz darauf durch Vermittelung der Berliner Akademie veröffentlicht[1]); wir wollen hier dabei verweilen ihren Inhalt darzulegen.

I. Es sei ein rechter Winkel xOy gegeben (Taf. IX, Fig. 84) und auf dem einen Schenkel desselben ein Punkt A; man suche den Ort des Punktes M, so dafs, wenn man die Senkrechte MQ auf Ox fällt, $\overline{MQ}^2 = OA \cdot OM$.

Die Gleichung dieses Ortes ist offenbar

$$y^2 = a\sqrt{x^2 + y^2}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

der Ort selbst ist demnach eine Kampyla. Diese Gleichung läfst sich aber leicht verallgemeinern und giebt dann, wenn m eine positive rationale Zahl ist,

$$y^m = a^{m-1}\sqrt{x^2 + y^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

welche eine neue Kurve darstellt, deren Anwendung auf das verallgemeinerte Delische Problem wir zeigen wollen. Zu dem Zwecke beschreiben wir um den Mittelpunkt O mit OA als Radius einen Kreis; er schneide die Gerade OM in G, während diese von dem in A auf Ox errichteten Lote in F geschnitten wird. Man erkennt nun leicht, dafs die durch Gleichung (11) dargestellte Kurve sich der durch

$$\overline{OF}^2 = OG \cdot OM$$

ausgedrückten Eigenschaft erfreut. OF ist also mittlere Proportionale

1) *Quatre problèmes sur de nouvelles courbes par M. Alexis Clairaut le Fils* (Miscellanea Berolinensia IV, Berlin 1734).

zwischen OG und OM. Würde hingegen OF die n^{te} mittlere Proportionale zwischen denselben Strecken OG und OM sein, so würde man haben

$$\overline{OF}^{n+1} = \overline{OG}^n \cdot OM,$$

und der Ort der Punkte M hätte die Gleichung:

$$\frac{a^{n+1}(x^2+y^2)^{\frac{n+1}{2}}}{y^{n+1}} = a^n(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}},$$

oder

$$y^{1+\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}\sqrt{x^2+y^2}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12')$$

und diese Gleichung fällt mit (12) zusammen, wenn man $m = 1 + \frac{1}{n}$ setzt. Dies zeigt, dafs jede Kurve vom Typus (12′) zur Bestimmung der n^{ten} mittleren Proportionale dienen kann.

Wenn $m = \frac{p}{q}$, wo p, q positive ganze, relativ prime Zahlen sind, so ist die Ordnung der durch (12) dargestellten Kurve, wenn q ungerade ist, gleich der gröfseren der beiden Zahlen $2p$, $2q$, jedoch wenn q gerade ist, gleich der gröfseren der beiden Zahlen p, q.

II. Die Daten seien dieselben wie bei der vorigen Aufgabe; man suche den Ort des Punktes M, so dafs $\overline{OM} \cdot \overline{QM} = \overline{OA}^2$. Die Gleichung derselben ist ersichtlich

$$\sqrt{x^2+y^2} \cdot y = a^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Durch Verallgemeinerung wird sie zu

$$\sqrt{x^2+y^2} \cdot y^{m-1} = a^m. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Nun kann die Kurve (13) auch durch die Relation

$$\overline{OM}^2 = OF \cdot OG$$

definiert werden, sie ist also der Ort der Punkte M, derart, dafs OM mittlere Proportionale zwischen OF und OG ist. Suchen wir ähnlicherweise den Ort derjenigen Punkte M, bei welchen OM die n^{te} mittlere Proportionale zwischen OF und OG wird, so bekommt man aus der Relation

$$\overline{OM}^{n+1} = OF \cdot OG^n,$$

die Gleichung

$$\sqrt{x^2+y^2} \cdot y^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}+1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14')$$

welche mit (14) koinzidiert, wenn man $m = 1 + \frac{1}{n}$ setzt; für einen derartigen Wert von m ist also die Kurve (14) eine Mediatrix. Sie ist, wenn $m = \frac{p}{q}$ von der Ordnung p oder $2p$, jenachdem q gerade oder ungerade. Schreiben wir (14) folgendermafsen

$$y^{1-m} = a^{-m}\sqrt{x^2+y^2},$$

so sieht man, daſs die Gleichung (14) als unter (13) einbegriffen aufgefaſst werden kann, da sie zuläſst, daſs m auch negative Werte annehmen kann. Clairaut hat die durch (13) und (14) dargestellten Kurven mit dem Namen Courbes des médianes paraboliques et hyperboliques bezeichnet.

III. Die Daten seien wieder dieselben; man beschreibe um das Centrum O den Kreis mit dem Radius OA, er schneide die Ordinate MQ des Punktes M in G; gesucht wird der Ort der Punkte M, so daſs MG mittlere Proportionale zwischen OA und QG ist. Seine Gleichung ist offenbar

$$\sqrt{a^2 - x^2} \cdot a = y^2; \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

durch Verallgemeinerung erhält man die Kurve mit der Gleichung

$$a(a^2 - x^2)^{\frac{n}{2}} = y^{n+1}. \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

IV. Wenn man schlieſslich — unter Beibehaltung der bei der vorigen Aufgabe gemachten Annahmen — will, daſs OA mittlere Proportionale zwischen QM und QG wird, so erhält man als Ort der Punkte M eine Kurve, die durch die Gleichung

$$\sqrt{a^2 - x^2} \cdot y = a^2 \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

dargestellt wird; und wenn man auch diese verallgemeinert, gelangt man zu

$$y \cdot (a^2 - x^2)^{\frac{n}{2}} = a^{n+1}. \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

Wir überlassen es dem Leser, die so gewonnenen Gleichungen zu diskutieren; bis jetzt hat man an ihnen noch keine weiteren bemerkenswerten Eigenschaften entdeckt, als daſs sie zur Lösung der oben angeführten berühmten Probleme dienen können.

Zwölftes Kapitel.

Die Sektrix-Kurven.

145. Nachdem die Mathematiker eingesehen hatten, daſs das alte Problem der Dreiteilung eines Winkels sich durch alleinige Anwendung der Geraden und des Kreises nicht lösen lasse, richteten sie ihre Bemühungen dahin, leicht zu zeichnende Kurven zu ersinnen, welche zu denselben Zwecken dienen könnten. Viele der vorhergehenden Seiten legen Zeugnis davon ab, welche Vorteile infolgedessen der Theorie der ebenen Kurven zu gute gekommen sind. Nicht weniger fruchtbar waren die wiederholten und vielfachen Anstrengungen, die man machte, um das allgemeinere Problem der Teilung eines Winkels

in beliebig viele gleiche Teile zu lösen. Hierfür hat man, aufser den Rhodoneen (Kap. 8)[1]) viele andere spezielle Linien in Anwendung gebracht. Wir wollen nun die wichtigsten von ihnen anführen, jedoch die allgemeine Bemerkung voraufschicken, dafs nur diejenigen Sektrix-Kurven einen wirklichen Nutzen in der Praxis gewähren, die sich mechanisch durch kontinuierliche Bewegung erzeugen lassen.

I. In demjenigen der *Opuscula mathematica Thomae Cevae* (Mediolani, 1699), welches den Titel trägt *Cycloidum anomalarum descriptio*, findet sich (S. 31) die Konstruktion einer neuen Kurve, die der Autor Cyclois anomala nennt, und deren Anwendung auf die Teilung eines Winkels in eine beliebige ungerade Anzahl gleicher Teile er darlegt. Die Entstehung derselben ist folgende: Gegeben ein Kreis mit dem Centrum O und dem Radius a, sowie eine durch den Mittelpunkt gehende Gerade Ox (Taf. XII, Fig. 85); der eine Schnitt derselben mit der Peripherie heifse A. Man ziehe nun durch O eine beliebige Gerade r, welche die Peripherie in M schneidet und zeichne nun der Reihe nach auf Ox und auf r die Punkte $A_1, A_2, A_3 \ldots,$ $M_1, M_2, M_3 \ldots$ derart, dafs $MA_1 = A_1M_1 = M_1A_2 = A_2M_2 = \cdots = a$; variiert man nun r, indem man sie um O dreht, so beschreiben die Punkte $A_1, A_2, A_3 \ldots$ ebenso viele Ceva'sche Cykloiden[2]). Suchen wir die Gleichungen derselben für ein Polarkoordinatensystem mit O als Pol, Ox als Axe. Zu dem Zwecke bezeichnen wir mit ω den Winkel der Geraden r mit Ox, mit $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \ldots.$ die Strecken $OM_1, OM_2, OM_3 \ldots.$; dann haben wir ersichtlich

$$\sphericalangle MOA_1 = \sphericalangle MA_1O = \omega;$$
$$\sphericalangle MM_1A_1 = \sphericalangle A_1MM_1 = 2\omega,$$
$$\sphericalangle M_1A_1A_2 = \sphericalangle M_1A_2A_1 = 3\omega;$$
$$\sphericalangle M_2M_1A_2 = \sphericalangle M_1M_2A_2 = 4\omega, \ldots.. \text{ u. s. w.}$$

aufserdem ist

$$OM = a; \quad MM_1 = 2a\cos 2\omega; \quad M_1M_2 = 2a\cos 4\omega; \quad \text{u. s. w.}$$

Daher ist

$$\varrho_k = OM + MM_1 + \cdots + M_{k-1}M_k$$
$$= a + 2a\cos 2\omega + 2a\cos 4\omega + \cdots + 2a\cos 2k\omega,$$

oder auch

$$\varrho_k = a + 2a\frac{\sin k\omega \cdot \cos(k+1)\omega}{\sin\omega} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Dies ist die Polargleichung der k^{ten} Ceva'schen Cykloide. Geht man zu kartesischen Koordinaten über, so bekommt man:

---

1) S. Ridolfi, *Di alcuni usi delle epicicloidi e di uno strumento per la loro descrizione* (Florenz 1844).

2) Wir glauben nicht zu irren, wenn wir daran festhalten, dafs der italienische Geometer zur Erfindung seiner Kurven durch das 8[te] Lemma des Archimedes veranlafst wurde.

$$a^2(x^2+y^2)^{2k-1} = \Big\{(x^2+y^2)^k - 2a\Big[\binom{k}{1}x^{k-1}y - \binom{k}{3}x^{k-3}y^2 + \cdots\Big]$$
$$\Big[\binom{k+1}{0}x^{k+1} - \binom{k+1}{2}x^{k-1}y^2 + \cdots\Big]\Big\}^2, \quad . \quad . \quad (2)$$

woraus hervorgeht, dafs die entsprechende Kurve von der Ordnung $4k$ ist. Denken wir uns nun eine solche Kurve konstruiert und legen einen gegebenen Winkel α mit dem einen Schenkel auf Ox und bestimmen den Schnitt des anderen mit $(k-1)^{\text{ten}}$ der genannten Cykloiden, so liefert dieser Schnittpunkt mit O verbunden einen Winkel $=\frac{\alpha}{2k+1}$; man ersieht daraus, dafs die Ceva'schen Kurven thatsächlich Sektrix-Kurven sind.

146. II. Es seien zwei feste Punkte A und A' gegeben (Taf. XII, Fig. 86), man betrachte den Ort eines Punktes P (Sektrix-Kurve von Schoute genannt), so dafs, wenn man die Geraden PA, PA' zieht, der Winkel PAA', innerhalb des von den beiden festen und dem beweglichen Punkte gebildeten Dreiecks in einem bestimmten Verhältnisse zu dem Aufsenwinkel $PA'B$ steht[1]).

Es sei $2a$ die Länge der Strecke AA'; n und n' seien zwei positive teilerfremde ganze Zahlen, von denen die erstere kleiner als die zweite ist, und ferner
$$\frac{\sphericalangle PAA'}{n} = \frac{\sphericalangle PA'B}{n'}.$$

Bezeichnet man nun den gemeinsamen Wert dieser Verhältnisse mit φ, so ist
$$\sphericalangle PAA' = n\varphi, \qquad \sphericalangle PA'B = n'\varphi.$$

Nehmen wir jetzt ein rechtwinkliges kartesisches System mit AA' als x-Axe und der Mitte von AA' als Anfangspunkt, so ist, wenn PH senkrecht zu AA' gezogen wird,
$$y = (x+a)\operatorname{tg} n\varphi = (x-a)\operatorname{tg} n'\varphi; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$
daher
$$x = \frac{\sin(n'+n)\varphi}{\sin(n'-n)\varphi}, \qquad y = 2a\frac{\sin n\varphi \cdot \sin n'\varphi}{\sin(n'-n)\varphi}, \quad . \quad . \quad (4)$$
und dies ist die bequemste parametrische Darstellung der Kurve. Sie zeigt, dafs die betreffende Kurve symmetrisch in Bezug auf die Gerade AA' ist, wie dies aufserdem auch deutlich aus der Definition der Kurve hervorgeht. Aus Gleichung (3) folgt
$$\frac{x+a}{x-a} = \frac{n'\frac{\operatorname{tg} n'\varphi}{n'\varphi}}{n\frac{\operatorname{tg} n\varphi}{n\varphi}},$$

1) P. H. Schoute, *Sur les courbes sectrices* (Journ. de math. spéc. 2e Ser. IV, 1885). Setzt man $\sphericalangle PAA' = \omega$, $PA'A = \omega'$, so hat man $\omega = n\varphi$, $\omega' = \pi - n'\varphi$, daher $n'\omega + n\omega = n\pi = Const.$; demnach gehören die Schoute'schen Kurven zur Klasse der allgemeinen Strophoiden (s. Nr. 41).

und daraus
$$\lim_{\varphi=0}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)=\frac{n'}{n}.$$

Es ergiebt sich hieraus, dafs die Kurve die Gerade AA' in einem Punkte C schneidet, derart, dafs $\frac{x_0+a}{x_0-a}=\frac{n'}{n}$; die Abscisse x_0 von C wird also gegeben durch

$$x_0=a\frac{n'+n}{n'-n}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Setzt man $PA=\varrho$ und $PA'=\varrho'$, so hat man

$$\varrho=\sqrt{(x+a)^2+y^2}, \qquad \varrho'=\sqrt{(x-a)^2+y'^2}.$$

Alsdann geben die Gleichungen (4)

$$\varrho=2a\frac{\sin n'\varphi}{\sin(n'-n)\varphi}, \qquad \varrho'=2a\frac{\sin n\varphi}{\sin(n'-n)\varphi}. \quad \ldots \quad (6)$$

Bezeichnen wir nun die Winkel DAA' und $PA'B$ mit ω und ω', so ist $n\varphi=\omega$, $n'\varphi=\omega'$, und die Gleichungen (6) verwandeln sich in folgende

$$\varrho=2a\frac{\sin\frac{n'}{n}\omega}{\sin\left(\frac{n'}{n}-1\right)\omega}, \qquad \varrho'=2a\frac{\sin\frac{n}{n'}\omega'}{\sin\left(1-\frac{n}{n'}\right)\omega'}. \quad \ldots \quad (6')$$

Jede derselben stellt eine der betrachteten Kurven in Polarkoordinaten dar.

Die Gleichungen (4) lassen erkennen, dafs im allgemeinen x und y unendlich werden, wenn
$$(n'-n)\varphi=k\pi,$$
wo k eine ganze Zahl ist, ausgenommen ist $k=0$ (weil dies zu dem Punkte C in endlicher Entfernung führt); setzen wir $k=1, 2, 3, \ldots\ldots, n'-n-1$, so erhalten wir für φ $n'-n-1$ Werte inkongruent $(mod\ \pi)$, denen ebensoviele reelle unendlich ferne Punkte der Kurve entsprechen. Suchen wir die entsprechenden Asymptoten, indem wir uns der Gleichungen (6′, 1) bedienen. Wir beachten, dafs die unendlich fernen Punkte der Kurve folgenden Werten von ω entsprechen: $\frac{kn\pi}{n'-n}$, wo $k=1, 2, 3, \ldots\ldots, n'-n-1$. Nennen wir irgend einen dieser Werte α, so wird die Gleichung der entsprechenden Asymptote lauten:

$$x\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+y\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=d, \quad \text{oder} \quad -x\sin\alpha+y\cos\alpha=d,$$

indem[1])
$$d=\lim_{\omega=\alpha}[\varrho(\omega-\alpha)];$$

1) S. z. B. Hoüel, *Cours de calcul infinitésimal*, II. (Paris 1879) S. 22.

setzen wir nun für ϱ und α ihre Werte ein, so finden wir

$$d = (-1)^k \cdot 2a \cdot \frac{n}{n'-n} \sin\frac{kn'\pi}{n'-n}$$

$$= (-1)^k \cdot 2a \cdot \frac{n}{n'-n} \sin\left(k\pi + \frac{kn\pi}{n'-n}\right) = \frac{2na}{n'-n} \sin\frac{kn\pi}{n'-n} \cdot$$

Die allgemeine Gleichung der Asymptoten wird daher

$$\sin\frac{kn\pi}{n'-n}\left[x + \frac{2an}{n'-n}\right] + y\cos\frac{kn\pi}{n'-n} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots\ldots, n'-n-1).$$

Da diese, welches auch der Wert von k sei, befriedigt wird durch $x = -\frac{2na}{n'-n}$, $y = 0$, **so laufen die $n'-n-1$ reellen Asymptoten der betrachteten Kurve in einen Punkt $D\left(-\frac{2an}{n'-n}, 0\right)$ zusammen.**

Durch Elimination von φ aus den Gleichungen (3) erhalten wir die kartesische Gleichung der Kurve. Um diese Elimination auszuführen, wenden wir die bekannte allgemeine Relation

$$\operatorname{tg} r\omega = \frac{\binom{r}{1}\operatorname{tg}\omega - \binom{r}{3}\operatorname{tg}^3\omega + \binom{r}{5}\operatorname{tg}^5\omega - \cdots\cdots}{\binom{r}{0} - \binom{r}{2}\operatorname{tg}^2\omega + \binom{r}{4}\operatorname{tg}^4\omega - \cdots\cdot} \quad . \quad . \quad (*)$$

an auf die Identität

$$\operatorname{tg}(n' \cdot n\varphi) = \operatorname{tg}(n \cdot n'\varphi)$$

und erhalten

$$\frac{\binom{n'}{1}\operatorname{tg} n\varphi - \binom{n'}{3}\operatorname{tg}^3 n\varphi + \binom{n'}{5}\operatorname{tg}^5 n\varphi - \cdots}{\binom{n'}{0} - \binom{n'}{2}\operatorname{tg}^2 n\varphi + \binom{n'}{4}\operatorname{tg}^4 n\varphi - \cdots\cdot}$$

$$= \frac{\binom{n}{1}\operatorname{tg} n'\varphi - \binom{n}{3}\operatorname{tg}^3 n'\varphi + \binom{n}{5}\operatorname{tg}^5 n'\varphi - \cdots}{\binom{n}{0} - \binom{n}{2}\operatorname{tg}^2 n'\varphi + \binom{n}{4}\operatorname{tg}^4 n'\varphi - \cdots\cdot};$$

setzen wir hierin die aus Gleichung (3) entnommenen Werte für $\operatorname{tg} n\varphi$, $\operatorname{tg} n'\varphi$ ein, so erhalten wir

$$\frac{\binom{n'}{1}\frac{y}{x+a} - \binom{n'}{3}\left(\frac{y}{x+a}\right)^3 + \binom{n'}{5}\left(\frac{y}{x+a}\right)^5 - \cdots}{\binom{n'}{0} - \binom{n'}{2}\left(\frac{y}{x+a}\right)^2 + \binom{n'}{4}\left(\frac{y}{x+a}\right)^4 - \cdots}$$

$$= \frac{\binom{n}{1}\frac{y}{x-a} - \binom{n}{3}\left(\frac{y}{x-a}\right)^3 + \binom{n}{5}\left(\frac{y}{x-a}\right)^5 - \cdots}{\binom{n}{0} - \binom{n}{2}\left(\frac{y}{x-a}\right)^2 + \frac{n}{4}\left(\frac{y}{x-a}\right)^4 - \cdots\cdot}.$$

Schafft man die Nenner fort, so erhält man eine Gleichung vom $(n'+n-1)^{\text{ten}}$ Grade; dies ist also die Ordnung der Kurve.

Man ziehe nun durch A eine beliebige Gerade und nenne α den kleinsten Winkel, welchen sie mit AA' bildet. Setzen wir

$$n\varphi \equiv \alpha \,(mod\, \pi),$$

so erhalten wir n Werte für φ, die untereinander inkongruent $(mod\ \pi)$ sind; diesen entsprechen ebensoviele von $n'\varphi$; demnach entsprechen jeder durch A gehenden Geraden n solcher durch A', die die Kurve in ebensovielen Kurvenpunkten schneiden; jede durch A gehende Gerade schneidet demnach die Kurve in n von A verschiedenen Punkten, **demnach ist der Punkt A ein $(n'-1)$facher für die Kurve, ebenso ist A' ein $(n-1)$facher Punkt.** Diese Schlüsse werden durch die Gleichungen (6) bestätigt und ergänzt. Die erste derselben läfst nämlich erkennen, dafs $\varrho = 0$ wird, wenn man dem φ einen von 0 verschiedenen Wert giebt so, dafs $n'\varphi \equiv 0\ (mod\ \pi)$; man erhält so die Werte $\frac{\pi}{n'}, \frac{2\pi}{n'}, \ldots\ldots\ldots, \frac{(n'-1)\pi}{n'}$, denen ebensoviele die Kurve in A berührende Geraden entsprechen. **Also teilen die $(n'-1)$ Tangenten der Kurve in A zusammen mit der Geraden AA' den Winkelraum um A in n' gleiche Teile.** In ähnlicher Weise teilen die $(n-1)$ Tangenten an die Kurve im Punkte A' zusammen mit der Geraden AA' den Raum um A' in n gleiche Teile.

Wir haben gesehen, dafs jede Gerade r durch A, n von A verschiedene Punkte der Kurve enthält. Nehmen wir im speziellen an, dafs r durch I, den einen der beiden imaginären Kreispunkte gehe; dann wird $\operatorname{tg} n\varphi = i$ sein, und — dies beweist Gleichung (*) — $\operatorname{tg}\varphi = i$ und $\operatorname{tg} n'\varphi = i$; daher entsprechen der Geraden AI n mit $A'I$ zusammen fallende Geraden: I ist also ein n-facher Punkt der Kurve. Dasselbe trifft zu für den anderen Kreispunkt J. Die untersuchte Kurve (von der Ordnung $n+n'-1$) schneidet also die unendlich ferne Gerade in den vorher aufgefundenen $n-n'-1$ reellen Punkten und in den beiden imaginären Kreispunkten, die n-fach zu zählen sind. Weitere Singularitäten, aufser denen in den Punkten A und A', I und J, besitzt die Kurve nicht; sie ist daher vom Geschlechte

$$\frac{(n+n'-2)(n+n'-3)}{2} - \frac{(n'-1)(n'-2)}{2} - 2\frac{n(n-1)}{2} = (n-1)(n'-n+1);$$

demnach ist sie rational, wenn $n = 1$, oder auch, wenn $n = n'-1$.[1])

1) Unter dieser Voraussetzung werden die Gleichungen (6')

wenn $n = 1$, $\quad \varrho = \dfrac{2a \sin n'\omega}{\sin (n'-1)\omega}, \quad \varrho' = \dfrac{2a \sin \frac{\omega}{n'}}{\sin \frac{n'-1}{n'}\omega},$

und wenn $n = n'-1$, $\quad \varrho = \dfrac{2a \sin \frac{n'}{n'-1}\omega}{\sin \omega}, \quad \varrho' = \dfrac{2a \sin \frac{n'-1}{n'}\omega}{\sin \frac{\omega}{n'}};$

sie wurden schon von uns in einem besonderen Falle angewandt (S. 82, Note 2).

Die Kurven der ersten sich so ergebenden Kategorien sind Sektrices im hervorragenden Sinne des Wortes; denken wir uns nämlich eine derselben für einen gewissen Wert von n' gezeichnet, und legen einen gegebenen Winkel α mit dem Scheitel auf A' und mit dem einen Schenkel auf $A'B$, so wird der andere Schenkel die Sektrix in n' Punkten P schneiden, deren jeder mit A verbunden einen Winkel PAA', der gleich dem n'^{ten} Teile von $\alpha + k\pi$ ist. Unter dieser Kategorie von Sektrix-Kurven findet sich: für $n' = 1$ die unendlich ferne Gerade; für $n' = 2$ der um A' mit dem Radius $A'A$ beschriebene Kreis; für $n' = 3$ die Trisektrix von Maclaurin[1]) (s. Nr. **46**).

In der zweiten Kategorie erhält man die einfachste Kurve bei $n' = 2$, $n = 1$; sie ist ein Kreis; alsdann kommt diejenige, bei welcher $n = 2$, $n' = 3$; sie ist eine Kurve vierter Ordnung, die Sesquisektrix heifst. Wir überlassen es dem Leser nachzuweisen, dafs sie nichts anderes als eine besondere Pascal'sche Schnecke (s. Nr. **69**) ist; diejenige nämlich, welche man erhält, wenn man auf den von einem festen Punkte der Peripherie ausgehenden Sehnen Strecken gleich dem Radius abträgt.

147. Die rationalen Sektrices der ersten von den beiden oben bezeichneten Kategorien haben die Polargleichung

$$\varrho = \frac{2a \sin n\varphi}{\sin(n-1)\varphi}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

die man aus (6) und (1) erhält, wenn man $n = 1$ setzt und n statt n' schreibt. Auf diese Kurven traf der Ingenieur Wasserschleben und untersuchte sie in der Abhandlung *Zur Teilung des Winkels*[2]). Unabhängig von ihm und von Schoute, wurden sie darauf betrachtet von O. P. Dexter[3]), von Habich[4]) und von G. Lazzeri[5]). Der vorletzte der angeführten Autoren hat in seiner Arbeit eine geistvolle Beobachtung gemacht, die wir hier berichten wollen. Bei der Gl. (7) war bisher angenommen, dafs n ganzzahlig sei; es ist klar, dafs sie auch dann einen Sinn behält, wenn man für n gebrochene und irrationale Werte zuläfst; wir können daher in ihr n kontinuierlich sich

1) Von diesem Gesichtspunkte aus wurde die Kurve durch J. d'Almeida untersucht, *Sobre una curva de terceiro grao* (Jorn. de Teixeira, VI, 1885).

2) Archiv der Math. LVI, 1874. Daselbst sind die kartesischen Gleichungen der 3-Teilungs- und 5-Teilungskurve gegeben; in der zweiten dieser Gleichungen findet sich ein Versehen, das von A. Radike verbessert worden (*Zur Teilung des Winkels*, das. LXIII, 1879); indem W. irrtümlich glaubte, dafs die 3-Teilungskurve ein Folium Cartesii sei, so sah er sich veranlafst, die n-Teilungskurven, die wir sogleich betrachten werden, Verallgemeinertes Cartesisches Blatt zu nennen; es ist klar, dafs dieser Vorschlag zurückgewiesen wurde.

3) S. das Werkchen *The division of angles* (New-York 1881).

4) S. den Artikel *Division de un angulo* in Nr. 12 der *Gaceta cientifica de Lima*, 1885.

5) *Division d'un angle en parties égales* (Mathésis, VI, 1886).

verändern lassen, und erhalten demgemäfs eine kontinuierliche Schar von Kurven. Wir nehmen nun im besonderen an, dafs n nach O hin abnehme, während a ins Unendliche wächst, in der Weise, dafs das Produkt $2an$ einem endlichen Grenzwerte l zustrebt; wenn wir nun Gleichung (7) in folgender Weise nehmen

$$\varrho \sin(1-n)\varphi = -(2an)\varphi \frac{\sin n\varphi}{n\varphi},$$

so wird sie beim Grenzwerte zu

$$\varrho \sin\varphi = l\varphi,$$

welche (vgl. Kap. 2 des folgenden Abschnitts) eine Quadratrix des Dinostratus darstellt; diese Kurve ist demnach eine Grenzform der Sektrices, mit denen wir uns hier beschäftigen.

Analog zu den durch die Gleichung (7) dargestellten Kurven sind diejenigen, von denen eine jede der Ort der Spitze P eines Dreiecks PAA' ist, dessen Grundlinie fest ist und dessen Winkel $PA'A$ das n-fache des Winkels PAA' ist[1]). Setzen wir wie vorhin $AA' = 2a$, $PA = \varrho$, $\sphericalangle PAA' = \varphi$, so erhält man als Polargleichung der Kurve

$$\varrho = 2a\frac{\sin n\varphi}{\sin(n+1)\varphi}; \quad \dots\dots\dots \quad (8)$$

es sei hervorgehoben, dafs die Gleichung (8) aus (7) durch einfachen Wechsel des Vorzeichens der Konstanten n sich herleitet. Die durch (8) dargestellte Kurve ist von der Ordnung n, hat den Punkt A als $(n-1)$fachen, geht nicht durch A' und schneidet AA' im Punkte C, so dafs $AC = \frac{2na}{n+1}$; die Kurventangenten im Punkte A bilden mit der Geraden AA' die Winkel $\frac{\pi}{n}$, $\frac{2\pi}{n}$, $\dots\dots \frac{(n-1)\pi}{n}$, die entsprechenden Asymptoten laufen im Punkte $\left(\frac{2a}{n+1}, 0\right)$ zusammen; u. s. w.

Die zwischen den Kurven (7) und (8) bestehende Analogie veranlafste W. Heymann, sie mit demselben Namen zu bezeichnen, nämlich mit Araneïden[2]), indem er für die erstere das Beiwort verschlungene und für die andere gestreckte hinzufügte; wir wollen der Kürze halber die Kurve (7) mit C_n und die (8) mit Γ_n bezeichnen und noch zwei Ableitungsgesetze, die zwischen ihnen bestehen, darlegen.

Es seien P und P' zwei entsprechende, d. h. mit A auf derselben Geraden liegende Punkte von C_n und Γ_n (Taf. XII, Fig. 87). Wir ziehen AD senkrecht zu AA'; da nun $\sphericalangle PA'A = P'A'B = n\varphi$, so wird $\sphericalangle P'A'D = PA'D$; $A'D$ ist Halbierungslinie des Winkels

---

1) Mariantoni et Palatini, *Sur le problème de la polysection d'un angle* (Nouv. Ann., 3. Ser., XIX, 1899).

2) Vgl. die Abhandlung *Über Winkelteilung mittelst Araneïden* (Zeitschr. f. Math. XLIV, 1899).

$PA'P'$; wenn wir also einen der Punkte P', P kennen, so ist auch der andere bestimmt, und liegt eine der Kurven C_n, Γ_n gezeichnet vor, so läfst sich auch die andere punktweise mit Leichtigkeit bestimmen.

Sei P (Taf. XII, Fig. 88) ein beliebiger Punkt von C_n, P' der Punkt von Γ_{n-2}, der auf der Geraden AP liegt, so hat man, wenn

$$\sphericalangle PAA' = \varphi, \quad \sphericalangle PA'B = n\varphi, \quad \sphericalangle P'A'A = (n-2)\varphi,$$

und daher

$$\sphericalangle P'PA' = (n-1)\varphi, \quad \sphericalangle AP'A' = (n-1)\varphi.$$

Dies zeigt, dafs das Dreieck $PP'A'$ ein gleichschenkliges ist, dafs — mit anderen Worten — P und P' auf einem Kreise mit dem Centrum A' liegen; ist daher die Kurve Γ_{n-2} gezeichnet, so kann man auch die Kurve C_n punktweise konstruieren.

Wenn wir diese beiden Ableitungsgesetze wechselweise mit einander kombinieren, so gelangen wir zu folgenden beiden Reihen von Kurven, deren jede aus der vorhergehenden abgeleitet werden kann

$$\Gamma_0 C_2 \Gamma_2 C_4 \Gamma_4 \ldots\ldots C_{2n} \Gamma_{2n} \ldots; \quad \Gamma_1 C_3 \Gamma_3 C_5 \Gamma_5 \ldots\ldots \Gamma_{2n-1} C_{2n+1} \ldots\ldots$$

Nun wird für $n = 0$ bekanntlich die Gleichung (8) zu $\varrho = 0$, also ist Γ_0 ein Punkt; während dieselbe für $n = 1$, wird $\varrho \cdot \cos\varphi = a$, welche die Gerade b darstellt, den Ort der von A und A' gleichweit entfernten Punkte; wenn wir also vom Punkte A oder der Geraden b ausgehen, so gelangen wir durch Anwendung jener beiden einfachen Ableitungsverfahren zur Konstruktion aller Araneïden.

Von Heymann wurde noch eine andere bemerkenswerte Eigenschaft der Araneiden für spezielle Fälle bewiesen und für den allgemeinen Fall ausgesprochen. Um diese darzuthun, nehmen wir die durch Gleichung (7) dargestellte C_n mit einem beliebigen durch die Punkte A und A' gehenden Kreise geschnitten. Da die Gleichung des letzteren die Gestalt hat

$$\varrho = 2a\frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\cos\alpha},$$

so sind die Anomalieen φ der Punkte, in denen er von der C_n geschnitten wird, die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{\cos(\varphi-\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{\sin n\varphi}{\sin(n-1)\varphi}.$$

Nun kann man diese auch folgendermafsen schreiben:

$$\sin\varphi \cdot \cos(\overline{n-1}\cdot\varphi + \alpha) = 0,$$

ihre Wurzeln sind, wenn k eine ganze Zahl, $\varphi = k\pi$, die aber nur die Punkte A und A' liefern, und

$$\varphi = \frac{(2k+1)\pi - 2\alpha}{2(n-1)};$$

um Wurzeln zu erhalten, die zu einander inkongruent (*mod* π) sind, mufs man dem k die Werte geben $2, 4, \ldots\ldots 2(n-1)$; man wird

dementsprechend $n-1$ äquidifferente Werte erhalten; jene Schnittpunkte bilden daher ein regelmäfsiges Vieleck mit der Seitenzahl $(n-1)$; da nun α beliebig ist, so schliefsen wir: **In eine Kurve C_n können ∞^1 regelmäfsige $(n-1)$-Ecke einbeschrieben werden;** jedes derselben ist zugleich einem Kreise einbeschrieben, der durch die Punkte A und A' geht. — In ähnlicher Weise zeigt man: **In eine Kurve Γ_n können ∞^1 regelmäfsige $(n+1)$-Ecke einbeschrieben werden.**

Heymann hat auch eine organische Erzeugung der Araneïden durch eine kontinuierliche Bewegung angegeben, die ihre thatsächliche Anwendung für die Teilung eines Winkels in gleiche Teile ermöglicht (vgl. S. 324, Z. 3—6).

148. Zu einer besonderen, sehr bemerkenswerten Kategorie der Schoute'sche Sektrix-Kurven ist man durch ein Verfahren gelangt[1]), das verschieden und unabhängig von dem ist, welches der holländische Geometer angewendet hat, und dessen wir hier Erwähnung thun müssen. Seien (Taf. XII, Fig. 89) in einer Ebene Π zwei feste Punkte A, B gegeben, d sei ihre Entfernung und M die Mitte derselben. Wir bezeichnen nun mit K_m den Kreis mit dem Durchmesser AB und dem Centrum M, mit K_a und K_b die beiden mit dem Radius d und den Centren A und B bezw. Wir nehmen jetzt beliebig den Punkt P_1 in der Ebene Π, ziehen AP_1 und bezeichnen deren Schnitt mit K_m als P, darauf bestimmen wir auf der Geraden AP_1 den Punkt P_2 derart, dafs die Strecke P_1P_2 den Punkt P zum Mittelpunkte hat. Auf diese Weise wird für die Punkte von Π eine involutorische Cremona'sche Transformation hergestellt, die wir mit $\mathfrak{T}_a$ bezeichnen wollen; offenbar ist der Kreis K_m für dieselbe eine Kurve, deren Punkte sich selber entsprechen.

Nehmen wir A als Pol, AB als Polaraxe und die Koordinaten der entsprechenden Punkte P_1 und P_2, bezw. ϱ_1, ω_1 und ϱ_2, ω_2, so haben wir offenbar die Relationen

$$\omega_1 = \omega_2, \qquad \varrho_1 + \varrho_2 = 2d\cos\omega\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Gehen wir zu kartesischen Koordinaten über, so läfst sich die Transformation $\mathfrak{T}_a$ darstellen durch die Formeln

$$x_2 = x_1\frac{2dx_1 - x_1^2 - y_1^2}{x_1^2 + y_1^2}, \qquad y_2 = y_1\frac{2dx_1 - x_1^2 - y_1^2}{x_1^2 + y_1^2}, \quad . \quad . \quad (10)$$

die beweisen, dafs $\mathfrak{T}_a$ eine kubische Transformation ist; das entsprechende homaloidische Netz wird von ∞^2 Kurven dritter Ordnung gebildet, die A zum Doppelpunkte und B zum gemeinschaftlichen singulären Brennpunkte haben; sie ist daher eine spezielle kubische Transformation De Jonquières, die zwei Paare zusammenfallender Fundamentalpunkte in den beiden Kreispunkten I und J hat, in den

1) H. Nägelsbach, *Die Kreiskonchoiden* (Progr. Erlangen, 1885).

Richtungen BI und BJ. — Eine ähnliche Transformation erhält man, indem man den Punkt B an die Stelle von A setzt; wir wollen sie mit $\mathfrak{T}_b$ bezeichnen.

Führen wir jetzt die Transformation $\mathfrak{T}_a$ auf den Kreis K_a aus — den wir jetzt der gröfseren Klarheit halber mit Γ_1 bezeichnen wollen — so erhalten wir eine neue Kurve Γ_2; da nun Γ_1 die Gleichung $\varrho_1 = d$ hat, so zeigt die Gleichung (9), dafs Γ_2 dargestellt wird durch

$$\varrho_2 = 2d \cos \omega_1 - d;$$

Γ_2 ist also eine spezielle Pascal'sche Schnecke oder Kreiskonchoide (s. Nr. **69**). Führt man nun auf Γ_2 die Transformation $\mathfrak{T}_b$ aus, so erhält man eine Kurve Γ_3, die der Transformation $\mathfrak{T}_a$ unterworfen eine Kurve Γ_4 liefert; fahren wir so fort, so erhalten wir eine unbegrenzte Reihe von Kurven. Bezeichnen wir im allgemeinen eine beliebige derselben mit Γ_m und durch die symbolische Bezeichnung $\mathfrak{T}(\Gamma) \equiv \Delta$, dafs die Kurve Δ aus Γ entsteht, indem man diese der Transformation $\mathfrak{T}$ unterwirft, so können wir allgemein schreiben

$$\mathfrak{T}_a(\Gamma_{2n-1}) \equiv \Gamma_{2n}, \quad \mathfrak{T}_b(\Gamma_{2n}) \equiv \Gamma_{2n+1}.$$

Die Kurven Γ_m heifsen (aus leicht begreiflichen Gründen) Kreiskonchoiden höherer Ordnung; ihre Eigenschaften — insbesondere ihre analytische Darstellung — würde man durch Benutzung der Gleichungen erhalten können, welche zur Darstellung der Transformationen $\mathfrak{T}_a$ und $\mathfrak{T}_b$ dienen; aber es ist einfacher, sie durch folgende Betrachtungen an der Figur selbst aufzufinden.

Nennen wir die zweiten Schnittpunkte der Geraden AB mit den Kreisen K_a und K_b bezügl. R und S, ferner α den Winkel P_1AR; ziehen wir nun die Gerade P_1B, so erweist sich das Dreieck AP_1R als gleichschenklig, und weil es auch das Dreieck BP_1P_2 ist, so schliefst man

$$\sphericalangle AP_1B = \sphericalangle AP_2B = \frac{\alpha}{2}.$$

Daher sind die beiden Kreise K' und K'', von denen der erste durch die Punkte A_0, B_0, P_1 geht, der zweite durch A, B, P_2 zu einander symmetrisch in Bezug auf die Gerade AB. Man zeichne nun den Punkt P_3, der in $\mathfrak{T}_b$ dem Punkte P_2 entspricht; das Dreieck BP_2P_3 erweist sich als gleichschenklig, daher ist

$$\sphericalangle AP_3B = \sphericalangle AP_2B = \frac{\alpha}{2},$$

infolgedessen liegt der Punkt P_3 auch auf dem Kreise K'. Ähnlich erkennt man, dafs

$$\sphericalangle AP_4B = \sphericalangle AP_3B = \frac{\alpha}{2},$$

weshalb P_4 auf dem Kreise K'' liegt. Fährt man in dieser Weise fort, so erkennt man, dafs die Punkte $P_1, P_3, P_5 \ldots P_{2n+1}, \ldots$ auf K' liegen, und $P_2, P_4 \ldots P_{2n} \ldots$ auf K''. Beachten wir auch, dafs

$\sphericalangle BAP_2 = \alpha$, und dafs P_1BP_3 als Aufsenwinkel des gleichschenkligen Dreiecks BP_1P_2 auch gleich α ist; ferner, dafs der Winkel P_2BP_4 als Aufsenwinkel des gleichschenkligen Dreiecks AP_2P_3 ebenfalls gleich α ist u. s. w., so haben wir im allgemeinen

$$\sphericalangle AP_{2n}B = \sphericalangle AP_{2n+1}B = \frac{\alpha}{2}; \quad \sphericalangle P_{2n-2}AP_{2n} = \sphericalangle P_{2n-1}BP_{2n+1} = \alpha.$$

Infolgedessen ist

$$\sphericalangle ABP_{2n+1} = \frac{2n+1}{2}\alpha, \qquad \sphericalangle BAP_{2n} = n\alpha,$$
$$\sphericalangle BAP_{2n+1} = \pi - (n+1)\alpha, \qquad \sphericalangle ABP_{2n} = \pi - \frac{2n+1}{2}\alpha,$$
$$\sphericalangle P_{2n+1}AR = (n+1)\alpha; \qquad \sphericalangle P_{2n}BS = \frac{2n+1}{2}\alpha.$$

Daraus folgt dann

$$\frac{\sphericalangle P_{2n+1}AR}{\sphericalangle P_{2n+1}BA} = \frac{2n+2}{2n+1} \qquad \Bigg| \qquad \frac{\sphericalangle P_{2n}BS}{\sphericalangle P_{2n}AB} = \frac{2n+1}{2n},$$

und diese Relationen berechtigen uns zu dem Schlusse, **dafs die Kreiskonchoiden höherer Ordnung spezielle Sektrices von Schoute sind.**

Die gewonnenen Beziehungen zwischen den Winkeln führen direkt zur Polargleichung der Kurven Γ_{2n} und Γ_{2n+1}. Beziehen wir nämlich die ersten auf ein Polarkoordinaten-System ϱ, φ, das A als Pol, AB als Polaraxe hat, so haben wir:

$$AP_{2n} = \varrho, \quad \sphericalangle P_{2n}AB = \varphi$$

und da nun aus dem Dreieck $P_{2n}AB$ sich ergiebt

$$\frac{AP_{2n}}{\sin ABP_{2n}} = \frac{AP}{\sin AP_{2n}B},$$

so folgert man, indem man die vorhergehenden Relationen beachtet, dafs

$$\varrho = d\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2n}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

die Polargleichung der Kurve Γ_{2n} ist. Ähnlich erkennt man, dafs

$$\varrho = d\,\frac{\sin\frac{2n+2}{2n+1}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2n+1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

die Polargleichung von Γ_{2n+1} ist, wenn man B als Pol und BA als Polaraxe nimmt. Offenbar sind die Gleichungen (11) und (12) Spezialfälle der Gleichung (6′).

Wenden wir die bewiesenen Sätze für alle Sektrices von Schoute, bezw. die Kreiskonchoiden höherer Art an, so erkennt man: **Jede Kurve Γ_{2n} ist rational und von der Ordnung $4n$; Punkte von der**

Vielfältigkeit $2n$ sind A und die imaginären Kreispunkte, während B ein vielfacher Punkt von der Ordnung $2n-1$ ist; jede Kurve Γ_{2n+1} ist rational und von der Ordnung $4n+2$, B und die Kreispunkte sind $(2n+1)$-fache Punkte derselben, während A nur ein $2n$-facher ist. Keine dieser Linien hat reelle Punkte im Unendlichen.

Wir wollen noch eine letzte Bemerkung machen betreffend die Anwendung der Kurven Γ_{2n} und Γ_{2n+1} auf die Aufgabe der Teilung eines Winkels. Aus den vorhin aufgestellten Winkelberechnungen, ergeben sich leicht folgende weiteren:

$$\sphericalangle AP_{2n}B = \frac{1}{2n+1} \cdot \sphericalangle P_{2n}BS$$

$$\sphericalangle AP_{2n+1}B = \frac{1}{2n} \cdot \sphericalangle P_{2n}AR.$$

Wenn man also einen Winkel konstruiert mit dem Schenkel in B und mit dem einen Schenkel auf BS, der gleich einem gegebenen Winkel α ist, so wird der andere Schenkel die Kurve Γ_{2n} in $2n+1$ Punkten P_{2n} schneiden. Verbinden wir einen beliebigen derselben mit den Punkten A, B, so erhalten wir einen Winkel, welcher der $(2n+1)$te Teil von $\alpha + k\pi$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, 2n)$ ist. Ähnlich, wenn wir ihn zeichnen mit dem Scheitel in A, mit dem einen Schenkel auf AR, gleich einem gegebenen Winkel α, so wird der andere Schenkel Γ_{2n+1} in $2n+2$ Punkten P_{2n+1} schneiden; verbinden wir einen beliebigen derselben mit den Punkten A, B, so erhalten wir einen Winkel, welcher der $(2n+2)$te Teil von $\alpha + k\pi$ ist $(k = 0, 1, 2 \cdots 2n+1)$. Liegt also die Kurve Γ_m gezeichnet vor, so wird die Teilung eines beliebigen Winkels in $m+1$ Teile ausführbar sein.

149. III. Analog zu den vorhergehenden Sektrices sind diejenigen Kurven, von denen jede der Ort der Spitzen P eines Dreiecks ist, dessen Grundlienie AB fest ist, und dessen Höhe PH den Winkel APB in zwei Teile teilt, die in dem Verhältnisse stehen wie $1:(n-1)$[1]. Setzen wir $\sphericalangle APH = \varphi$, so ist $\sphericalangle BPH = (n-1)\varphi$. Nehmen wir nun ein kartesisches Koordinatensystem, das A als Anfang und AB als x-Axe hat, so erhalten wir, wenn $AB = a$,

$$x = y \cdot \operatorname{tg}\varphi, \quad a - x = y \cdot \operatorname{tg}(n-1)\varphi,$$

und daher:

$$x = a\frac{\sin\varphi \cdot \cos(n-1)\varphi}{\sin n\varphi}, \quad y = a\frac{\cos\varphi \cdot \cos(n-1)\varphi}{\sin n\varphi}, \quad . \quad (13)$$

welches die parametrische Darstellung der Kurve ist. Es ergiebt sich daraus, dafs dieselbe rational und, wenn n eine (positive) ganze Zahl ist, von der Ordnung n, mit A als $(n-1)$fachem Punkte. Setzen wir

$$\varrho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \omega,$$

1) Hesse, *Über die Teilung des Winkels, speziell die Trisektion* (Montabaur 1881).

so finden wir nun die Polargleichung der Kurve als

$$\varrho = a \frac{\cos(n-1)\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)}{\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)}, \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

die, je nachdem n gerade oder ungerade die eine oder andere von folgenden beiden Formen annimmt

$$\varrho = a \frac{\sin(n-1)\omega}{\sin n\omega} \cdot \cdot (14\,\text{I}), \qquad \varrho = a \frac{\cos(n-1)\omega}{\cos n\omega} \cdot \cdot (14\,\text{II})$$

Wir überlassen es dem Leser, aus dieser Gleichung die Eigenschaften der fraglichen Kurve abzuleiten. Wir beschränken uns auf die Bemerkung, daſs im zweiten Falle die Kurve durch den Punkt B geht, während sie im ersteren Falle AB in einem Punkte C schneidet, derart, daſs $AC = \frac{n-1}{n} a$. Schlieſslich: Denken wir uns die einem bestimmten Werte von n entsprechende Kurve gezeichnet, und beschreiben dann über AB einen Kreisbogen, der den gegebenen Winkel α faſst, so wird dieser die Kurve in gewissen Punkten P schneiden. Verbinden wir einen beliebigen derselben mit den Punkten A und B und ziehen PH senkrecht zu AB, so wird $\sphericalangle APH = \frac{\alpha}{n}$ sein; dies zeigt uns hinlänglich, daſs die Kurve eine Winkel-n-Teilungskurve ist.

IV. Wenn man irgend einen der Kreisbögen, die zwei feste Punkte N_0 und N_n als Endpunkte haben, in n gleiche Teile teilen könnte, so wäre man offenbar auch imstande, einen beliebigen geradlinigen Winkel γ in n gleiche Teile zu teilen. Konstruieren wir nämlich das gleichschenklige Dreieck N_0CN_n mit dem Winkel γ an der Spitze, und beschreiben den Kreisbogen N_0N_n, dessen Mittelpunkt C ist, und teilen diesen in n gleiche Teile, so werden auch die entsprechenden Radien den Winkel γ in n gleiche Teile teilen. Um diese Teilung in n gleiche Teile ausführen zu können, genügt es, den Ort der Punkte N_r zu betrachten[1]), von denen jeder die r^{te} Ecke eines regulären Polygonzuges ist, der einem Kreisbogen einbeschrieben ist, dessen Endpunkte N_0 und N_n sind. Um die Gleichung des Ortes der Punkte N_r zu finden, nehmen wir den Mittelpunkt O von N_0N_n als Anfangspunkt, N_0N_n selbst als x-Axe eines kartesischen Koordinatensystems, und nennen C den Mittelpunkt eines der genannten Kreisbogen. Setzen wir $\sphericalangle N_0CN_n = 2\alpha$, so ist

$$\sphericalangle N_rN_0N_n = \frac{n-r}{n}\alpha, \qquad \sphericalangle N_rN_nN_0 = \frac{r}{n}\alpha,$$

1) C. Burali-Forti, *Sopra un sistema di curve che dividono in n parti eguali gli archi di circolo che passano per due punti fissi* (Giorn. di Mat. XXVII, 1889).

daher sind, wenn $N_0 N_n = 2a$, die Gleichungen der beiden Geraden $N_r N_0$ und $N_r N_n$

$$\frac{y}{a+x} = \operatorname{tg}\frac{n-r}{n}\alpha, \qquad \frac{y}{a-x} = \operatorname{tg}\frac{r}{n}\alpha.$$

Die Gleichung des betreffenden Ortes wird man nun erhalten, wenn man α aus diesen beiden eliminiert. Bequemer ist es jedoch diesen darzustellen, indem man x und y als Funktionen des Winkels $\beta = \frac{\alpha}{n}$ darstellt; man erhält so die beiden Gleichungen:

$$x = a \cdot \frac{\sin(2r-n)\beta}{\sin n\beta}, \quad y = 2a \cdot \frac{\sin r\beta \cdot \sin(n-r)\beta}{\sin n\beta} \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Leicht leitet man daraus ab, dafs die so erhaltenen Kurven rational und von der Ordnung n sind. Man kennt bis jetzt keine mechanische Konstruktion derselben in kontinuierlichem Zuge, die sie für die Teilung eines Winkels thatsächlich anwendbar macht (vgl. die Bemerkung auf S. 324, Z. 4—6).

150. V. Erheblich komplizierter ist die Definition anderer Sektrix-Kurven[1]), zu deren Betrachtung wir gelangen durch folgenden Satz: In dem Kreise mit dem Mittelpunkt O und dem Durchmesser $A_0E = 2r$ sei der Winkel $A_{n-2}OA_0 = (n-2) \cdot \sphericalangle A_1OA_0$ (s. Taf. XII, Fig. 90, wo $n = 5$ angenommen ist) und man führe folgende Konstruktion aus: Man ziehe die Gerade A_1A_{n-2} und bezeichne deren Schnitt mit dem Durchmesser A_0E mit B_{n-2}; auf dem verlängerten Radius OA_1 trage man $OC_{n-2} = OB_{n-2}$ ab; man beschreibe den Kreis mit dem Mittelpunkte A_0 und dem Radius A_0C_{n-2} und bestimme den zweiten Schnittpunkt D_n mit OA_1; man ziehe A_0D_n, welches neuerdings die Peripherie des gegebenen Kreises in A_{n+1} schneidet; man zeichne den Schnittpunkt P_n der Geraden A_0A_{n+1} mit dem Kreise um O und dem Radius OD_n; endlich ziehe man den Radius OP_nA_n. Dann ist der Winkel A_0OA_n das n-fache, und der Winkel A_0OA_{n+1} das $(n+1)$-fache des Winkels $A_0OA_1 = \varphi$.

Beweis: Es ist nämlich

$$\triangle A_1OB_{n-2} + \triangle A_1OA_{n-2} = \triangle A_{n-2}OB_{n-2}$$

oder

$$\frac{1}{2}r \cdot OB_{n-2}\sin\varphi + \frac{1}{2}r^2\sin(n-3)\varphi = \frac{1}{2}r \cdot OB_{n-2}\sin(n-2)\varphi$$

daher

$$OB_{n-2} = \frac{r\sin(n-3)\varphi}{\sin(n-2)\varphi - \sin\varphi}.$$

Beschreibt man nun den Kreis um A_0 mit dem Radius A_0O und bestimmt dessen zweiten Schnitt G mit OA_1, so ist

$$OG = 2r\cos\varphi, \quad OD_n = C_{n-2}G,$$

---

1) A. van Grinten, *Die n- und (n+1)-Teilung des Winkels und des Kreises* (Archiv LXX, 1874).

daher

$$OD_n = OG - OC_{n-2} = OG - OB_{n-2} = 2r\cos\varphi - \frac{r\sin(n-3)\varphi}{\sin(n-2) - \sin\varphi}.$$

Bezeichnen wir nun mit ψ den Winkel $P_n OD_n$, so ergiebt, da nach der Konstruktion $OP_n = OD_n$, die Relation

$$\triangle A_0 OD_n + \triangle D_n OP_n = \triangle A_0 OP_n,$$

oder
$$\frac{1}{2} r\varrho_n \sin\varphi + \frac{1}{2}\varrho_n \sin\psi = \frac{1}{2} r\varrho_n \sin(\varphi + \psi),$$

und infolgedessen
$$\varrho_n = \frac{\sin(\varphi + \psi) - \sin\varphi}{\sin\psi}.$$

Vergleicht man diese Beziehungsgleichung mit (12'), so sieht man, dafs $\psi = (n-1)\varphi$; daher ist

$$\sphericalangle A_1 OA_n = (n-1)\cdot \sphericalangle A_0 OA_1;$$
$$\sphericalangle A_0 OA_n = n\cdot \sphericalangle A_0 OA_1;$$
$$\sphericalangle A_0 OA_{n+1} = (n+1)\cdot \sphericalangle A_0 OA_1,$$

wie eben der ausgesprochene Satz besagte.

Variiert man φ, so stellt die Gleichung (12) oder (12') in Polarkoordinaten den Ort Δ der Punkte D_n dar, wobei O Pol, OA Polaraxe ist. — Setzen wir nun $OP_n = \varrho$, $n\varphi = \omega$, so werden, weil $OP_n = OD_n = \varrho$, die angeführten Gleichungen zu

$$\varrho = r\frac{\cos\frac{n+1}{2n}\omega}{\cos\frac{n-1}{2}\omega}. \quad . \ (17) \qquad \varrho = r\frac{\sin\omega - \sin\frac{\omega}{n}}{\sin\frac{n-1}{n}\omega}. \quad . \quad . \ (17')$$

und stellen dann in ähnlicher Weise den Ort Π der Punkte P_n dar.

Ist nun die Kurve Π konstruiert, so läfst sich die n-Teilung eines beliebigen Winkels mit Leichtigkeit ausführen. Legt man nämlich denselben mit dem Scheitel in O und mit dem einen Schenkel längs OA_0, so schneidet der andere Schenkel OA_n die Kurve Π im Punkte P_n. Man ziehe die Gerade $A_0 P_n$ und bestimme deren zweiten Schnitt D_n mit dem Kreise, dessen Mittelpunkt O und dessen Radius OP_n ist; wird nun die Gerade $OD_n A_1$ gezogen, so ist der Winkel $A_1 OA_0$ der n^{te} Teil des gegebenen. — Dieselbe Kurve dient jedoch auch zur Teilung eines Winkels in $n+1$ gleiche Teile. Legt man ihn nämlich mit dem Scheitel in O und mit dem einen Schenkel auf die Grade $A_0 O$, bezeichnet den Schnittpunkt des anderen Schenkels mit dem gegebenen Kreise mit A_{n+1}, zieht die Gerade $A_0 A_{n+1}$, und ist dann P der Schnitt dieser Geraden mit der Kurve Π, so ist der Winkel $P_n OA_{n+1}$ der $(n+1)^{\text{te}}$ Teil des gegebenen.

Der Kürze wegen wollen wir uns nicht mit der Diskussion der Kurven Δ und Π aufhalten, und nur bemerken, dafs für $n = 2$ die Gl. (12') wird zu $\varrho_2 = r(2\cos\varphi - 1)$, die eine besondere Pascal'sche

Schnecke (S. 137) darstellt, weshalb man auch die Kurven Δ als Verallgemeinerungen dieser bemerkenswerten Kurve auffassen darf.

VI. Einer ganz ähnlichen Darstellung, wie der durch die Gleichungen (6'), (7), (8), (10), (12), (13) gegebenen, sind auch andere Teilungskurven fähig, die von E. Oekinghaus betrachtet wurden[1]); es sind dies durch die folgende Polargleichungen dargestellten:

$$\varrho = a \frac{\sin \frac{n-2}{2} \varphi}{\sin \frac{n}{2} \varphi}, \quad \varrho = a \frac{\cos \frac{n-2}{2} \varphi}{\cos \frac{n}{2} \varphi}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Derselbe Autor hat auch zuerst die Teilungskurven betrachtet, die eine Polargleichung von folgendem Typus haben:

$$\varrho^n = \binom{n}{2} a^2 \varrho^{n-2} + \binom{n}{3} a^3 \varrho^{n-3} \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi} - \binom{n}{4} a^4 \varrho^{n-4} \frac{\sin 3\varphi}{\sin \varphi} + \cdots = 0 \quad . \quad (19)$$

die sich der besonderen Eigenschaft erfreuen, dafs die Summe der Vektoren der auf einer beliebigen, durch den Pol gehenden Geraden gelegenen Kurvenpunkte, gleich Null ist.

151. VII. Zu einer weiteren und wichtigeren Klasse von Sektrix-Kurven gelangt man durch folgende Betrachtungen[2]): Da jede ganze Zahl entweder prim ist oder das Produkt von Primzahlen, so würde man irgend einen Winkel in eine beliebige Anzahl gleicher Teile teilen können, wenn man die Teilung in eine Primzahl gleicher Teile teilen könnte. Ist nun p eine Primzahl, so ist nach einem bekannten Satze von Fermat $2^{p-1} - 1$ durch p teilbar, demnach auch das Produkt $\left(2^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)$, es ist also wenigstens einer dieser beiden Faktoren ein Vielfaches von p. Wenn man nun die Teilung des Winkels in $\left(2^{\frac{p-1}{2}} \pm 1\right)$ Teile ausführen könnte, so würde man sie ganz allgemein ausführen können. Diese Teilung in $(2^n \pm 1)$ Teile läfst sich nun mit Hilfe der beiden Kurven, die wir jetzt definieren wollen, bewerkstelligen.

a) Man beschreibe um den Mittelpunkt M mit dem Radius a einen Kreis, der die x-Axe im Anfangspunkte O berührt (Taf. XII, Fig. 91). Man ziehe nun eine beliebige Sehne OA in diesem Kreise und trage auf der Verlängerung derselben der Reihe nach ab

$$AB = AM, \quad BC = BM, \quad CD = CM, \ldots;$$

1) *Die Sektionskurven* (Archiv, 2te Serie, I, 1884).

2) A. Kempe, *De verdeeling van een hoek een $2^n + 1$ gelyke deelen,* sowie *De verdeeling van een hoek in een villkeurig antal gelyke deelen* (Nieuw Archiv voor Wiskunde, 2. Ser., I, 1894). Aufserdem s. die Abh. *Sur les courbes sectrices* (Mém. de Liège, 2. Ser., XX, 1898).

variiert man jene Sehne, so beschreiben die Punkte $B, C, D \ldots$ ebensoviele Kurven, deren n^{te} die Polargleichung hat

$$\varrho = a + 2a \sin\varphi + 2a\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + 2a\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right) + \cdots$$
$$\cdots + 2a\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right)\ldots\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}} - \frac{\varphi}{2^n}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Um uns von der Anwendbarkeit dieser Kurve für die Aufgabe der Winkelteilung zu überzeugen, verlängern wir die Geraden $AM, BM, CM, DM \cdots$ nach $A', B', C', D' \cdots$, nennen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Winkel, welche die Geraden $MA, MB, MC, MD \cdots$ mit OA bilden, und $\alpha', \beta', \gamma', \delta' \cdots$ die Winkel, welche die Verlängerungen MA', MB', MC', MD' mit OM machen. Die Betrachtung der Figur zeigt dann, dafs

$$\alpha' = 2\alpha, \quad \beta' = 3\beta, \quad \gamma' = 5\gamma, \quad \delta' = 9\delta, \ldots$$

aus diesen Beziehungen ergiebt sich, dafs, wenn man durch M eine beliebige Gerade zieht, die mit OM den beliebigen Winkel ω bildet, diese den gegebenen Kreis und jene Hilfskurven in den Punkten $F, G, H, K \cdots$ schneiden wird, so, dafs die von ihr mit den Geraden $OF, OG, OH, OK \ldots$ gebildeten Winkel bezw. gleich $\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{3}, \frac{\omega}{5}, \frac{\omega}{9} \cdots$ sind. Somit können diese Kurven zur Teilung eines beliebigen Winkels in $2^n + 1$ gleiche Teile dienen.

b) Um den Anfangspunkt als Centrum und mit dem Radius a beschreibe man einen Kreis, der die x-Axe in M schneidet (Taf. XII, Fig. 92). Dann ziehe man einen beliebigen Radius OA und trage auf seiner Verlängerung der Reihe nach

$$AB = AM, \quad BC = BM, \quad CD = CM \ldots$$

ab. Die Punkte $B, C, D, \ldots$ beschreiben dann ebensoviele Kurven, deren Polargleichung für O als Pol, OM als Axe man leicht — vgl. **a)** — findet. Ebenso zeigt uns die Figur alsbald, dafs

$$\sphericalangle\, OAM = OMA, \quad \sphericalangle\, OBM = \tfrac{1}{3} OMB,$$
$$\sphericalangle\, OCM = \tfrac{1}{7}\, OMC, \quad \sphericalangle\, ODM = \tfrac{1}{5}\, OMD \ldots$$

Wenn also eine beliebige durch M gezogene Gerade, die mit MO den Winkel ω bildet, die betreffenden Kurven in $G, H, K \ldots$ schneidet, so wird sie mit den Geraden $OG, OH, OK \ldots$, bew. die Winkel $\frac{\omega}{3}, \frac{\omega}{7}, \frac{\omega}{15} \cdots$ bilden; jene können daher zur Teilung eines beliebigen Winkels in $2^n - 1$ gleiche Teile dienen.

152. VIII. Die Teilung eines Winkels in $2^n + 1$ gleiche Teile läfst sich vermitteltst eines sehr einfachen Instruments ausführen —

des Multisektors[1]) —, der die Form eines rechtwinkligen Sonnenzeigers hat $NQSTCR$ (Taf. XII, Fig. 93); wenn die Verlängerung der Kante TC des Instrumentes NQ in P schneidet und $TC = CP$ genommen wird, so nennt man die gemeinsame Länge m dieser beiden Strecken den Modulus des Instrumentes. In P denke man sich einen Schreibstift befestigt. Denken wir uns nun eine beliebige feste Kurve $\varDelta$ (die Direktrix) gegeben, sowie einen festen Punkt O und stellen uns vor, dafs der Multisektor sich bewege derart, dafs seine Kante RC fortwährend durch O geht und der Punkt T die Direktrix beschreibe, so erzeugt der Punkt P eine neue Kurve $\varPi$, die wir Polyode nennen (von: πολύς, viel, und ἡ ὁδός, der Weg). Zwischen den beiden Kurven $\varDelta$ und $\varPi$ besteht eine geometrische Beziehung, die in Formeln gekleidet gestattet, die Gleichung der zweiten zu finden, wenn man die der ersten kennt. Bequemer ist es, alle betrachteten Figuren auf ein Polarkoordinatensystem mit dem festen Punkte O als Pol zu beziehen. Wenn

$$f(\varrho_1, \omega_1) = 0$$

die Gleichung der Direktrix $\varDelta$ ist, und ϱ, ω die Koordinaten des beweglichen Punktes P sind, so ist, da P und T gleichen Abstand von O haben,

$$\varrho = \varrho_1 .$$

Ferner ist der Winkel POT gleich der Differenz zwischen den Winkeln ω und ω_1, daher ist, weil in dem rechtwinkligen Dreiecke OCT die Seite $CT = m$, $OT = \varrho$, $\sphericalangle COT = \frac{\omega - \omega_1}{2}$,

$$m = \varrho \sin \frac{\omega - \omega_1}{2} .$$

Die Gleichung der Kurve $\varPi$ ist nun nichts weiter als das Resultat der Elimination von ϱ_1 und ω_1 aus den drei vorhergehenden Gleichungen, also

$$f\left(\varrho, \omega - 2 \arcsin \frac{m}{\varrho}\right) = 0 .$$

Nehmen wir z. B. als Direktrix die Polaraxe, für welche immer $\omega_1 = 0$, so ist die Gleichung der Polyode

$$m = \varrho \sin \frac{\omega}{\varrho} ;$$

die Polyode ist daher eine Trisekante (s. Nr. **99**), für die sich infolgedessen eine neue Erzeugungsweise ergiebt. Nehmen wir, was allgemeiner, für $\varDelta$ eine Parallele zur Polaraxe, so haben wir für diese

$$\varrho_1 \sin \omega_1 = k ,$$

wo k eine gegebene Konstante ist; man gelangt jetzt zu einer Kurve $\varPi$

1) T. W. Nicholson, *The multisection of angles* (The Analyst., X, 1883).

von der vierten Ordnung, die in kartesischen Koordinaten durch die Gleichung
$$y^2(x^2+y^2-k^2)=(x^2+y^2-kx-2m^2)^2$$
dargestellt wird, und die man als eine Verallgemeinerung der Trisekanten ansehen kann.

Zeigen wir nunmehr die Anwendung der Polyoden auf das Problem der Teilung eines beliebigen Winkels AOB.

a) Man ziehe die Gerade b parallel zu OB, in einem Abstande von dieser gleich dem Modulus m (Taf. XII, Fig. 94); man nehme als festen Punkt den Scheitel O, OA als Direktrix und zeichne die entsprechende Kurve Π; ist P einer der Schnitte von Π mit b, so hat man
$$\sphericalangle POB=\frac{1}{3}\sphericalangle AOB.$$
Trägt man auf OA nun $OT=OB$ ab, fällt das Lot OC auf PT und ist PH senkrecht OB, so sind die drei Dreiecke OCT, OCP, OHP kongruent, daher ist insbesondere $\sphericalangle TOC=COP=POH$, woraus die angegebene Behauptung sich ergiebt.

b) Um die 5-Teilung desselben Winkels AOB auszuführen (Taf. XIII, Fig. 95), ziehe man zuerst die Gerade b und die der Geraden OA entsprechende Polyode Π; dann nimmt man von neuem O als festen Punkt und die Gerade b als neue Direktrix, beschreibt eine neue Polyode Π' und bestimmt deren Schnitt P mit Π. Dann zeichne man den Kreis mit dem Centrum O und dem Radius OP und bezeichne mit T und T' dessen Schnitte mit OA und b; nachdem man die Geraden PT und PT' gezogen hat, fälle man auf diese die Lote OC und OC' und ziehe schliefslich $T'H$ senkrecht zu OB. Die fünf rechtwinkligen Dreiecke OCT, OCP, $OC'P$, $OC'T'$, OHT' ergeben sich als kongruent nach der Konstruktion, und also ist
$$\sphericalangle TOH=\frac{1}{5}\sphericalangle AOB.$$

c) In ähnlicher Weise verfährt man, um die 7-Teilung desselben Winkels AOB auszuführen (Taf. XIII, Fig. 96). Man zeichnet auch die Gerade b und die beiden Polyoden Π und Π', die bei der 5-Teilung gedient haben; dann nimmt man neuerdings O als Pol und Π' als Direktrix und konstruiert die zugehörige Polyode Π''. Sei P der gemeinsame Punkt von Π und Π''; ihm entspricht, als Punkt von Π betrachtet, der Punkt T von OA, während, wenn er als Punkt von Π'' betrachtet wird, T'' der entsprechende von Π' sein möge; schliefslich entspricht T'' dem T' auf b. Man ziehe nun die Geraden PT, PT'', $T''T'$, fälle auf diese die Lote OC, OC'', OC', und ziehe auch noch $T'H$ senkrecht zu OB. Infolgedessen entstehen sieben kongruente rechtwinklige Dreiecke, die beweisen, dafs
$$\sphericalangle T'OH=\frac{1}{7}\sphericalangle AOB.$$

Die soeben für die Teilung in 3, 5, 7 Teile angewandte Methode läfst sich ohne weiteres auf die 9, 11 ... Teilung erweitern; somit kann also der Multisektor — wie behauptet — zur Teilung eines beliebigen Winkels in $2^n + 1$ gleiche Teile dienen[1]).

Dreizehntes Kapitel.

Kurven mit Centrum oder mit Symmetrie-Axen versehen[2]).

153. Unter dem Centrum einer ebenen Kurve Γ versteht man einen Punkt C ihrer Ebene, von der Beschaffenheit, dafs jede durch ihn gezogene Gerade die Γ in Punktepaaren schneidet, die symmetrisch in Bezug auf C sind; die Punkte von Γ verteilen sich daher auf ∞^1 Paare, gebildet jedes von einem Punkte und seinem Gegenpunkt; zu sich selbst Gegenpunkt ist das Centrum C und alle Punkte der unendlich fernen Geraden. Wenn die Kurve Γ ein Centrum hat (und mehr als eins kann sie offenbar nicht besitzen, es sei denn, dafs sie transcendent sei, oder aus einem Büschel paralleler Geraden bestehe), so nennt man sie centro-symmetrisch, und sie entspricht sich dann selbst in einer harmonischen Homologie, die zum Centrum C hat und als Axe die unendlich ferne Gerade; daher gehört sie zur Klasse der homologisch-harmonischen Kurven. Die Definition des Centrums setzt nicht voraus, dafs die Kurve algebraisch sei, und in der That giebt es transcendente centrische Kurven; wir wollen jedoch festhalten, dafs die im Verlaufe dieses Kapitels behandelten Kurven algebraisch seien[3]).

Alle Kurven zweiter Ordnung besitzen ein Centrum (in endlicher oder auch in unendlicher Entfernung); alle Kurven dritter Ordnung

---

1) S. H. Johnson hat die Bemerkung gemacht (s. die Note *The multisection of angles*, The Analyst., X, 1883), dafs die dargelegte Vielteilung sich schon in einer Abhandlung vom Jahre 1880 von J. B. Miller findet (*The Chordel and its application to the general section of an angle,* Van Vorstrands Engineering Magazine, XXII); dieser benutzt gewisse Kurven — von ihm Chordalen genannt —, die allgemeiner als die Polyoden sind.

2) Die Kurven, denen dieses Kapitel gewidmet ist, sind Spezialfälle jener, die in einer Homographie sich selber entsprechen; S. Kantor hat eine Methode angegeben, ihre allgemeine Gleichung zu finden; s. *Premières fondaments pour une théorie des transformations planes univoques* (Napoli Mem. 3, 1891) I. Teil, § 2.

3) Für das Folgende vergl. insbesondere die grofse Abhandlung von Steiner, *Über solche algebraische Kurven, welche einen Mittelpunkt haben und über darauf bezügliche Eigenschaften allgemeiner Kurven, sowie über geradlinige Transversalen der letzteren* (Crelles Journ., XLVII, 1854). Viele der daselbst ausgesprochenen Sätze wurden von Güfsfeldt bewiesen in der Arbeit *Über Curven, welche einen harmonischen Pol und eine harmonische Gerade besitzen* (Math. Ann., II, 1870).

können in die mit einem Centrum versehenen projiziert werden (s. Nr. **14**); die Kurven höherer Ordnung besitzen im allgemeinen kein Centrum, noch auch können sie in centrische Kurven projiziert werden; dennoch existieren viele Kurven 4ter, 6ter und auch höherer Ordnung, die sich dieser wichtigen Eigenschaft erfreuen (s. Abschn. III u. IV). Dafs es centrische Kurven beliebiger Ordnung giebt, ersieht man, indem man beachtet, dafs, wenn man im allgemeinen mit f_k eine binäre Form in x, y (kartesischen Koordinaten) von der Ordnung k bezeichnet, die Gleichungen

$$f_0 + f_2 + f_4 + \cdots f_{2\mu} = 0, \quad f_1 + f_3 + f_5 + \cdots f_{2\nu-1} = 0 \;. \quad (1)$$

zwei solche Kurven darstellen, die erstere von der Ordnung $n = 2\mu$, die zweite eine von der Ordnung $n = 2\nu - 1$, welche beide den Anfangspunkt als Centrum haben. Die erste enthält

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2\mu + 1) = (\mu + 1)^2 = \frac{n(n+4)}{4} + 1$$

Konstanten, während die zweite deren enthält

$$2 + 4 + \cdots 2\nu + \nu(\nu + 1) = \frac{n(n+4) - 1}{4} + 1 \,.$$

Daraus folgt: **Es giebt $\infty^{\frac{n(n+4)}{4}}$ oder $\infty^{\frac{n(n+4)-1}{4}}$ Kurven n^{ter} Ordnung, die einen gegebenen Punkt als Centrum haben, jenachdem n gerade oder ungerade ist.** Da es nun $\infty^{\frac{n(n+3)}{2}}$ Kurven von der Ordnung n giebt, **so ist der Umstand, einen bestimmten Punkt als Centrum zu haben, für eine Kurve n^{ter} Ordnung äquivalent mit $\frac{n(n+2)}{4}$ oder $\frac{n(n+2)-1}{4}$ einfachen Bedingungen, jenachdem n gerade oder ungerade ist.** Man erkennt auch, **dafs, wenn das Centrum der Lage nach nicht gegeben ist, es in der Ebene $\infty^{\frac{n(n+4)+8}{2}}$ oder $\infty^{\frac{n(n+4)+7}{2}}$ centrische Kurven von der Ordnung n giebt, jenachdem n gerade oder ungerade ist.** Durch $\frac{n(n+4)+8}{2}$ oder $\frac{n(n+4)+7}{2}$ beliebige Punkte der Ebene gehen daher im allgemeinen eine endliche Zahl centrischer Kurven von der Ordnung n; die Bestimmung ihrer Anzahl ist ein Problem, das Steiner für einige spezielle Fälle gelöst hat, das er im allgemeinen aufgestellt hat[1]), von dem wir aber glauben, dafs es bis heute noch nicht gelöst worden ist. Da in den Gleichungen (1) eine gewisse Anzahl Glieder fehlen können, so folgt: **Eine centrische Kurve gerader Ordnung enthält selbst ihr eigenes Centrum entweder garnicht, oder sie geht durch dieses eine gerade Anzahl von Malen hindurch; eine centrische Kurve ungerader Ordnung hingegen geht**

---

1) *Aufgaben und Sätze* (Crelles Journ., XLVII, S. 105, Nr. 1).

durch ihr Centrum eine ungerade Anzahl $(2r+1)$ von Malen hindurch; falls $r=0$, so ist die entsprechende Tangente eine Wendetangente.

Es sei I ein einfacher unendlich ferner Punkt der in Bezug auf C symmetrischen Kurve Γ; da I mit seinem Gegenpunkte koinzidiert, so mufs CI die Kurve in I berühren; folglich: **Alle Asymptoten, die zu einfachen unendlich fernen Punkten einer centrischen Kurve gehören, gehen durch das Centrum.** Um zu sehen, wie die Tangenten in einem unendlich fernen, r-fachen Punkte einer centro-symmetrischen Kurve verteilt sein können, schreiben wir die Gleichungen (1) in folgender Weise:

$$\left.\begin{aligned} f_0 z^{2\mu} + f_2 z^{2\mu-2} + \cdots f_{2\lambda} z^{2\mu-2\lambda} + (ax+by)^r \varphi_{2\mu-r} = 0, \\ f_1 z^{2\nu} + f_3 z^{2\nu-2} + \cdots f_{2\lambda+1} z^{2\nu-2\lambda} + (ax+by)^r \varphi_{2\nu+1-r} = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (1')$$

wo z eingeführt ist, um die Homogenität herzustellen. Jede Tangente im Punkte $(ax+by=0,\ z=0)$ wird eine Gleichung von der Form $ax+by=\omega z$ haben; aufserdem sieht man leicht, dafs, wenn $r<2\mu-2\lambda$ ist, $\omega=0$ sein mufs, während, wenn $r>2\mu-2\lambda$, $\omega=\infty$ sein wird. Im ersteren Falle geht jene Tangente durch das Centrum der Symmetrie, während sie im zweiten mit der unendlich fernen Geraden zusammenfällt. In dem zwischenliegenden Falle, $r=2\mu-2\lambda$, erhält man

$$\omega = \sqrt[r]{-\frac{f_{2\lambda+1}}{\varphi_{2\lambda+1}}},$$

wobei man sich vorzustellen hat, dafs in den Formen $f_{2\lambda+1}$, $\varphi_{2\lambda+1}$ $\frac{x}{y}=-\frac{a}{b}$ gesetzt sei. Weil nun r eine gerade Zahl ist, so sind die r Werte von ω, von denen nicht mehr als zwei reell sind, paarweise gleich, aber von entgegengesetztem Vorzeichen. Folglich: **Die Tangenten in den unendlich fernen vielfachen Punkten einer centrosymmetrischen Kurve fallen entweder mit der unendlich fernen Geraden zusammen, oder gehen durch das Centrum, oder sind in Bezug auf dieses paarweise symmetrisch; reell sind höchstens zwei derselben.**

Seien M, N zwei auf einer durch C gehenden Geraden g gelegene Punkte von Γ, dann liegen auf g auch die Gegenpunkte M' und N' von M und N; wenn wir nun im besonderen annehmen, dafs M und N zusammenfallen, so fallen auch M' und N' zusammen, und g wird eine Doppeltangente werden; daraus folgt: **Alle Geraden durch das Centrum einer Kurve, welche diese in endlicher Entfernung berühren, sind Doppeltangenten derselben.** Ebenso: Betrachtet man zwei beliebige Punkte M und N von Γ und ihre Gegenpunkte M' und N', so werden die Sehnen MN und $M'N'$ nicht nur parallel sein, sondern auch gleichen Abstand vom Centrum haben; insbesondere

wenn M mit N zusammenfällt, thun dies auch M' und N', und demnach: **Die Tangenten in zwei Gegenpunkten einer centrischen Kurve sind in Bezug auf das Centrum symmetrische Gerade.** In ähnlicher Weise kann man nachweisen: **Die singulären Punkte einer centrischen Kurve, die nicht im Centrum, noch auch in unendlicher Entfernung liegen, sind zu je zweien symmetrisch in Bezug auf das Centrum; dasselbe gilt für die zugehörigen Tangenten.** Demnach sind auch die vielfachen Tangenten zu je zweien symmetrisch, und ihre Berührungspunkte sind Gegenpunkte.

Die ersten Polaren des Centrums in Bezug auf die Kurve (1) bestehen aus der unendlich fernen Geraden und einer Kurve Γ_1 von der Ordnung $n-2$, die dargestellt wird durch eine der beiden folgenden Gleichungen:

$$\mu f_0 + (\mu - 1) f_2 + \cdots + f_{2\mu-1} = 0,$$
$$(\nu - 1) f_2 + (\nu - 2) f_3 + \cdots + f_{2\nu-1} = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

beide haben den Punkt C als Centrum. Machen wir für Γ_1 dieselben Schlüsse wie für Γ, und fahren so fort, so erhalten wir eine Reihe Kurven von der Ordnung $n-4$, $n-6$, $n-8, \ldots$; die letzte derselben ist ein Kegelschnitt, wenn n gerade, und eine Gerade, wenn n ungerade ist, nämlich die Tangente an die Kurve im Centrum.

Bezeichnen wir mit f die linke Seite einer der beiden Gleichungen (1) und betrachten den unendlich fernen Punkt P der Richtung, die mit Ox den Winkel ω bildet, so sehen wir alsbald, dafs die erste Polare von P dargestellt wird durch die Gleichung

$$\cos\omega \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\omega \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Diese Polare ist demnach eine Kurve von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung und concentrisch mit der Kurve Γ. Variieren wir P, so variiert auch die Kurve (3) und erzeugt ein Büschel, das zu Grundpunkten die $(n-1)^2$ Punkte hat, in denen sich die Kurven $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ schneiden. Ist n gerade, so sind die Grundpunkte das Centrum und $\frac{n(n-2)}{2}$ Paare von Gegenpunkten; wenn jedoch n ungerade ist, so bestehen die Grundpunkte aus $\frac{(n-1)^2}{2}$ Gegenpunktepaaren.

Steiner hat bemerkt, dafs die centrischen Kurven bei der Untersuchung der metrischen Eigenschaften der algebraischen Kurven auftreten: um dies an einem Beispiele zu zeigen, möge folgende Betrachtung dienen. Es sei Γ eine beliebige Kurve n^{ter} Ordnung, O ein beliebiger Punkt seiner Ebene; Γ' sei die zu Γ in Bezug auf O symmetrische Kurve. Dann haben Γ und Γ' offenbar die unendlich fernen Punkte gemeinsam; die übrigen $n(n-1)$ gemeinsamen Punkte sind dann auf einer Kurve Π

von der Ordnung $n-1$ gelegen und bilden $\frac{n(n-1)}{2}$ Paare von in Bezug auf O symmetrischen Punkten. Diese Schlüsse kann man in folgendem Satze aussprechen: **Durch einen beliebigen Punkt der Ebene einer Kurve n^{ter} Ordnung gehen im allgemeinen $\frac{n(n-1)}{2}$ Sehnen, die jenen Punkt als Mittelpunkt haben; wenn ausnahmsweise $\frac{n(n-1)}{2}+1$ derselben hindurchgehen, so ist die Kurve in Bezug auf diesen Punkt symmetrisch; in dem allgemeinen Falle liegen die Endpunkte jener Sehnen auf einer Kurve von der Ordnung $n-1$, welche nach Steiner die „innere Polare" des betreffenden Punktes heifst.** Wenn dieser Punkt ein vielfacher der gegebenen Kurve ist, so erfährt der obige Satz Modifikationen, die man leicht angeben kann[1]).

154. Eine Gerade r wird der zu einer bestimmten Richtung d konjugierte Durchmesser einer Kurve Γ genannt, wenn jede zu d parallele Gerade Γ in Punktpaaren schneidet, deren Mitten auf der Geraden r liegen; in einem solchen Falle verteilen sich die Punkte von Γ in ∞^1 Paaren von gegenüberliegenden Punkten; die Kurve heifst dann axial-symmetrisch und entspricht sich selber in der harmonischen Homologie, deren Axe r und deren Centrum der unendlich ferne Punkt von d ist; sie ist also eine homologisch-harmonische Kurve (s. Nr. **153**). Es entsprechen sich selber dieser Punkt der unendlich fernen Geraden und alle Punkte jenes Durchmessers. Wenn insbesondere d senkrecht zu r ist, so haben wir eine orthogonale Symmetrie, und r ist eine Axe der Kurve. Nehmen wir als x-Axe den Durchmesser r und als y-Axe eine Gerade, welche dieselbe Richtung wie d hat, so wird eine Kurve Γ, die eine solche Symmetrie besitzt, wenn sie algebraisch und von der Ordnung n ist, eine Gleichung haben, die sich nicht ändert, wenn das Vorzeichen von y auch wechselt, d. h. eine Gleichung von dem einen oder anderen der folgenden Typen, jenachdem n gerade oder ungerade:

1) Die Untersuchung der centro-symmetrischen Kurven bietet eine gewisse Analogie mit folgendem Problem: „Gegeben zwei senkrechte Axen Ox und Oy; eine Kurve C zu finden derart, dafs, wenn man einen Punkt m derselben nimmt und auf Om einen Punkt μ, so dafs die Strecke μm gleich einer Konstanten $2a$ ist, der Ort der Punkte μ eine Kurve Γ wird, die in gleicher Weise zu Ox gelegen ist, wie C in Bezug auf Oy." Euler fand (m. s. P. H. Fuss, *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIième Siècle*, St. Petersburg 1843, I, S. 72), dafs die allgemeine parametrische Darstellung einer solchen Kurve ist

$$x=\frac{(a+2)\sqrt{a^2+z^2+2Q}}{\sqrt{2(a^2+z^2)}},\qquad y=\frac{(a+2)\sqrt{a^2+z^2+2Q}}{\sqrt{2(a^2+z^2)}},$$

wo z ein Parameter und Q eine ungerade Funktion desselben ist; wenn z. B. $Q=naz$ ist, erhält man eine Kurve 8ter Ordnung.

$$f_0(x)y^{2\mu} + f_2(x)y^{2\mu-2} + \cdots + f_{2\mu}(x) = 0,$$
$$f_1(x)y^{2\nu-2} + f_3(x)y^{2\nu-4} + \cdots + f_{2\nu-1}(x) = 0, \quad . \quad . \quad (4)$$

wo $f_k(x)$ im allgemeinen ein Polynom vom Grade k in x ist. Wenden wir auf diese dieselben Betrachtungen wie auf (1) an, so ergiebt sich: **Es giebt $\infty^{\frac{n(n+4)}{4}}$ oder $\infty^{\frac{n(n+4)-1}{4}}$ Kurven n^{ter} Ordnung mit einer bestimmten axialen Symmetrie, jenachdem n gerade oder ungerade ist; eine bestimmte Symmetrie zu besitzen, ist daher äquivalent mit $\frac{(n+1)^2-1}{4}$ oder $\frac{(n+1)^2}{4}$ einfachen Bedingungen für eine Kurve n^{ter} Ordnung, jenachdem n gerade oder ungerade ist. Die Zahl der Kurven n^{ter} Ordnung mit axialer Symmetrie beträgt daher $\infty^{\frac{(n+1)^2-1}{4}+3}$ bezw. $\infty^{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2+3}$.**

Die Tangenten an die Kurve Γ, die r zum konjugierten Durchmesser in Bezug auf die Richtung d hat, in den einfachen Punkten, in welchen r sie schneidet, sind parallel zu d. Alle übrigen zu d parallelen Tangenten sind Doppeltangenten. Die Tangenten in zwei gegenüberliegenden Punkten schneiden sich auf der Axe; singulären Punkten entsprechen symmetrisch gegenüberliegende u. s. w. — Wenn die Kurve von ungerader Ordnung ist, so geht sie durch den unendlich fernen Punkt von d und hat daselbst einen Wendepunkt; in besonderen Fällen kann dieser von einer gröfseren, aber immer ungeraden Vielfachheit sein; wenn dagegen die Kurve von gerader Ordnung ist, so geht die Kurve eine gerade Anzahl von Malen, Null nicht ausgenommen, durch den unendlich fernen Punkt von d.

Allen diesen, die axial-symmetrischen Kurven betreffenden Sätzen, entsprechen ebenso viele die centro-symmetrischen Kurven betreffende. Jedoch die letzteren erfreuen sich einer Besonderheit, der nichts Analoges bei den Kurven entspricht, mit denen wir uns jetzt beschäftigen; während nämlich eine algebraische, nicht zerfallende Kurve nur in Bezug auf ein Centrum symmetrisch sein kann (da eine Strecke ja nur einen Mittelpunkt haben kann), so kann sie in Bezug auf mehrere Axen symmetrisch sein; um dies zu zeigen, möge das Beipiel der Kegelschnitte genügen, die ja symmetrisch in Bezug auf jeden Durchmesser und den dazu konjugierten sind. Die Untersuchung der Verteilung der Durchmesser einer Kurve wurde mit mäfsigem Erfolge von Euler[1]) versucht, der jedoch das Leitgesetz dieser Verteilung erkannt hat; dieses Gesetz wurde dann später in seiner ganzen Allgemeinheit von Wantzel[2])

1) *Sur quelques propriétés des sections coniques qui conviennent à une infinité d'autres lignes courbes* (Mém. de l'Acad. de Berlin, I, 1745).

2) *Mémoire sur la théorie des diamètres rectilignes des courbes quelconques* (Liouvilles Journ., XIV, 1849).

aufgestellt, dessen Beweisführung wir nunmehr in ihren Hauptzügen wiedergeben wollen.

Eine Kurve, die einen einzigen Durchmesser hat, wird im allgemeinen keine anderen Spezialitäten haben als diejenigen, die sich aus der Definition des Durchmessers ergeben; dasselbe kann man sagen, wenn die Kurve ein Paar konjugierter Durchmesser besitzt. Aber: **Wenn eine Kurve zwei Durchmesser hat, die nicht zu einander konjugiert sind, so hat sie noch einen dritten, der durch den Schnittpunkt jener beiden ersten geht; infolge dessen noch einen vierten und so weiter ins Unendliche, es sei denn, dafs dieser wieder mit einem zusammenfiele, von dem man ausgegangen ist.** Um dies zu beweisen, nehmen wir an, dafs OA und OB die beiden gegebenen Durchmesser seien, und dafs die Geraden a und b (Taf. XIII, Fig. 97), die durch den Schnittpunkt gezogen sind, die Richtungen der bezüglichen konjugierten Sehnen angeben; die beiden Symmetrieen seien bezw. $\mathfrak{S}_a$ und $\mathfrak{S}_b$. Es giebt nun unendlich viele Kegelschnitte K, die OA und a, OB und b als Paare konjugierter Durchmesser haben; es sind lauter konzentrische und homothetische Kurven, Ellipsen oder Hyperbeln, jenachdem die beiden konjugierten Durchmesserpaare sich trennen oder nicht; im Speziellen sind es Kreise, wenn OA und OB Symmetrieaxen sind. In jedem Falle geht durch einen beliebigen Punkt der Ebene eine einzige und bestimmte Kurve K. Von den Kegelschnitten K betrachten wir denjenigen, der durch einen Punkt M der Kurve Γ geht, die der Annahme gemäfs sich der beiden Symmetrieen $\mathfrak{S}_a$ und $\mathfrak{S}_b$ erfreut. Wir ziehen durch M die Sehne MP von K, die parallel zu a ist, und die Sehnen MN und PQ, die parallel zu b sind, wir verbinden O mit dem Mittelpunkte C der Sehne NQ. Es wird behauptet: **Der Durchmesser OC hat eine von dem auf Γ gewählten Punkte M unabhängige Lage.** Aus der angegebenen Konstruktion ergiebt sich nämlich

$$\text{Sektor } QOB = \text{Sektor } POB; \quad \text{Sektor } NOB = \text{Sektor } MOB,$$

daher $$\text{Sektor } NOC = \text{Sektor } MOA,$$

und $$\text{Sektor } BOC = \text{Sektor } BOA.$$

Folglich ist OC jener Durchmesser von K, der mit OB einen Sektor bildet, der gleich ist dem durch die Durchmesser OA und OB gebildeten. Aber wegen der homothetischen und konzentrischen Lage der Kegelschnitte K ist er auch unabhängig vom Punkte M, durch den wir den beliebigen Kegelschnitt hindurch gehen liefsen, er hängt daher ausschliefslich ab von den Durchmesserpaaren OA, a und OB, b. — Wir beachten jetzt, dafs, weil M ein Punkt von Γ war, dieser Kurve auch die Punkte P und N angehören, die in der Symmetrie $\mathfrak{S}_a$ und $\mathfrak{S}_b$ dem Punkte M entsprechen; ebenso wie Q dem P in $\mathfrak{S}_b$ entspricht. Aufserdem entsprechen sich N und Q in der Symmetrie $\mathfrak{S}_c$,

die durch den Durchmesser OC und die zu ihm konjugierte Richtung c bestimmt ist; demnach entspricht Γ auch sich selber in der Symmetrie $\mathfrak{S}_c$. Wenden wir nun dieselbe Überlegung wie bei OA und OB auf das Paar OB und OC an, so gelangen wir zu einer neuen Symmetrie $\mathfrak{S}_d$, welche jedoch mit einer der vorigen zusammenfallen kann. Fahren wir so fort, so erkennen wir: **Alle durch einen Punkt gehenden Durchmesser einer Kurve gehören einem Kegelschnitte an, in welchem sie zu den Richtungen der Sehnen selbst konjugiert sind, und begrenzen jeder mit dem folgenden und dem zugehörigen Bogen des Kegelschnittes einander gleich grofse Sektoren.** Im Speziellen: **Alle durch einen Punkt laufende Axen einer Kurve bilden mit einander gleiche Winkel.** — Aus den obigen Überlegungen geht hervor, dafs, wenn die Kurve Γ unendlich viele Durchmesser besitzt, die durch einen Punkt gehen, so hat sie mit dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ unzählig viele Punkte gemeinsam, müfste daher notwendigerweise transzendent sein; **daher haben die algebraischen Kurven eine endliche Zahl von Durchmessern, die durch einen Punkt laufen.** Im Falle ihre Ordnung ungerade ist, kann die Zahl derselben die Ordnung der Kurve nicht übersteigen, aus dem Grunde, weil mit jeder Symmetrie, in Bezug auf eine Axe, ein unendlich ferner Punkt der Kurve selbst verknüpft ist. Insbesondere: **Die durch denselben Punkt gehenden Axen einer algebraischen Kurve bilden eine Windrose.**

Bei dem Beweise des ersten der vorigen Sätze sind zwei Annahmen stillschweigend ausgeschlossen worden: erstens, dafs a und b zusammenfallen, zweitens, dafs die beiden Durchmesser parallel sind. Wir müssen jetzt zusehen, was in jedem dieser Spezialfälle eintreten wird:

a) Im ersten Falle ziehen wir (Taf. XIII, Fig. 98) eine Gerade AB parallel zur gemeinsamen Richtung von a und b. Nehmen wir dann beliebig einen Punkt M von Γ und suchen die entsprechenden P und N in $\mathfrak{S}_a$ und $\mathfrak{S}_b$, darauf den dem P in $\mathfrak{S}_b$ entsprechenden Q; es ist klar, dafs die Punkte N, P, Q auf der durch M zu AB gezogenen Parallelen liegen, und dafs, wenn man auf dieser Geraden die Strecke $BC = AB$ nimmt, die Punkte N und Q sich in der Symmetrie $\mathfrak{S}_c$ entsprechen, welche als Axe OC und als konjugierte Richtung AB hat, und dafs die Kurve Γ sich auch dieser dritten Symmetrie erfreut. Fahren wir in dieser Weise fort, so sehen wir: **Wenn eine Kurve zwei sich schneidende Durchmesser hat, die derselben Sehnenrichtung konjugiert sind, so hat sie unzählige andere, die durch denselben Punkt gehen, und die auf einer Geraden, welche diese Richtung hat, einander gleiche Strecken abschneiden.**

b) Im zweiten Falle, wenn AA' und BB' zwei parallele Durchmesser der Kurve Γ sind, den Richtungen der Geraden a und b bezw.

konjugiert, so konstruiere man eine Parabel K, in welcher den Durchmessern AA', BB' die zu a und b parallelen Sehnen konjugiert sind; wenden wir die vorige Überlegung mit den nötigen Modifikationen an, so ergiebt sich: **Wenn eine Kurve zwei parallele Durchmesser hat, so hat sie deren unendlich viele in gleichen Abständen von einander, die derselben Parabel angehören, in welcher sie zu denselben Sehnen konjugiert sind.**

155. Die unter diesen beiden Voraussetzungen betrachteten Kurven Γ sind sämtlich transzendent; wir werden daher nicht weiter von diesen Voraussetzungen sprechen und kehren zu dem allgemeinen Falle zurück, um zu zeigen, wie man analytisch die übrigen Durchmesser einer Kurve Γ bestimmt, die zwei schon bekannte Symmetrieen besitzt. Zu dem Zwecke nehmen wir ein kartesisches Koordinatensystem, welches OA und a als Axen hat; wir nehmen an, dafs α der von den Axen gebildete Winkel sei, und dafs

$$y = mx, \qquad y = nx$$

die Gleichungen von OB und b seien. Haben m und n entgegengesetzte Vorzeichen, so sind die Kegelschnitte K sämtlich Ellipsen; die Gleichung einer von ihnen möge sein

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Da OA und b zwei konjugierte Durchmesser von (5) sind, so besteht die Beziehung

$$mn + \frac{b^2}{a^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Gehen wir zu Polarkoordinaten ϱ und φ über, wobei O Pol, OA Polaraxe ist, so müssen wir setzen

$$x = \varrho \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha}, \qquad y = \varrho \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha};$$

wegen (5) bekommen wir dann:

$$\varrho^2 = \frac{a^2 b^2 \sin^2 \alpha}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \sin^2 (a - \varphi)};$$

Die Fläche des Sektors Σ, der zwischen dem Halbmesser OA und dem Halbmesser, der mit OA den Winkel φ bildet, liegt, wird daher gegeben durch

$$\Sigma = \frac{1}{2} \int_0^\varphi \varrho^2 \cdot d\varphi = \frac{a^2 b^2 \sin \alpha}{2} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \sin^2 (\alpha - \varphi)}$$

$$= \frac{a^2 b^2 \sin^2 \alpha}{2} \int_0^\varphi \frac{d \operatorname{tg} \varphi}{b^2 \sin^2 \alpha - 2 b^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi + (a^2 + b^2 \cos^2 \alpha) \operatorname{tg}^2 \varphi};$$

nach Ausführung der Integration ergiebt sich

$$\Sigma = \frac{ab \sin \alpha}{2} \omega, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

wenn man setzt

$$\omega = \operatorname{arc\,tg} \frac{(a^2 + b^2 \cos^2 \alpha) \operatorname{tg} \varphi - b^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{ab \sin \alpha}$$

oder auch wegen Gleichung (6)

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{(1 - mn \cos^2 \alpha) \operatorname{tg} \varphi + mn \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{-mn} \sin \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Betrachten wir im besonderen als zweiten Halbmesser des Sektors den Halbmesser OB, so ist in diesem Falle

$$m = \frac{\sin \varphi}{\sin (\alpha - \varphi)}, \quad \text{oder auch} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{m \sin \alpha}{1 + m \cos \alpha};$$

infolgedessen wird Gleichung (8) nach einigen Reduktionen

$$\operatorname{tg} \omega = \sqrt{-\frac{m}{n} \frac{1 + n \cos \alpha}{1 + m \cos \alpha}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Wenn aber, entgegen der vorhin gemachten Annahme, m und n dasselbe Vorzeichen haben, so sind die Kegelschnitte **K** sämtlich Hyperbeln. Ist nun

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5')$$

eine derselben, so hat man

$$mn = \frac{b^2}{a^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6')$$

es besteht auch die Gleichung (7), jedoch der Wert von ω wird nicht mehr durch (9) gegeben, sondern durch folgende Gleichung:

$$\mathfrak{Tg}\, \omega = \sqrt{\frac{m}{n} \frac{1 + n \cos \alpha}{1 + m \cos \alpha}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9')$$

Fassen wir zusammen, so können wir sagen: Die Fläche Σ des von den beiden gegebenen Halbmessern OA und OB begrenzten Sektors des Kegelschnitts **K** ist durch (7) gegeben, während ω durch (9) oder (9') bestimmt wird, jenachdem **K** eine Ellipse oder eine Hyperbel ist. In dem Spezialfalle, daſs OA eine Axe ist, werden die Gleichungen (7), (9), (9'), weil $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist, zu

$$\Sigma = \frac{ab}{2} \omega, \quad \operatorname{tg}^2 \omega = -\frac{m}{n}, \quad \mathfrak{Tg}^2 \omega = \frac{m}{n},$$

die von Wantzel aufgestellt wurden, der stillschweigend annahm, daſs der erste Durchmesser, von dem man ausging, eine Axe sei.

Wir betrachten nun einen dritten Durchmesser der Kurve Γ, OC und den dazu konjugierten. Wenn $y = m'x$ und $y = n'x$ die Gleichungen dieser beiden sind, so ist

$$m'n' = mn; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Die Fläche des Sektors BOC' wird gleich sein der des Durchmessers AOB, daher wird die des Sektors AOC das Doppelte von der des

Sektors AOB sein, also gleich $\frac{ab \sin\alpha}{2} \cdot 2\omega$, und man erhält, je nach dem Falle, Ellipse oder Hyperbel

$$\operatorname{tg} 2\omega = \sqrt{-\frac{m'}{n'}\frac{1+n'\cos\alpha}{1+m'\cos\alpha}} \cdot \cdot (11), \quad \mathfrak{Tg}\, 2\omega = \sqrt{\frac{m'}{n'}\frac{1+n'\cos\alpha}{1+m'\cos\alpha}} \cdot \cdot (11')$$

Kombinieren wir (10) mit (11) oder (11'), so erhalten wir m' und n', wodurch dann die dritte Symmetrie bestimmt ist, welche Γ besitzt. Eine vierte erhalten wir, wenn wir einen Durchmesser OD nehmen, so dafs der Sektor OAD das dreifache von AOB ist, u. s. f. Es ist klar, dafs, wenn man schliefslich wieder auf den Durchmesser AO zurückkommt, von dem man ausgegangen ist, der Fall der Ellipse vorliegen, und der durch Gleichung (9) definierte Winkel ω ein aliquoter Teil des vollen Winkels sein mufs.

In dem Falle, dafs die beiden Ausgangs-Symmetrieen rechtwinklig sind, hat man $\alpha = \frac{\pi}{2}$, aber $mn = -1$, und Gleichung (9) liefert $\operatorname{tg}\omega = m$, wie es sein mufs. Wenn aufserdem noch $\omega = \frac{\pi}{r}$, so hat die Kurve Γ als Durchmesser die r Geraden durch den Anfangspunkt, welche mit OA die Winkel bilden

$$0, \frac{\pi}{r}, \frac{2\pi}{r}, \frac{3\pi}{r} \cdots \frac{(r-1)\pi}{r}.$$

Nehmen wir an, dafs Γ eine algebraische Kurve sei[1]) und die Polargleichung habe

$$f(\varrho, \cos\varphi, \sin\varphi) = 0,$$

so mufs f von der Beschaffenheit sein, dafs es sich nicht ändert, wenn das Vorzeichen von φ wechselt; daher dürfen in f nur die geraden Potenzen von $\sin\varphi$ auftreten, welche man vermittelst der Identität $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$ verschwinden lassen kann. Alsdann wird die vorige Gleichung die Form annehmen:

$$F(\varrho, \cos\varphi) = 0.$$

Da nun Γ symmetrisch ist in Bezug auf die Gerade $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{k\pi}{n}$ $(k = 1, 2, 3 \ldots, n-1)$, so wird die nunmehr gefundene Gleichung identisch sein müssen mit

$$F\left(\varrho, \cos\left(\frac{2k\pi}{n} - \varphi\right)\right) = 0,$$

was erfordert, dafs sie von der Form sei

$$\mathcal{F}(\varrho, \cos n\varphi) = 0.$$

Machen wir hier die Voraussetzung, dafs $\mathcal{F}$ eine algebraische, rationale und ganze Funktion von ϱ und $\cos n\varphi$ sei, oder auf eine solche

1) Euler, *Introductio in analysin infinitorum* (Lausannae 1748) Cap. XV.

zurückführbar, so erhalten wir damit die analytische Darstellung einer algebraischen Kurve, die n-fach axial-symmetrisch ist[1]).

Ein Beispiel von Kurven mit einer bestimmten Zahl von Symmetrie-Axen bieten uns die Rhodoneen (s. Kap. 8 dieses Abschnittes). Ein zweites liefern die Kurven, die durch eine Gleichung von folgender Form dargestellt werden

$$\varrho = \frac{p}{1 + e \cos n\omega}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

wo p eine gegebene Strecke e und n gegebene Zahlen sind. Für $n = 0$ stellt diese Gleichung einen Kreis dar, für $n = 1$ einen Kegelschnitt, dessen Brennpunkt der Pol ist; demnach können die fraglichen Kurven als analytische Verallgemeinerung der Kegelschnitte aufgefafst werden, können daher denjenigen zugesellt werden, von denen im 2.—6. Kap. dieses Abschnittes die Rede war. Sie wurden jedoch nicht in Hinsicht hierauf eingeführt, sondern wegen der Anwendung, die man von ihnen in der Kinematik macht, woselbst sie nach einem Vorschlage von Laboulaye[2]) den Namen Kurven mit n Bäuchen (courbes à n ventres) tragen. Setzt man

$$\varrho_1 = a(1 + e \cos n\omega),$$

so hat man die Gleichung der Konchoide einer Rhodonee; infolgedessen kann man (12′) schreiben als

$$\varrho \cdot \varrho_1 = ap,$$

Eine Kurve mit n Bäuchen ist die Inverse einer Rhodoneenkonchoide; damit ist ein Weg zu ihrer Konstruktion gegeben.

Die blofse Betrachtung der Gleichung (12) führt uns zu einer wichtigen Einteilung. Ziehen wir nämlich in Erwägung, dafs, wenn wir ω derart wählen, dafs

$$1 + e \cos n\omega = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

so mufs $\varrho = \infty$ werden; nun hat diese Gleichung für ω nur dann reelle Wurzeln, wenn $|e| \geq 1$; folglich: **Die durch (12) dargestellten Kurven erstrecken sich ins Unendliche, wenn $|e| \geq 1$, andernfalls liegen sie ganz innerhalb des Kreisringes, der von den mit den Radien $p : |1 \pm e|$ um den Pol beschriebenen Kreisen begrenzt wird.**

Im ersteren Falle setzen wir $-\frac{1}{e} = \cos\alpha$; die Gleichung (1) wird alsdann

$$\varrho = \frac{p \cos\alpha}{\cos\alpha - \cos n\omega} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12')$$

1) Weitere Entwickelungen über derartige Kurven finden sich in der Abhandlung von E. Ciani, *Le linee diametrali delle curve algebriche piane, in particolare i lori assi di simmetria* (Pisa Annali, 1889).

2) *Traité de cinématique* (Paris 1849). Wir entnehmen diese Citation ebenso die Definitionsgleichung (12) aus Brocard, *Notes de bibliographie des courbes géométriques* (Bar-le-Duc 1897, S. 65—66).

und (13) liefert nun

$$\omega = \pm \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Bezeichnen wir mit β einen beliebigen der Winkel $\pm \frac{\alpha + 2k\pi}{n}$, und betrachten somit einen beliebigen von den unendlich fernen Punkten der fraglichen Kurve, nennen d den Abstand der entsprechenden Asymptote vom Pol, so haben wir[1])

$$d = \lim_{\omega = \beta} \varrho(\omega - \beta) = \lim_{\omega = \beta} \frac{p \cos \alpha}{\cos \alpha - \cos n\omega} (\omega - \beta)$$

$$= p \cos \alpha \lim \frac{\omega - \beta}{\cos n\beta - \cos n\omega} = \frac{p \cos \alpha}{n} \frac{1}{\sin n\beta} = \frac{\pm p}{n \operatorname{tg} \alpha} = \pm \frac{p\sqrt{e^2 - 1}}{n}.$$

Weil dieser Ausdruck unabhängig von k ist, so ergiebt sich: **Wenn eine Kurve mit n Bäuchen unendliche Zweige hat, so berühren die zugehörigen Asymptoten einen und denselben mit der Kurve konzentrischen Kreis.**

Wir beachten nun[2]), dafs, wenn $\sigma = \frac{1}{\varrho}$ gesetzt wird, der Krümmungsradius in Polarkoordinaten im allgemeinen durch die Formel gegeben wird:

$$R = \frac{\left[\sigma^2 + \left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{2}{3}}}{\sigma^3 \left(\sigma + \frac{d^2\sigma}{d\omega^2}\right)},$$

daher sind alle diejenigen Punkte Wendepunkte, für welche

$$\sigma + \frac{d^2\sigma}{d\omega^2} = 0$$

wird; wenden wir dies auf den Fall $\sigma = \frac{1 + e \cos n\omega}{p}$ an, so erhalten wir

$$1 + e(1 - n^2) \cos n\omega = 0,$$

welches mit (2) kombiniert liefert

$$\varrho = \frac{n^2 - 1}{n^2} p;$$

damit ist gezeigt: **Alle Punkte, in welchen die durch (12) dargestellte Kurve von dem konzentrischen, mit dem Radius $\frac{n^2-1}{n^2}p$ beschriebenen Kreise geschnitten wird, sind Wendepunkte derselben.**

Wenn n eine ganze Zahl ist (und dies ist der häufigste Fall, der auch in Betracht kam, als man den hier untersuchten Kurven ihren Namen gab), so ist die durch (12) dargestellte Kurve rational. Geht man zu kartesischen Koordinaten über, so wird diese

1) Siehe z. B. Hoüel, *Cours de Calcul infinitésimal* II. (Paris 1878) S. 22.
2) Serret, *Calcul différentiel* 2. Aufl. (Paris 1879) S. 305.

$$\left.\begin{array}{l}\text{wenn } n \text{ gerade:}\\ \left[e\left\{x^n-\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\cdots\right\}+(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}\right]^2-p^2(x^2+y^2)^{n-1}=0,\\ \text{wenn } n \text{ ungerade:}\\ \left[e\left\{x^n-\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\cdots\right\}-p(x^2+y^2)^{\frac{n-1}{2}}\right]^2-(x^2+y^2)^n=0.\end{array}\right\} \quad (14)$$

Hieraus ergiebt sich: **Eine Kurve mit n Bäuchen ist von der Ordnung $2n$, und das Centrum ist ein $2(n-1)$-facher Punkt, dessen zugehörende Tangenten mit den durch die Kreispunkte der Ebene gehenden Geraden zusammenfallen.** — Das Verhalten der Kurve im Unendlichen ist verschieden, jenachdem n gerade oder ungerade. Im ersten Falle hat sie auf der unendlich fernen Geraden n Doppelpunkte; im zweiten Falle sind ihre unendlich fernen Punkte sämtlich voneinander getrennt. — Wollen wir für den Fall, dafs n eine gebrochene Zahl ist, die kartesische Gleichung und somit die Ordnung der Kurve auffinden, so können wir ein Verfahren anwenden, das demjenigen nachgebildet ist, welches wir in Nr. **135** bei den Rhodoneen angewandt haben; diese Rechnung auszuführen überlassen wir dem Leser.

Ein drittes Beispiel einer Kurve, die in Bezug auf mehrere Axen symmetrisch ist, bietet uns **der Ort der Punkte, die gleich stark erleuchtet werden von n gleichen Lichtern, die auf den Ecken eines regulären n-Ecks verteilt sind.** Ein solcher Ort ist offenbar symmetrisch in Bezug auf jeden, entweder durch die Ecken oder die Seitenmitten des Polygons gehenden Durchmesser des umbeschriebenen Kreises. Unter der gewöhnlichen Voraussetzung, dafs die Stärke der Beleuchtung umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung des beleuchteten Punktes vom leuchtenden Punkte ist, und dafs die Koordinaten der Ecken des gegebenen regulären Vielecks seien

$$x = R\cos\frac{2k\pi}{n}, \qquad y = R\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad (n = 0, 1, 2, 3 \ldots n-1)$$

ist die Gleichung des fraglichen Ortes ersichtlich

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{\left(x - R\cos\frac{2k\pi}{n}\right)^2 + \left(y - R\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^2} = \frac{1}{a^2}. \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Den Ort selbst kann man Isophane nennen[1]).

1) Der einfachste Fall der courbes isophanes, $n = 2$, findet sich in E. Catalan, *Manuel des candidates à l'École polytéchnique* I. (Paris 1857) S. 330.

Vierzehntes Kapitel.

Autopolare Kurven, anallagmatische und Richtungskurven.

156. Die Untersuchung der Kurven, denen das vorige Kapitel gewidmet war, führt uns zu dem ungemein vielgestaltigen Problem, solche Kurven aufzusuchen, die bei einer bestimmten geometrischen Transformation sich selber entsprechen. Einen anderen speziellen Fall dieser Frage bietet die Untersuchung der autopolaren Kurven dar, d. h. solcher Kurven, die sich in sich selbst verwandeln, wenn sie einer polaren Transformation unterzogen werden. Sei

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

die homogene Gleichung des Direktrix-Kegelschnittes Γ einer ebenen Polarität; es giebt dann ∞^2 Kegelschnitte Σ, die zu sich selbst polar sind in Bezug auf Γ; leicht sieht man, dafs deren allgemeine Gleichung lautet:

$$2(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3)^2 - (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0, \quad (2)$$

wo die ξ beliebige Parameter sind. Während hiermit das Problem der Bestimmung der zu Γ autopolaren Kurven zweiter Ordnung erledigt ist, wird das analoge Problem für die Kurven höherer Ordnung in folgender Weise gelöst[1]):

Nehmen wir an, dafs in (2) die ξ beliebige Funktionen eines Parameters seien, dann stellt (2) ∞^1 Kegelschnitte Σ dar; die Enveloppe derselben besteht aus der Kurve Γ und einer Kurve K, die autopolar in Bezug auf Γ selbst ist. Ist nämlich A der Berührungspunkt von Γ mit einer der Σ und b die gemeinsame Tangente in A an beide Kurven, dann entspricht in der gegebenen Polarität Σ der Annahme gemäfs sich selber, der K entspricht eine Kurve K', die Σ im Pole B von b berührt, weshalb K' in gleicher Weise wie K die Enveloppe der betrachteten Kegelschnitte Σ ist; daher fällt K' mit K zusammen, mit allenfallsiger Ausnahme gewisser Teile, die durch den Kegelschnitt Γ dargestellt werden ein- oder mehrfach genommen.

Umgekehrt kann jede in Bezug auf Γ autopolare Kurve K auf diese Weise erzeugt werden. Ist nämlich A ein Punkt von K, und b die entsprechende Tangente, so berührt der Voraussetzung nach die Polare a von A K im Punkte B, welcher der Pol von b ist; man kann daher einen Kegelschnitt Σ auffinden, der autopolar in Bezug auf Γ ist, der die Geraden a und b bezw. in A und B berührt; dieser ist daher auch doppeltberührend für K; diese ist demnach die Enveloppe von unendlich vielen autopolaren Kegelschnitten, was zu be-

1) P. Appell, *Courbes autopolaires* (Nouv. Ann. de Math., 3. Ser. XIII, 1894).

weisen war. — Die Untersuchung der autopolaren Kurven ist somit auf ein Problem zurückgeführt, das die Enveloppe einer Reihe von ∞^1 Kegelschnitten betrifft.

Die Frage, ob es Kurven giebt, die in Bezug auf eine endliche Zahl von Kegelschnitten autopolar sind, ist unseres Wissens noch nicht behandelt worden. Fouret dagegen hat gezeigt[1]), dafs es Kurven giebt, die ihre eigenen Polaren in Bezug auf ∞^1 Kegelschnitte sind; solche spezielle Kurven sind die interscendenten Parabeln, denen wir in Nr. **157** begegnen, und die wir ex professo im folgenden Abschnitte untersuchen werden.

157. In der Geschichte der geometrischen Transformationen folgt auf die Theorie der projektiven Transformationen (kollineare oder reziproke) der Zeitfolge nach das Studium der Transformation durch reziproke Radien oder der Inversion; demnach folgt auf die in sich selbst durch Kollineation oder Reziprozität transformierten Kurven (mit denen wir uns im Vorigen beschäftigt haben) naturgemäfs die Betrachtung der Kurven, die durch eine Inversion in sich selbst transformiert werden. Es sind dies diejenigen Kurven, die — nach der von Moutard vorgeschlagenen Benennung[2]) — anallagmatische Kurven genannt werden, eine Bezeichnung, die (von α privans und *ἀλλάττω*, ich ändere, hergeleitet) ein wenig unbestimmt ist.

Es sei $\mathfrak{J}$ eine Inversion, die durch den Kreis Ω mit dem Centrum O und dem reellen oder rein imaginären Radius r, bestimmt ist[3]). Es giebt dann ∞^2 Kreise **K** rechtwinklig zu Ω; jeder ist bekanntlich anallagmatisch. Durch einen beliebigen Punkt M der Ebene gehen ∞^1 Kreise **K**; alle diese gehen dann auch durch den Punkt $\mathfrak{J}(M)$, der durch die Transformation $\mathfrak{J}$ aus M entsteht[4]); durch zwei beliebige Punkte der Ebene (in endlicher oder unendlich kleiner Entfernung) geht dagegen nur ein einziger und bestimmter Kreis **K**.

Ist nun Γ eine reelle Kurve, anallagmatisch in Bezug auf die Inversion $\mathfrak{J}$, P einer ihrer Punkte und t die bezügliche Tangente, so giebt es einen Kreis **K**, der die Gerade t im Punkte P berührt. Da

1) S. die Note *Sur les courbes planes ou surfaces qui sont leurs propres polaires reciproques par rapport à une infinité des coniques ou surfaces du second ordre* (Bull. de la Soc. Philom., Paris 1878).

2) *Sur la transformation par rayons vecteurs réciproques* (Nouv. Ann. de Math. 2. Ser. III, 1864). — Für das Folgende s. besonders J. de la Gournerie, *Mémoires sur les lignes spiriques* (Liouvilles Journ., 2. Ser. IV, 1869). Andere wichtige Betrachtungen sind von Ribaucour gemacht in der *Mémoire sur les courbes enveloppes de cercles et sur les surfaces enveloppes de sphères* (Nouv. Corr. math. V, 1879, und VI, 1880) und in der Note von Liguine, *Sur les aires des courbes anallagmatiques* (Bull. des Sc. math. 2. Ser. V, 1881).

3) Man nennt ihn den Inversions-Kreis.

4) Wir bezeichnen im allgemeinen mit $\mathfrak{J}(\Phi)$ das, was man erhält, wenn man auf die Figur Φ die Inversion $\mathfrak{J}$ anwendet.

nun sowohl Γ als auch **K** anallagmatisch sind, so entspricht dem Punkte P ein anderer Punkt $\mathfrak{J}(P)$, der **K** und Γ gemeinsam ist; und da die Inversion eine Berührungstransformation ist, so berühren sich Γ und **K** auch in $\mathfrak{J}(P)$. **K** ist also ein Kreis, der Γ zweifach berührt; variieren wir P, so nimmt **K** ∞^1 Lagen an, dabei wird sein Mittelpunkt eine gewisse Kurve Δ beschreiben; nach einem Vorschlage von de la Gournerie heifst sie die Deferente, sie ist algebraisch, wenn Γ es ist; ihre Ordnung wollen wir im Folgenden mit n bezeichnen. Wir können dann sagen: **Jede beliebige anallagmatische Kurve kann als Enveloppe der ∞^1 Lagen eines zu einem festen Kreise orthogonalen Kreises, dessen Centrum eine gegebene Kurve durchläuft, angesehen werden.** Umgekehrt ist klar, dafs, wie auch immer man die Deferente und den gegebenen Kreis wählt, man jedesmal als Enveloppe eine anallagmatische Kurve erhält. Nicht ausgeschlossen ist, dafs der Radius von Ω gleich Null ist; alle Kreise **K** gehen dann durch O. Wenn wir im allgemeinen Falle zwei aufeinanderfolgende Punkte von Δ, D_1 und D_2 betrachten sowie die zugehörigen Kreise K_1 und K_2, so schneiden sich diese in zwei Punkten P und Q von Γ, die symmetrisch zu einander in Bezug auf die Gerade D_1D_2 liegen, welche ja eine Tangente von Δ ist; folglich: **Die Strecke zwischen zwei korrespondierenden Punkten einer anallagmatischen Kurve wird durch die entsprechende Tangente der Deferente senkrecht halbiert.**

Die Kreise **K** bilden ein einfach unendliches System, auf welches man die Chasles'sche Methode der Charakteristiken anwenden kann; wir nennen daher μ die Zahl der Kreise **K**, die durch einen beliebigen Punkt der Ebene gehen, ν die Anzahl, derer, die eine beliebige Gerade berühren, α die Zahl der als Hüllkurven in ein Punktepaar degenerierten Kreise **K** und β die Zahl der als Ortkurven in ein Geradenpaar degenerierten. Um diese vier Zahlen zu bestimmen, genügt es, zwei direkt zu bestimmen und dann die bekannten Formeln von Chasles anzuwenden:

$$2\mu - \nu = \alpha, \quad 2\nu - \mu = \beta.$$

Man findet nun μ auf folgende Weise: Alle Kreise **K**, die durch M gehen, gehen auch durch $\mathfrak{J}(M)$; ihre Mittelpunkte liegen daher auf der Geraden r, die die von M und $\mathfrak{J}(M)$ begrenzte Strecke senkrecht halbiert; anderseits gehören ihre Mittelpunkte auch der Kurve Δ an, sie sind daher nichts anderes, als die Schnitte von r mit Δ; das beweist uns, dafs $\mu = n$. Um β zu finden, beachten wir, dafs, wenn F einer der $2n$ Schnittpunkte von Γ und Ω ist, die Verbindungslinien Γ mit den Kreispunkten der Ebene einen degenerierten Kreis des Systems bilden; wenn dann U einer der n unendlich fernen Punkte der Kurve Γ ist, so bilden der zu OU senkrechte Durchmesser von Ω und die unendlich ferne Gerade einen ferneren degenerierten Kreis des Systems; es ist leicht einzusehen, dafs es weitere nicht giebt; demnach ist $\beta = 3n$.

Setzen wir nun die für μ und β gefundenen Werte in die vorigen Gleichungen ein, so folgern wir, dafs $\nu = 2n$ ist (also doppelt so grofs als die Ordnung der Deferente), und dafs $\alpha = 0$.

Aus der zur Bestimmung von β gemachten Überlegung ergeben sich zu gleicher Zeit folgende beiden Eigenschaften der anallagmatischen Kurve Γ: **Die $2n$ Schnittpunkte von Γ mit der Peripherie von Ω sind Brennpunkte der Kurve; die durch den Mittelpunkt von Ω rechtwinklig zu den Asymptoten der Deferente gezogenen Geraden sind ebensoviele Doppeltangenten der anallagmatischen Kurve.**

Im allgemeinen geht Γ nicht durch den Mittelpunkt O von Ω, daher schneidet jede durch O gezogene Gerade r sie in einer gewissen Anzahl von Punktepaaren M und $\mathfrak{J}(M)$; da die Gerade, welche die Verbindungslinie dieser beiden senkrecht halbiert, Tangente an Δ ist, so ist die Zahl dieser Punktepaare gleich der Zahl der zu r senkrechten Tangenten von Δ, d. h. gleich der Klasse von Δ. Wir sind also zu dem Schlusse berechtigt: **Die Ordnung einer anallagmatischen Kurve ist im allgemeinen doppelt so grofs, als die Klasse ihrer Deferente.**

Betrachten wir noch einen durch O gehenden Kreis Δ, so wird dieser die Kurve Γ in einer gewissen Zahl x von reellen Punkten X schneiden. Wir führen nun auf die ganze Figur die gegebene Inversion aus. Δ wird sich dann in eine Gerade l und Γ in sich selbst transformieren; daher werden die Punkte $\mathfrak{J}(X)$ die Schnitte von l und Γ sein; x ist also gleich der Ordnung von Γ, d. h. gleich dem Doppelten der Klasse der Deferente. Andererseits ist die Gesamtzahl der Schnitte von Γ und Δ, da sie doppelt so grofs als die Ordnung von Γ ist, gleich dem Vierfachen der Klasse der Deferente; folglich: **Eine reelle anallagmatische Kurve geht durch jeden der Kreispunkte der Ebene so oft, als die Klasse ihrer Deferente dies angiebt.** Es ist leicht einzusehen, dafs die bezüglichen Tangenten auch die Deferente berühren, in der Art, **dafs die Brennpunkte der Deferente singuläre Brennpunkte der anallagmatischen Kurve sind.** — Die anallagmatische Kurve kann auch vielfache Punkte haben; sie entsprechen den eventuellen vielfachen Tangenten der Deferente paarweise. Wenn diese eine allgemeine Kurve von der Klasse N ist, so bestimmt sie mit dem Kreise Ω eine allgemeine anallagmatische Kurve Γ von der Ordnung $2N$; diese Kurve Γ hängt daher von $\frac{N(N+3)}{2} + 3$ Konstanten ab, kann daher durch ebensoviele beliebige Punkte der Ebene hindurchgehen; die Gleichung einer solchen Kurve kann immer in die Form gebracht werden $F(f_1, f_2, f_3) = 0$, wo F eine ternäre Form vom Grade N und $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ die Gleichungen dreier Kreise sind, die nicht demselben Büschel angehören und deren Orthogonalkreis der Inversionskreis von Γ ist.

In dem Falle, den wir bis jetzt ausgeschlossen haben, daſs die Deferente die unendlich ferne Gerade berührt, vermindert sich die Ordnung der anallagmatischen Kurve um eine Einheit und die Kurve geht dann durch den Pol der Inversion; wenn aber die Berührung zweiter Ordnung ist, so beträgt die Verminderung zwei Einheiten; demnach kann man sagen: **Die Ordnung einer anallagmatischen Kurve ist gleich der doppelten Klasse der Deferente vermindert um die Zahl der Berührungen, welche diese mit der unendlich fernen Geraden hat, und vermindert um die doppelte Anzahl ihrer Inflexionstangenten, die mit der Geraden selbst zusammenfallen.** Die übrigen vorhergehenden Sätze erleiden infolgedessen Modifikationen, die der Leser auch leicht ohne unsere Hilfe finden dürfte.

Γ sei wiederum eine anallagmatische Kurve; sie wird die Enveloppe von ∞^1 Kreisen **K** sein, die senkrecht zu einem Kreise Ω sind. Wir wenden auf dieses System eine beliebige Inversion $\overline{\mathfrak{J}}$ an; es entsteht dann ein System von ∞^1 Kreisen $\overline{\mathbf{K}}$, die alle orthogonal zu einem Kreise $\overline{\Omega}$ sind (dem Transformierten von Ω) und deren Enveloppe eine anallagmatische Kurve $\overline{\Gamma}$ ist; da nun $\overline{\Gamma}$ dasselbe ist, als was man erhält, wenn man Γ der Inversion $\overline{\mathfrak{J}}$ unterwirft, so ist klar: **Transformiert man eine anallagmatische Kurve durch reziproke Radien, so erhält man eine andere Kurve derselben Art.** — Machen wir hiervon sogleich eine Anwendung: Eine orthogonale Symmetrie S in Bezug auf eine Axe a kann als eine Grenzform der Inversion aufgefaſst werden; der feste Kreis hat als Peripherie die Axe a und als Centrum den unendlich fernen Punkt in der zu a senkrechten Richtung; daraus folgt: **Transformiert man eine Kurve, die in Bezug auf eine Axe rechtwinklig symmetrisch ist, durch reziproke Radien, so erhält man eine anallagmatische Kurve.** Verfährt man in derselben Weise mit einer Kurve, die mehrfache rechtwinklige Symmetrieen in Bezug auf mehrere durch einen Punkt gehende Axen besitzt, so gelangt man zu einer Kurve, die in Bezug auf mehrere Kreise desselben Büschels anallagmatisch ist[1]).

158. Die Untersuchung der anallagmatischen Kurven kann noch von einem anderen Gesichtspunkte aus in Angriff genommen werden, der wert ist hervorgehoben zu werden, da er uns zu neuen Resultaten führt. Erinnern wir uns nämlich[2]), daſs, wenn man eine reelle Kurve

---

1) Auſser dieser Kurve, die anallagmatisch in Bezug auf eine endliche Zahl von Inversionen ist, giebt es eine, nämlich den Kreis, der offenbar anallagmatisch in Bezug auf ∞^2 Inversionen ist; daſs es deren keine giebt, die anallagmatisch in Bezug auf ∞^1 sind, hat G. Fouret bewiesen in der Abhandlung *Recherche d'une courbe plane possédant un lieu géométrique de pôles principales d'inversion* (Nouv. Ann. de Math. 3. Ser. II, 1883).

2) Man s. z. B. Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (Paris 1873) S. 2.

Γ von der Ordnung n, die den Pol und die imaginären Kreispunkte I und J als vielfache Punkte von den Ordnungen bezw. ω, ι, ι', hat, einer Inversion $\mathfrak{J}$ unterzieht, ihr eine Kurve Γ' von der Ordnung $n' = 2n - (\omega + 2\iota)$ entspricht, für welche O, I, J vielfach sind bezw. nach $\omega' = n - 2\iota$, $\iota' = n - (\omega + \iota)$; nun ist klar, dafs, damit Γ anallagmatisch in Bezug auf $\mathfrak{J}$ sei, $n' = n$, $\omega' = \omega$, $\iota' = \iota$ sein mufs; alle diese Bedingungen werden aber erfüllt, wenn man $n = \omega + 2\iota$ setzt. — Geben wir dem ω einen beliebigen Wert p, gerade oder ungerade, jenachdem n es ist, so entsteht eine Kurve Γ' von der n^{ten} Ordnung, die O als p-fachen und die Kreispunkte als $\frac{n-p}{2}$-fache Punkte hat; sie wird von der unendlich fernen Geraden in p weiteren Punkten geschnitten. Ist P einer derselben, so entspricht diesem der dem O unendlich nahe Punkt auf OP, welcher Punkt, wenn Γ anallagmatisch ist, zu Γ selbst gehören mufs; dies besagt, wenn Γ eine anallagmatische Kurve ist, die p Geraden OP sind nichts anderes, als die in O berührenden Geraden. Z. B.: wenn n gerade ist und wir nehmen $p = 0$, so erhalten wir Kurven n^{ter} Ordnung, welche die Kreispunkte der Ebene als $\frac{n}{2}$-fache Punkte haben: sie gehören zur Klasse der isotropische Kurven[1]). Wenn man, bei beliebigem n, $p = n - 2$ nimmt, so erhält man[2]) eine Kurve n^{ter} Ordnung mit einem $(n-2)$-fachen Punkte, die durch die Kreispunkte und durch die $n - 2$ unendlich fernen Punkte der Geraden geht, welche die Kurve im Punkte O berührt. Eine solche Kurve auf ein orthogonales Koordinatensystem mit dem Ursprung O bezogen, hat eine Gleichung von folgender Form

$$(x^2 + y^2) f_{n-2}(x, y) + f_{n-1}(x, y) + R^2 f_{n-2}(x, y) = 0,$$

wo f_{n-1}, f_{n-2} binäre Formen in x, y sind vom Grade $n - 1$ und $n - 2$ und R eine Konstante ist. Beim Übergang zu Polarkoordinaten wird diese

$$\varrho^2 f_{n-2}(\cos\omega, \sin\omega) + \varrho f_{n-1}(\cos\omega, \sin\omega) + R^2 f_{n-2}(\cos\omega, \sin\omega) = 0.$$

Wenn man also mit ϱ_1, ϱ_2 zwei Werte von ϱ bezeichnet, welche demselben Werte von ω entsprechen, so hat man $\varrho_1 \cdot \varrho_2 = R^2$, was bestätigt, dafs die genannte Kurve durch eine Inversion mit dem Centrum O und der Potenz R^2 in sich selbst transformiert wird; im Falle $p = n - 2$ sind die vorhin gefundenen Bedingungen demnach nicht

1) *Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques* (Paris 1893) S. 51, nach einem Vorschlage von M. d'Ocagne (Journ. de math. spéc. III. Reihe, I, S. 125) so benannt; E. Ciani (*Le linee diametrali etc.*) zog den Namen hypercyklische Kurven vor.

2) Piquet, *Sur une nouvelle espèce de courbes et de surfaces anallagmatiques* (C. R. LXXXVII, 1878).

nur notwendig, sondern auch hinreichend, damit die Kurve anallagmatisch sei. Alle Kurven n^{ter} Ordnung, die mit den vorhin beschriebenen Eigentümlichkeiten versehen sind, sind folglich anallagmatisch. Die entsprechenden Deferenten sind Kurven von der Klasse $n-1$, welche die unendlich ferne Gerade zur $(n-2)$-fachen Tangente haben; jede besitzt im allgemeinen $2(n-3)(n-4)$ Doppelpunkte, $3(n-3)$ Spitzen und ist daher von der Ordnung $2(n-2)$.

159. Die isotropischen Kurven der vorigen Nr. sind Spezialfälle der s-fach cyklischen Kurven von F. P. Ruffini[1]); man gebraucht diesen Namen, um die Kurven n^{ter} Ordnung zu bezeichnen, deren Schnitte mit der unendlich fernen Geraden aus den Kreispunkten und noch $n-2s$ anderen Punkten bestehen, also Kurven, die in kartesischen Koordinaten eine Gleichung haben, deren Glieder höchster Ordnung in einer binären Form vom Grade $n-2s$ in x, y das Produkt $(x^2+y^2)^s$ sind. Derartige Kurven ergeben sich bei der Lösung folgender Frage: „Giebt es, aufser dem Kreise, noch Kurven, die sich der Besonderheit erfreuen, dafs das Produkt aus den Abständen eines beliebigen festen Punktes ihrer Ebene von den auf einem beliebigen, durch den festen Punkt gezogenen Strahl gelegenen Schnittpunkten für alle solche Strahlen konstant ist?“[2]). Dieses Problem, welches Mannheim neuerdings wieder aufgestellt hat[3]), war schon im Jahre 1869 von J. Petersen gelöst worden[4]), und mehr als 20 Jahre später, ohne dafs er die bezügliche Arbeit des dänischen Mathematikers kannte, in einer noch vollständigeren Weise von F. P. Ruffini[5]): die von dem letzteren befolgte Methode, um zu den sog. Potenzkurven zu gelangen, ist zu einfach und elementar, als dafs sie nicht hier Platz finden sollte.

Es sei
$$f(x,y)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$
die Gleichung von Γ, einer der verlangten Kurven, und es sei
$$\sum_{r=0}^{r=n} a_r x^{n-r} \cdot y^r$$
der Komplex ihrer Glieder höchster Ordnung. $O(x_0, y_0)$ sei der feste

1) *Delle curve piane algebriche che hanno potenza in rispetto a ogni punto del loro piano, ovvero in rispetto ad alcuni dei loro proprii punti* (Bologna Mem. 4. Ser. X, 1890).

2) Indem man die gebräuchliche Steiner'sche Bezeichnung erweitert, kann man jenes konstante Produkt die Potenz des festen Punktes in Bezug auf eine Kurve nennen und Potenzkurven jene Kurven, welche die genannte Eigen schaft haben.

3) *Intermédiaire* III, 1896, S. 274.

4) S. den Artikel *On et punkts potens met hynsyn til en curve* (Tidskrift, 2. Ser. V, 1869).

5) S. die in Note 1 citierte Abhandlung.

Punkt, von welchem aus man die Transversalen zieht; setzt man nun in (3) ein
$$x = x_0 + \varrho \cos\omega; \quad y = y_0 + \varrho \sin\omega,$$
so erhält man eine Gleichung n^{ten} Grades in ϱ, deren Wurzeln $\varrho_1 \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ sein mögen; damit nun Γ in Bezug auf O die Potenz π habe, ist notwendig und hinreichend, dafs das Produkt
$$\pi = \varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \varrho_3 \cdot \ldots \cdot \varrho_n$$
einen von ω unabhängigen Wert habe. Setzt man nun zur Abkürzung
$$\cos\omega = \alpha, \quad \sin\omega = \beta,$$
so hat man
$$f(x,y) = f(x_0 + \varrho \cdot \cos\omega, \; y_0 + \varrho \cdot \sin\omega) = f(x_0 + \varrho\alpha, \; y_0 + \varrho\beta).$$
Entwickelt man nun nach dem Taylor'schen Satze und wendet allgemein bekannte Bezeichnungen an, so wird die Gleichung (3) zu
$$f(x_0, y_0) + \frac{\varrho}{1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta\right)_0 + \frac{\varrho^2}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta\right)_0^{(2)}$$
$$+ \cdots \cdot \frac{\varrho^n}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta\right)_0^{(n)} = 0. \quad \ldots \quad (4)$$
Daraus folgt nun
$$\pi = (-1)^n \frac{f(x_0, y_0)}{\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta\right)_0^{(n)}}.$$
Der Zähler dieses Bruches ist, wie man sieht, unabhängig von ω; damit dieses auch für den Bruch selbst eintrete, mufs sein
$$\frac{d}{d\omega} \cdot \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^{(n)} = 0,$$
oder
$$\frac{d}{d\omega} \sum_{r=0}^{r=n} a_r \alpha^{n-r} \cdot \beta^r = 0,$$
oder endlich
$$\sum \left\{(n - r + s) a_{r-1} - (r+1) a_{r+1}\right\} \alpha^{n-r} \cdot \beta^r = 0.$$
Damit diese Beziehung für alle Werte von α und β gültig sei, müssen folgende $n+1$ Relationen bestehen:
$$(n - r + 1)\alpha_{r-1} = (r+1) a_{r+1} \quad (r = 0, 1, 2, \ldots, n),$$
wobei zu bemerken ist, dafs $a_{-1} = a_{n+1} = 0$. Es ist nun notwendig, folgende beiden Fälle zu unterscheiden:

I. Wenn $n = 2p$, so findet man, wenn man in (4) der Reihe nach $r = 0, 2, \ldots 2p - 2$ setzt, $\alpha_1 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_{2\mu-1} = 0$; setzt man hingegen $r = 1, 3, \ldots, 2p - 1$, so bekommt man
$$p a_0 = 1 \cdot a_2, \; (p-1) a_2 = 2 \cdot a_4, \; \ldots, \; (p - k) a_{2 \cdot k} = (k+1) a_{2k+2},$$
$$1 \cdot a_{2p-2} = p \cdot a_{2p},$$
daher im allgemeinen
$$a_{2k+2} = \binom{p}{k+1} a_0;$$

man schliefst daraus, dafs

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta\right)_0^{(n)} = \sum_{r=0}^{r=n} a_r \alpha^{n-r}\beta^2 = a_0(\alpha^2+\beta^2)^n = a_0;$$

daher ist

$$\pi = (-1)^n \frac{f(x_0, y_0)}{a_0},$$

welche Gröfse thatsächlich unabhängig von ω ist. Nun lassen die vorhin für die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots\ldots$ gefundenen Werte erkennen, dafs die Glieder höchsten Grades in den Koeffizienten der Kurve $f=0$, abgesehen von dem Faktor a_0, die Potenz $(x^2+y^2)^p$ bilden, weshalb f die Form hat $(x^2+y^2)^p + F(x,y) = 0$, wo F ein Polynom von niedrerem Grade als $2p$ ist. Wir sind daher in der Lage zu schliefsen, **dafs die Kurven gerader Ordnung $2p$, die eine Potenz in Bezug auf jeden Punkt ihrer Ebene haben, p-fach cirkulare Kurven sind.**

II. Wenn $n = 2p+1$, und man nimmt in (5) zunächst $r = 0, 2, 4, \ldots,$ dann $r = 2p+1,\ 2p-1,\ 2p-3, \ldots\ldots,$ so sieht man, dafs alle Koeffizienten $a_r = 0$ sind; **folglich giebt es keine Kurven ungerader Ordnung, die eine Potenz in Bezug auf alle Punkte ihrer Ebene haben.**

Bisher haben wir angenommen, dafs der feste Punkt O der Kurve selbst nicht angehöre. In diesem Falle, $f(x_0, y_0) = 0$, hat die Gleichung (4) eine Wurzel $\varrho = 0$, und als Potenz von O erhält man die Gröfse:

$$\pi = \varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \ldots \cdot \varrho_{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta\right)_0^{(1)}}{\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta\right)_0^{(n)}},$$

wenn diese unabhängig von ω ist; dies tritt thatsächlich ein, wenn O ein Doppelpunkt ist, weil dann $\pi = 0$. Diesen trivialen Fall ausgeschlossen, sieht man, nach einer einfachen Diskussion, dafs diese Thatsache nur dann eintritt, wenn Γ alle Glieder höchsten Grades verliert; dies führt zu dem Schlusse, **dafs es keine algebraischen Kurven giebt, die in Bezug auf alle ihre Punkte eine Potenz haben.** Dennoch giebt es Kurven, die in Bezug auf einige ihrer Punkte eine Potenz haben; so hat Ruffini — mit Beweisen der Art, wie die hier angeführten — gezeigt: **Jede Kurve von der Ordnung $2p+1$, die p-fach cirkular ist, hat eine Potenz in Bezug auf die Berührungspunkte der Tangenten, die man an sie von dem einzigen reellen Punkte, den sie auf der unendlich fernen Geraden besitzt, ziehen kann.**

160. Wir wollen dieses Kapitel — welches wie das vorige hauptsächlich solchen Kurven gewidmet ist, die aus der Theorie spezieller geometrischer Transformationen hervorgehen — nicht abschliefsen, ohne zuvor einen Hinweis auf die Richtungs-Kurven (courbes de direction) zu geben, zu denen E. Laguerre gelangte im Verlaufe seiner Unter-

suchungen über die „Direktionsgeometrie“[1]), und die man sämtlich als Antikaustiken (vgl. Kap. 7 des VII. Abschnittes) algebraischer Kurven betrachten kann, wenn die auffallenden Strahlen als parallel angenommen werden[2]). Wenn $\omega(x,y)=0$ die Gleichung einer algebraischen Richtungskurve ist, so kann man die Cosinus der Richtungen der Tangenten in einem ihrer Punkte vermittelst rationaler Funktionen der Koordinaten des Berührungspunktes ausdrücken[3]). Wenn s der Bogen der Kurve ist, so sind diese Cosinus gegeben bezw. durch

$$\frac{dx}{ds}=-\frac{\frac{\partial\omega}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2}},\qquad \frac{dy}{ds}=\frac{\frac{\partial\omega}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2}};$$

damit also $\omega(x,y)=0$ eine Richtungskurve sei, ist notwendig und hinreichend, dafs eine der beiden Gröfsen $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ eine rationale Funktion von x, y sei.

Nun hat P. Appell[4]) eine Methode ersonnen, aus der Gleichung einer Richtungskurve

$$F(X,Y)=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

die von unzählig vielen anderen abzuleiten: sie besteht in folgendem:

Man bezeichne mit S den Bogen der Kurve (6) und mit R eine rationale Funktion. Wegen der gemachten Annahme, dafs (6) eine Richtungskurve sei, können wir schreiben

$$dS=R(X,Y)\cdot dX. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Man betrachte auch eine rationale Funktion Ω von $z=x+iy$, die der Bedingung genügt, dafs alle ihre Residuen gleich Null sind. Dann wird $\int\Omega^2(z)\cdot dz$ eine rationale Funktion von z sein, und wir dürfen setzen

$$Z=X+iY=\int\Omega^2(z)\cdot dz=\varphi(x,y)+i\psi(x,y).$$

Die Formeln

$$X=\varphi(x,y),\qquad Y=\varphi(x,y)$$

---

1) *Sur la géométrie de direction* (Bull. de la Soc. math. de France, VIII, 1880). Die Tangentialgleichung solcher Kurven ist von der Form

$$\Phi^2(u,v)-(u^2+v^2)F^2(u,v)=0;$$

s. Salmon-Fiedler, *Höhere Kurven* (Leipzig 1873) S. 122.

2) Laguerre, *Sur les anticaustiques par réflexion de la parabole, les rayons incidents étant parallèles* (Nouv. Ann. 2. Ser. II, 1883).

3) Dieser Eigenschaft verdanken die Richtungskurven ihre Wichtigkeit bei der Untersuchung der algebraisch rektifizierbaren Kurven, d. h. solcher, deren Bogen durch eine algebraische Funktion der Koordinaten ausgedrückt werden kann. Vgl. G. Humbert, *Sur les courbes algébriques planes rectificables* (Liouvilles Journ. 4. Ser. IV, 1888).

4) *Exercises sur les courbes de direction* (Nouv. Ann. de math. 3e Ser. XV, 1896).

bestimmen dann in der Ebene eine Korrespondenz zwischen den Punkten (x, y) und (X, Y). Wir behaupten nun, dafs diese die Kurve (6) in eine andere Richtungskurve

$$f(x, y) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

transformiere. Da nämlich $dX + i \cdot dY = \Omega^2(z)(dx + i \cdot dy)$, so haben wir ferner $dX - i \cdot dY = \overline{\Omega(z)}^2 \cdot (dx - i \cdot dy)$, wo $\overline{\Omega(z)}$ die zu $\Omega(z)$ konjugiert imaginäre Gröfse ist. Multiplizieren wir diese beiden Beziehungsgleichungen, benutzen die Gleichungen (7) und bezeichnen mit s den Bogen der Kurve (8), so ergiebt sich:

$$ds = \frac{R(X, Y)}{\Omega(z) \cdot \overline{\Omega(z)}} \cdot dX.$$

Da aber $X = \varphi(x, y)$, $Y = \psi(x, y)$, $\Omega(x + iy)$, $\overline{\Omega(x + iy)}$ rationale Funktionen von x, y sind, so ist es auch der Koeffizient von dX in dieser Gleichung; da aufserdem

$$dX = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

so ist auch $\frac{dX}{dx}$ eine rationale Funktion von von x, y; die vorige Beziehung kann daher in der Form geschrieben werden

$$ds = r(x, y) \cdot dx,$$

wo r eine neue rationale Funktion bedeutet. Dies genügt zum Nachweise, dafs die Gleichung (8) eine Richtungskurve darstellt.

Wenden wir diese Methode auf ein Beispiel an. Bedeutet k eine ganze Zahl und setzen wir $\Omega(z) = \sqrt{2k + 1} \cdot z^k$, dann wird

$$\int \Omega(z)^2 dz = z^{2k+1} = \varrho^{2k+1} \left\{ \cos(2k + 1)\omega + i \sin(2k + 1)\omega \right\};$$

so dafs die anzuwendende Transformation ist:

$$X = \varrho^{2k+1} \cos(2k + 1)\omega, \qquad Y = \varrho^{2k+1} \sin(2k + 1)\omega.$$

Wenden wir diese auf die Gerade $X = a^{2k+1}$ an — die offenbar eine Richtungskurve ist — so erhalten wir die durch folgende Gleichung dargestellte

$$\varrho^{2k+1} \cos(2k + 1)\omega = a^{2k+1}$$

andere Richtungskurve, die, wie wir in kurzem sehen werden, eine Sinusspirale ist (s. Kap. 18 dieses Abschn.)[1]).

1) Dies wurde zum erstenmal von G. Humbert bemerkt (*Sur le theorème d'Abel et quelquesunes de ses applications*, Liouvilles Journ. 4e Ser. III, 1887, S. 395) als er die cirkularen Richtungskurven untersuchte, d. h. solche, die durch die beiden unendlich fernen Kreispunkte gehen.

Fünfzehntes Kapitel.

Geometrie der Polynome.

161. Die geometrische Darstellung komplexer Zahlen durch die Punkte einer Ebene führt zu der Betrachtung verschiedener algebraischer Kurven und gestattet deren Untersuchung. Diese Kurven verdienen wegen ihres engen Zusammenhanges mit der Lehre von den isogonalen Transformationen den in den vorigen Kapiteln behandelten an die Seite gestellt zu werden; ihr Zusammenhang mit der Betrachtung der Polynome veranlafst uns, sie als ein besonderes Kapitel der Wissenschaft der Ausdehnung zu behandeln, welches wir, dem Beispiele F. Lucas folgend, „Geometrie der Polynome" betiteln.

Es sei

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

ein vollständiges Polynom der Variabelen $z = x + iy$, dessen Koeffizienten wir der Allgemeinheit wegen als beliebige komplexe Zahlen annehmen. Trennen wir den reellen Teil des $f(z)$ von dem rein imaginären, so können wir schreiben

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y);$$

P und Q sind dann Polynome vom n^{ten} Grade in x, y mit reellen Koeffizienten; wenn wir daher x und y als rechtwinklige kartesische Koordinaten interpretieren, so stellen die Gleichungen

$$P(x, y) = 0, \qquad Q(x, y) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

zwei Kurven n^{ter} Ordnung dar, die sich in n reellen Punkten schneiden werden, nämlich den n Wurzel-Punkten der Gleichung $f(z) = 0$. — Die Einführung solcher Kurven in die Wissenschaft geht auf das Ende des 18. Jahrhunderts zurück, indem gerade aus der Untersuchung ihrer Eigenschaften Gauss die Elemente seines ersten Beweises für den Fundamentalsatz der Theorie der algebraischen Gleichungen herleitete[1]) und fünfzig Jahre darauf sich ihrer bediente bei dem vierten seiner Beweise für denselben Satz[2]). Die Untersuchung der Eigenschaften dieser Kurven jedoch wurde von W. Walton[3]) vor etwa 30 Jahren unternommen und gröfstenteils ausgebaut; ihm ver-

1) *Demonstratio novae theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi resolvi posse* (Inaug.-Dissert. Helmstedt, 1799).

2) *Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen* (Götting. Abhandlungen IV, 1850).

3) Man sehe die Artikel *Note on the rhizic curves*, *On the spoke asymptotes of rhizic curves*, und *On the curvature of rhizic curves at multiples points* (Quarterly Journ. XI, 1871). Über denselben Gegenstand kann man nachsehen T. Bond Sprague, *On the nature of the curves whose intersections give the imaginary roots of an algebraic equation* (Edinburgh. Trans. XXX, T. II, 1882).

dankt man den Namen Wurzel-Kurven (rhizic curves), mit dem sie bezeichnet zu werden pflegen. Neuerdings wurden sie von E. Kanser erforscht[1]), der sie algebraic potential curves nannte, da man, wie bekannt, $\Delta_2 P = 0$ und $\Delta_2 Q = 0$ hat.

Sind τ_P und τ_Q die von den Tangenten an die Kurven (1), in einem ihrer gemeinsamen Punkte $M(x, y)$, gebildeten Winkel, so wird sein:

$$\operatorname{tg}\tau_P = -\frac{\partial P}{\partial x} : \frac{\partial P}{\partial y}, \qquad \operatorname{tg}\tau_Q = -\frac{\partial Q}{\partial x} : \frac{\partial Q}{\partial y},$$

und da man bekanntlich hat

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

so ergiebt sich, dafs

$$\operatorname{tg}\tau_P \cdot \operatorname{tg}\tau_Q + 1 = 0.$$

Diese Gleichung beweist: **Die beiden Kurven $P = 0$, $Q = 0$ schneiden sich in allen Punkten, die sie gemeinsam haben, unter rechtem Winkel.**

Differenzieren wir die Gleichungen (2), so ergeben sich daraus leicht die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^{2r} P}{\partial x^{2\alpha} \cdot \partial y^{2r-2\alpha}} &= (-1)^{\alpha} \frac{\partial^{2r} P}{\partial x^{2r}} \\
\frac{\partial^{2r} Q}{\partial x^{2\alpha} \cdot \partial y^{2r-2\alpha}} &= (-1)^{\alpha} \frac{\partial^{2r} Q}{\partial x^{2r}} \\
\frac{\partial^{2r} P}{\partial x^{2\alpha+1} \cdot \partial y^{2r-2\alpha-1}} &= (-1)^{\alpha} \frac{\partial^{2r} Q}{\partial x^{2r}} \\
\frac{\partial^{2r} Q}{\partial x^{2\alpha+1} \cdot \partial y^{2r-2\alpha-1}} &= (-1)^{\alpha+1} \frac{\partial^{2r} P}{\partial x^{2r}}
\end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

von denen wir alsbald Gebrauch machen werden. Wir nehmen einmal an, dafs $M(x, y)$ ein $2r$-facher Punkt der Kurve $P = 0$ sei; die Winkel ϑ_P, welche die zugehörigen Tangenten mit der x-Axe bilden, werden durch eine Gleichung bestimmt, die man symbolisch folgendermafsen wiedergeben kann:

$$\left(\cos\vartheta_P \frac{\partial}{\partial x} + \sin\vartheta_P \frac{\partial}{\partial y}\right)^{2r} P(x, y) = 0,$$

wenn man darunter versteht, dafs, wenn die Potenz dieses Binoms entwickelt ist, man im allgemeinen $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^q P(x, y)$ ersetzt durch $\frac{\partial^{p+q} P(x, y)}{\partial x^p \cdot \partial y^q}$. Demnach ist jene Gleichung in Wirklichkeit äquivalent mit folgender anderen:

---

1) In einer bis heute dem Verf. unzugänglichen Abhandlung, die am 23. Febr. 1901 der American Mathematical Society vorgelegt wurde.

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=r}\binom{2r}{2\alpha}\cos^{2\alpha}\vartheta_P\cdot\sin^{2r-2\alpha}\vartheta_P\cdot\frac{\partial^{2r}P}{\partial x^{2\alpha}\cdot\partial y^{2r-2\alpha}}$$

$$+\sum_{\alpha=0}^{\alpha=r-1}\binom{2r}{2\alpha+1}\cos^{2\alpha+1}\vartheta_P\cdot\sin^{2r-2\alpha-1}\vartheta_P\cdot\frac{\partial^{2r}P}{\partial x^{2\alpha+1}\partial y^{2r-2\alpha-1}}=0,$$

und diese verwandelt sich, wenn man sich der Identitäten (3) und der Multiplikationsformeln für die Bogen bedient, in folgende viel einfachere

$$\frac{\partial^{2r}P}{\partial x^{2r}}\cos 2r\vartheta_P+\frac{\partial^{2r}Q}{\partial x^{2r}}\sin 2r\vartheta_P=0\cdot$$

Bezeichnet man nun mit μ einen Wert des Winkels $2r\vartheta_P$, welcher dieser Gleichung genügt, so kann ϑ_P folgende Werte annehmen

$$\frac{\mu}{2r},\quad\frac{\mu+\pi}{2r},\quad\frac{\mu+2\pi}{2r},\quad\ldots\ldots,\quad\frac{\mu+(2r-1)\pi}{2r},$$

die einander inkongruent ($mod\ \pi$) sind; es geht daraus hervor: **Die Tangenten an die Kurve $P=0$ in ihrem $2r$-fachen Punkte teilen den vollen Winkel um P in $2r$ gleiche Teile.** Dieselbe Eigenschaft gilt für einen Punkt von ungerader Vielfachheit, und wird in ähnlicher Weise bewiesen.

Ist hingegen $M(x,y)$ ein $2r$-facher Punkt der Kurve $Q(x,y)=0$, so findet man bei Wiederholung der vorigen Rechnung statt der Gleichung (4) die folgende

$$\frac{\partial^{2r}Q}{\partial x^{2r}}\cos 2r\vartheta_Q-\frac{\partial^{2r}Q}{\partial x^{2r}}\sin 2r\vartheta_Q=0,$$

welcher — wenn μ dieselbe Bedeutung hat wie vorhin — durch folgende Werte von ϑ_Q genügt wird:

$$\frac{\mu+\frac{\pi}{2}}{2r},\quad\frac{\mu+\frac{\pi}{2}+\pi}{2r},\quad\frac{\mu+\frac{\pi}{2}+2\pi}{2r},\quad\ldots\ldots,\quad\frac{\mu+\frac{\pi}{2}+(2r-1)\pi}{2r};$$

dies zeigt: **Die Tangenten an die Kurve $Q(x,y)=0$ im r-fachen Punkte M erhält man, wenn man die entsprechenden Tangenten der Kurve $P(x,y)=0$ um den Winkel $\frac{\pi}{4r}$ dreht.** Ähnliches trifft zu für einen Punkt von der Vielfachheit $2r-1$, jedoch ist die Gröfse der entsprechenden Drehung $\frac{\pi}{2(2r-1)}$.[1])

Die Betrachtung der Asymptoten der Kurven $P=0$, $Q=0$ führt zu einem ähnlichen Satze, wie der vorhergehende. Um ihn zu

1) Vor Walton waren diese Sätze schon von W. J. Macquor Rankine bemerkt worden in der Abhandlung *On curves fulfilling the equation*

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}=0.$$

(Proc. of the R. Soc. London, XIV, 1867; Phil. Mag. 1868).

beweisen, nehmen wir der Einfachheit halber die Koeffizienten a_r der gegebenen Gleichung als reell an. Wir erinnern uns[1]), dafs wir die Gleichung der Kurve n^{ter} Ordnung in der Form schrieben

$$f_n(x, y) + f_{n-1}(x, y) + \cdots\cdots + f_1(x, y) + f_0 = 0,$$

wo $f_k(x, y)$ eine binäre Form vom Grade k in x und y ist. Die Asymptoten derselben haben die Gleichung

$$\frac{\partial f_n}{\partial x} X + \frac{\partial f_n}{\partial y} Y + f_{n-1} = 0,$$

wo X und Y die laufenden Koordinaten sind und x, y der homogenen Gleichung $f_n(x, y) = 0$ genügen[2]). Um dieses auf unsern Fall anzuwenden, setzen wir

$$a_{n-r}(x \pm iy)^r = P_r + iQ_r,$$

oder

$$\frac{P_r}{2a_{n-r}} = (x + iy)^r + (x - iy)^r, \quad \frac{Q_r}{2ia_{n-r}} = (x + iy)^r - (x - iy)^r;$$

wir sehen dann, dafs die Gleichung einer beliebigen von den Asymptoten der Kurve $P = 0$ sein wird

$$\frac{\partial P_n}{\partial x} X + \frac{\partial P_n}{\partial y} Y + P_{n-1} = 0 \quad \text{(unter der Bedingung } P_n = 0\text{)},$$

oder noch einfacher

$$\begin{aligned} & na_0 \left\{(x + iy)^{n-1} + (x - iy)^{n-1}\right\} X \\ + \; & nia_0 \left\{(x + iy)^{n-1} - (x - iy)^{n-1}\right\} Y \\ + \; & a_1 \left\{(x + iy)^{n-1} + (x - iy)^{n-1}\right\} = 0, \end{aligned}$$

unter der Bedingung

$$(x + iy)^n + (x - iy)^n = 0.$$

Setzen wir $x = \varrho \cos \omega$, $y = \varrho \sin \omega$, so werden diese beiden Relationen zu

$$na_0 \cos(n-1)\omega \cdot X - na_0 \sin(n-1)\omega \cdot Y + a_1 \cos(n-1)\omega = 0$$
$$\cos n\omega = 0;$$

---

1) Gregory, *Of asymptotes to algebraic curves* (Cambridge Math. Journ. IV, 1845); Casorati, *Nuova e migliore forma delle equazioni degli asintoti di una linea piana algebrica* (Rend. dell' Ist. Lomb. 2. Ser. XII, 1879; vgl. Palermo Rendic. III, 1889, S. 49 ff.).

2) Um dies zu verifizieren, schreibe man die Gleichung der Kurve in homogener Form also:

$$\sum_0^n f_{n-r}(x, y) u^r = 0;$$

da eine Asymptote nichts anderes ist als eine Tangente in einem ihrer unendlich fernen Punkte, d. h. in einem Punkte, wofür $u = 0$, $f_n = 0$, so wird sie die Gleichung haben

$$\frac{\partial f_n}{\partial x} X + \frac{\partial f_n}{\partial y} Y + f_{n-1} = 0$$

unter der Bedingung $f_n = 0$, wie auch im Texte behauptet wird.

oder auch

$$n a_0 \sin\omega \cdot X - n a_0 \cos\omega\, Y + a_1 \sin\omega = 0, \qquad \cos n\omega = 0.$$

Die zweite von diesen Beziehungen giebt nun

$$\omega = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

und folglich stellen die Gleichungen

$$n a_0 \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\, Y = (n a_0 X + a_1) \sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

die n Asymptoten der Kurve $P = 0$ dar. Sie zeigen, **dafs die Asymptoten selbst in einen Punkt C, $\left(-\frac{a_1}{n a_0}, 0\right)$ zusammenlaufen und mit der x-Axe die Winkel $\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \ldots, \frac{(2n-1)\pi}{2n}$ bilden**; demnach bilden zwei aufeinanderfolgende miteinander den Winkel $\frac{\pi}{n}$. Ähnlich zeigt man, dafs die Asymptoten der Kurve $Q = 0$ auch durch den Punkt C gehen und mit der x-Axe die Winkel $0, \frac{\pi}{n}, \ldots, \frac{(n-1)\pi}{n}$ bilden. Sie sind also die Winkelhalbierer zwischen zwei aufeinander folgenden Asymptoten der Kurve $P = 0$. Dies beweist, dafs die Wurzelkurven spezielle Equilateren von P. Serret sind (s. Nr. **133**).

Die Kurven $P = 0$, $Q = 0$ haben beide in einem r-fachen Punkte M, r Krümmungsmittelpunkte, die auf einer Geraden liegen, und wenn dieser Punkt ein vielfacher für beide ist, so fallen die betreffenden so entstehenden Geraden zusammen. Den Beweis dieser Sätze wollen wir dem Leser überlassen und zu anderen Linien übergehen, als deren Spezialfälle man die Wurzel-Kurven ansehen kann.

162. Es seien $z = x + iy$, $Z = X + iY$ zwei komplexe Variabeln, die durch die Gleichung

$$Z = z^n + p_1 z^{n-1} + p_2 z^{n-2} + \cdots + p_{n-1} z + p_n \quad . \quad . \quad (6)$$

(worin die p_k beliebige komplexe Zahlen sind) miteinander verknüpft sind. Stellen wir diese in gewohnter Weise auf zwei Ebenen π und Π dar, so entsteht eine isogonale Transformation. Betrachten wir in der Ebene Π eine beliebige Gerade

$$\frac{Y-b}{X-a} = \operatorname{tg}\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

und suchen die entsprechende Kurve in π auf. Zu dem Zwecke bezeichnen wir die rechte Seite von Gleichung (6) mit $f(z)$, mit $\bar{\xi}$ die zu ξ konjugierte Gröfse und mit c die komplexe Zahl $a + bi$; da man nun Gleichung (7) schreiben kann

$$\gamma = \operatorname{arc\,tg}\frac{Y-b}{X-a} = \frac{1}{2i} \operatorname{arc\,tg}\frac{(X+iY)-(a+bi)}{(X-iY)-(a-bi)},$$

so haben wir, wegen Gleichung (6)

$$\gamma = \frac{1}{2i} \log \frac{f(z) - c}{\overline{f(z)} - \bar{c}}.$$

Bezeichnen wir nun mit $c_1, c_2, c_3 \ldots\ldots c_n$ die Wurzeln der Gleichung $f(z) = c$, d. h. setzen wir

$$f(z) - c = (z - c_1)(z - c_2) \ldots\ldots (z - c_n), \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

so wird die vorige Gleichung

$$\gamma = \frac{1}{2i} \log \prod_{k=1}^{k=n} \frac{z - c_k}{\bar{z} - \bar{c}_k} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2i} \log \frac{z - c_k}{\bar{z} - \bar{c}_k},$$

oder schliefslich

$$\gamma = \sum_{k=1}^{k=n} \operatorname{arc\,tg} \frac{y - b_k}{x - a_k}.$$

Um diese Gleichung der transformierten Kurve zu deuten, beachten wir, dafs $\operatorname{arc\,tg} \frac{y - b_k}{x - a_k}$ den Winkel φ_k mifst, den die Gerade, welche den Punkt $M(x, y)$ mit dem festen Punkte $P_k(a_k, b_k)$ verbindet, mit der x-Axe bildet. Die vorige Gleichung ist demnach äquivalent mit der folgenden anderen

$$\gamma = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots\cdots + \varphi_n. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Demnach — wenn wir mit Laguerre unter der Orientierung eines Systems von Geraden die Summe der Winkel verstehen, die diese mit einer festen Geraden bilden — sind wir zu dem Schlusse berechtigt, **dafs in der durch die Gleichungen (6) angegebenen isogonalen Transformation den Geraden der Ebene Π Kurven n^{ter} Ordnung in der Ebene entsprechen, die alle den Ort der Punkte bilden, von denen n Gerade ausgehen, die durch ebenso viele feste Punkte gehend, ein System konstanter Orientierungen bilden.** Die so erhaltenen Kurven werden nach G. Holzmüller[1]) irreguläre Hyperbeln n^{ter} Ordnung genannt; in dem speziellen Falle, dafs alle Koeffizienten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ gleich Null sind, sind die festen Punkte die Ecken eines regelmäfsigen Vielecks, und die entsprechenden Kurven heifsen reguläre Hyperbeln n^{ter} Ordnung; der Grund für diese Bezeichnung liegt darin, dafs für $n = 2$ die genannten Kurven gemeine Hyperbeln zweiter Ordnung, gleichseitige oder ungleichseitige, werden. — Die genannten Kurven erfreuen sich einer schönen Eigenschaft, die zu Tage tritt, wenn man beachtet, dafs die durch Gleichung (7) dargestellte Gerade sich nicht von der folgenden unterscheidet:

$$\frac{Y - (b + d \sin \gamma)}{X - (a + d \cos \gamma)} = \operatorname{tg} \gamma, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7')$$

---

1) *Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften* (Leipzig 1882) S. 170 u. 203.

wo d eine ganz beliebige Konstante ist; mit (7') kann man gerade so verfahren, wie wir es mit (7) gethan haben, und zu ähnlichen Schlüssen gelangen; der einzige Unterschied besteht darin, dafs die Gleichung $f(z) = c$ ersetzt ist durch $f(z) = c + de^{i\gamma}$, und daher die festen Punkte P_k verändert sind. Man sieht also: **Die regulären oder irregulären Hyperbeln n^{ter} Ordnung sind ∞^1 Definitionen fähig, ähnlich der oben angegebenen; infolgedessen hat man ∞^1 Gruppen von n festen Punkten, die alle denselben Schwerpunkt haben;** die entsprechenden Orientierungen sind alle einander gleich.

Wir betrachten in der Ebene Π zwei beliebige Geraden, die den Winkel α bilden; ihnen entsprechen in π zwei Hyperbeln, die sich unter einem Winkel schneiden, der in jedem Punkte für sie derselbe ist; folglich: **Zwei Holzmüller'sche Hyperbeln derselben Ordnung, die auf dieselben festen Punkte bezogen sind, schneiden sich in allen gemeinschaftlichen Punkten unter demselben Winkel.**

Betrachten wir jetzt in der Ebene Π einen Kreis mit dem Centrum (a, b) und dem Radius R und beachten, dafs seine Gleichung

$$(Z - c)(\overline{Z} - \overline{c}) = R^2,$$

so sehen wir, dafs er sich in die Kurve verwandelt

$$\left(f(z) - c\right)\left(\overline{f(z)} - \overline{c}\right) = R^2,$$

oder wegen Gleichung (8)

$$\prod_{k=1}^{k=u} (z - c_k)(\overline{z} - \overline{c}_k) = R^2;$$

nun bedeutet $(z - c_k)(\overline{z} - \overline{c}_k)$ das Quadrat des Abstandes d_k des Punktes $M(x, y)$ von dem Punkte $P_k(a_k, b_k)$; daher ist diese Gleichung äquivalent mit der anderen

$$d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \; .\; .\; .\; . \; d_n = R.$$

Folglich: **Bei der durch die Gleichung (6) definierten isogonalen Transformation entsprechen den Kreisen in der Ebene Π Kurven von der Ordnung $2n$ in der Ebene π; jede derselben ist der Ort der Punkte, deren Abstände von n festen Punkten ein konstantes Produkt ergeben.** Für $n = 2$ sind diese Kurven Cassini'sche Ovale (Nr. **90**) oder im speziellen Bernoulli'sche Lemniskaten (Nr. **93**); im allgemeinen werden sie nach Holzmüller Lemniskaten höherer Ordnung genannt, reguläre, wenn $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 0$, irreguläre im allgemeinsten Falle[1]) und nach F. Lucas Äquipotenzialkurven[2]); die regulären wurden in älterer Zeit von W. Roberts Cassinoiden mit

1) S. 172 und 204 des eben angeführten Werkes.

2) S. die Note *Détermination electrique des racines réelles et imaginaires de la dérivée d'un polynome quelconque* (C. R. CVI, 1888); wo eine electrische Methode angegeben ist, diese Kurven zu zeichnen.

n Brennpunkten genannt[1]). Es ist klar, dafs die jetzt erhaltenen allgemeinen Lemniskaten die orthogonalen Trajectorien der vorhin definierten Hyperbeln sind[2]).

Wenn wir, statt von der Gleichung (6) auszugehen, die folgende Gleichung

$$Z = \frac{f(z)}{F(z)}$$

als Ausgangspunkt unserer Betrachtungen genommen hätten (wo f und F zwei Polynome von z, die zu einander prim sind und vom Grade m und n), so würden wir zu zwei neuen Klassen von Kurven gelangen, die statt durch die Gleichungen (9) und (10) durch die analogen Gleichungen

$$(\varphi_1' + \varphi_2' + \cdots + \varphi_m') - (\varphi_1'' + \varphi_2'' + \cdots + \varphi_n'') = \gamma,$$

$$\frac{d_1' \cdot d_2' \ldots d_m'}{d_1'' \cdot d_2'' \ldots d_n''} = R$$

charakterisiert werden, für die Holzmüller ebenfalls die Namen Hyperbeln und Lemniskaten anwandte. Sie waren schon früher von Darboux untersucht worden[3]), der einige schöne Eigenschaften derselben auffand; ferner hatte sich früher A. Genocchi[4]) mit dem Falle beschäftigt, in welchem die festen Punkte die Ecken zweier regelmäfsiger konzentrischer Polygone von derselben Seitenzahl sind, indem er eine Art der Transformation der Figuren anwandte, die von W. Roberts im Jahre 1842 erdacht wurde.

163. Zu den in der vorigen Nr. untersuchten Kurven kann man auch gelangen und ist man auch thatsächlich gelangt, ohne auf die Theorie der isogonalen Transformationen zurückzugehen, wenn man als Ausgangspunkt eine der Eigenschaften nimmt, deren sich, wie wir sahen, die regulären bezw. irregulären Hyperbeln erfreuen; da diese Methode zu neuen Resultaten geführt hat, so können wir nicht umhin, hier darauf hinzuweisen.

---

1) *Note sur la rectification de la cassinoïde à n foyers* (Liouvilles Journ. XIII, 1848), daselbst sind die Kurven durch die Polargleichung dargestellt: $\varrho^{2n} - 2a^n \varrho^n \cos n\omega + a^{2n} = b^{2n}$, die sich recht gut zur Diskussion der Kurve eignet; z. B. läfst sie erkennen, dafs, wenn man b variieren läfst, man ∞^1 Kurven erhält, deren Wendepunkte auf einer Sinusspirale (vgl. Nr. 171) liegen, die durch die Gleichung $\varrho^n + (n-1)a^n \cos n\omega = 0$ dargestellt wird.

2) Auf Kurven dieser Art kommt man offenbar auch, wenn man die Örter der Punkte einer Ebene sucht, in denen das Polynom $z^n + p_1 z^{n-1} + \cdots + p_n$ ein gegebenes Argument, oder einen gegebenen Modul hat; sie sind die courbes d'égale module und die courbes d'égal argument von H. Laurent (*Thèse d'analyse sur la continuité des fonctions imaginaires et des séries en particulier,* Metz 1865).

3) *Sur une classe remarquable de courbes et des surfaces algébriques* (Paris 1873) S. 66—75.

4) *Intorno alla rettificazione e alle proprietà delle caustiche secondarie* (Ann. di Mat. VI, 1864).

In einer Ebene seien n feste Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ gegeben; es giebt dann in derselben Ebene unzählig viele Punkte M derart, dafs die n Geraden $MP_1, MP_2, \ldots, MP_n$ ein System von gegebener Orientierung liefern; der Ort derselben ist eine Kurve n^{ter} Ordnung, die F. Lucas[1]) Stelloide n^{ten} Grades genannt hat. Wir wollen sie kurz mit S_n bezeichnen und die festen Punkte derselben die Angelpunkte (pivots) nennen. Für $n=1$ reduziert sich die S_n auf eine Gerade, die von dem einzigen Angelpunkte ausgeht. Aber auch, wenn $n>1$, geht die S_n durch ihre Angelpunkte; nämlich durch den Punkt P_k können wir immer eine Gerade ziehen, die mit den Geraden $P_kP_1, \ldots, P_kP_{k-1}, P_kP_{k+1}, \ldots, P_kP_n$ ein System von n Geraden, das die gegebene Orientierung hat, bildet. Um die Gleichung von S_n zu finden, bezeichnen wir mit a_k, b_k die Koordinaten von P_k und mit x, y die von M. Setzen wir dann $c_k = a_k + ib_k$, $z = x + iy$, so wird der Winkel der Geraden MA_k mit Ox sein $= \arg(z - a_k)$. Daher wird wegen der Bedingungen des Problems

$$\sum_{k=1}^{k=n} \arg(z - a_k) = c$$

sein, oder

$$\arg \prod_{k=1}^{k=n} (z - a_k) = c.$$

Setzt man daher

$$f(z) = (z - c_1)(z - c_2)\ldots(z - c_n) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

so wird die vorige Gleichung

$$\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = c, \qquad \ldots \ldots \ldots \qquad (11)$$

welche beweist, dafs S_n eine Kurve n^{ter} Ordnung ist; schreibt man dagegen

$$\frac{\frac{1}{2}\left(f(z) + \overline{f(z)}\right)}{\frac{1}{2i}\left(f(z) - \overline{f(z)}\right)} = c, \qquad \text{oder} \qquad \frac{f(z)}{\overline{f(z)}} = \frac{c+i}{c-i}, \ldots \qquad (12)$$

so erkennt man, dafs die Stelloiden nicht verschieden sind von den Holzmüller'schen Hyperbeln.

Aus Gleichung (11) geht hervor: Damit eine Kurve eine Stelloide sei, ist notwendig und hinreichend, dafs ihre Gleichung sich auf die Form bringen lasse

$$aP(x,y) + bQ(x,y) = 0,$$

wo a und b Konstanten, P und Q ganze Funktionen von x, y sind, derart, dafs

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

---

1) *Géometrie des polynômes* (Journ. de l'Éc. polyt. XLVI. Heft, 1879). Die Haupteigenschaften der Stelloiden finden sich dargestellt in einer Abhandl. von Fouret, *Sur quelques propriétés géometriques des stelloïdes* (C.-R. CVI, 1888).

Daraus läfst sich ein bemerkenswerter Satz ableiten. Die Gleichung der ersten Polare eines unendlich fernen Punktes in Bezug auf die Kurve $aP(x, y) + bQ(x, y) = 0$ hat eine Gleichung von folgender Form:

$$a\left(\xi \frac{\partial P}{\partial x} + \eta \frac{\partial P}{\partial y}\right) + b\left(\xi \frac{\partial Q}{\partial x} + \eta \frac{\partial Q}{\partial y}\right) = 0,$$

oder auch infolge der vorhergehenden Gleichung

$$-a\left(\xi \frac{\partial P}{\partial x} + \eta \frac{\partial P}{\partial y}\right) + b\left(-\xi \frac{\partial P}{\partial y} + \eta \frac{\partial P}{\partial x}\right) = 0;$$

weil nun

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0,$$

so sieht man: **Die ersten Polaren der Punkte der unendlich fernen Geraden in Bezug auf eine Stelloide n^{ten} Grades sind Stelloiden $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades.**

Um eine andere Eigenschaft der Stelloiden darzulegen, stellen wir, wie es Darboux gethan, einen beliebigen Punkt M durch zwei komplexe Zahlen dar, die konjugiert sind oder nicht, jenachdem M reell oder imaginär ist (sog. imaginäre symmetrische Koordinaten); wir bezeichnen dann als Gegenpaar des Punktepaares P_h, P_k die beiden Punkte, welche das dritte Paar von Gegenecken des vollständigen Vierseits sind, das entsteht, wenn man von P_h und P_k aus die beiden Kreispunkte projiziert. Weil nun c_h und $\bar{c}_h$ die imaginären symmetrischen Koordinaten von P_h sind und $c_k, \bar{c}_k$ die von P_k, so werden $c_h, \bar{c}_k$ und $\bar{c}_h, c_k$ die der Punkte Q'_{hk}, Q''_{hk} sein, die das Gegenpaar von P_h, P_k sind. Da nun die Gleichung (12) in ausführlicher Weise folgendermafsen geschrieben wird:

$$\frac{(x+iy-c_1)(x+iy-c_2)\ldots\ldots(x+iy-c_n)}{(x-iy-\bar{c}_1)(x-iy-\bar{c}_2)\ldots\ldots(x-iy-\bar{c}_n)} = \frac{c+i}{c-i}, \quad . \quad (12')$$

so ist klar, dafs sie befriedigt wird, wenn man setzt:

sowohl $\quad x+iy = c_k, \quad x-iy = \bar{c}_k,$

als auch $\quad x+iy = c_h, \quad x-iy = \bar{c}_h.$

Sie wird daher sowohl durch die Koordinaten der Angelpunkte als auch durch die Koordinaten der Punkte der $\frac{n(n-1)}{2}$ Paare von Gegenpunkten befriedigt (Gegenpunkte in Bezug auf die von den Angelpunkten selbst gebildeten Paare). Im ganzen giebt es $n + 2\frac{n(n-1)}{2} = n^2$ Punkte, die allen den ∞^1 durch (12) dargestellten Kurven, wenn man c variiert, gemeinsam sind. **Diese Gleichung (12) stellt daher ein Büschel von Stelloiden dar**; welches die Grundpunkte desselben sind, ergiebt sich aus dem Vorhergehenden. Z. B. bilden alle ersten Polaren der Punkte der unendlich fernen Geraden in Bezug auf eine beliebige Stelloide ein solches Büschel.

164. Weitere Eigenschaften der Stelloiden entspringen leicht aus der Polargleichung, die wir nun aufstellen wollen. Zu dem Zwecke setzen wir

$$f(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + p_2 z^{n-2} + \cdots p_{n-1} z + p_n, \quad \text{wo } p_0 = 1; \quad (13)$$

ferner $z = \varrho e^{i\omega}$, $p_k = g_k e^{i\gamma_k}$ $(k = 0, 1, \ldots n)$, $c = \operatorname{tg} \gamma$;

dann wird $g_0 = 1$ und $\gamma_0 = 0$;

daher ist
$$P(x, y) = \sum_{k=0}^{k=n} g_k \varrho^{n-k} \cos\left(\gamma_k + \overline{n-k} \cdot \omega\right),$$
$$Q(x, y) = \sum_{k=0}^{k=n} g_k \varrho^{n-k} \sin\left(\gamma_k + \overline{n-k} \cdot \omega\right);$$

demnach wird Gleichung (11) zu

$$\sum_{k=0}^{k=n} g_k \varrho^{n-k} \cos\left(\gamma + \gamma_k + \overline{n-k} \cdot \omega\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Dies ist die Polargleichung der Kurve. Wir werden daraus sogleich eine Folgerung ziehen. Durch den Pol ziehen wir eine beliebige Gerade, die mit der Polaraxe den Winkel α bildet; $\mathfrak{P}(\alpha)$ sei das Produkt der Radienvectoren der n Punkte, in denen sie die Stelloide schneidet. Offenbar ist dann

$$\mathfrak{P}(\alpha) = (-1)^n g_n \frac{\cos(\gamma + \gamma_n)}{\cos(\gamma + n\alpha)}.$$

Ähnlich ist, welches auch die beliebige ganze Zahl r sein möge,

$$\mathfrak{P}\left(\alpha + \frac{r\pi}{n}\right) = (-1)^n g_n \frac{\cos(\gamma + \gamma_n)}{\cos(\gamma + n\alpha + r\pi)} = (-1)^n g_n \frac{\cos(\gamma + \gamma_n)}{(-1)^r \cos(\gamma + n\alpha)};$$

aus der Vergleichung dieser beiden Relationen ergiebt sich, dafs

$$\mathfrak{P}\left(\alpha + \frac{r\pi}{n}\right) = (-1)^r \mathfrak{P}(\alpha).$$

Bedenkt man nun, dafs der Pol des Systems, auf das wir die Kurve bezogen haben, ein beliebiger Punkt der Ebene ist, so erkennt man, dafs wir zu folgendem Resultate gelangt sind: **Schneidet man eine Stelloide n^{ten} Grades mit einem Winkel von der Gröfse $\frac{\pi r}{n}$ (r eine ganze Zahl), so ist das Produkt der Abstände des Scheitelpunktes von den Schnittpunkten des einen Schenkels immer gleich dem absoluten Werte des analogen Produktes bei dem andern Schenkel und unterscheidet sich auch nicht durch das Vorzeichen, wenn r gerade ist.** Oft ist es angebracht, als Pol den Schwerpunkt der Angelpunkte zu

nehmen; Fouret nennt diesen Punkt point de rayonnement (Ausstrahlungspunkt). In einem solchen Falle ist offenbar

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 0, \quad p_1 = 0, \quad g_1 = 0.$$

Nun entsprechen die unendlich fernen Punkte der Kurve (14) solchen Werten von ω, dafs

$$n\omega + \gamma = (2r+1)\frac{\pi}{2};$$

machen wir $r = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, so haben wir n verschiedene Werte von ω, welche die Richtungen bestimmen, in denen sich die unendlich fernen Punkte der Stelloide befinden. Giebt man nun dem ω einen dieser Werte, so wird die Gleichung (14) in ϱ vom Grade $n-2$ sein, womit gezeigt ist, dafs die durch den Pol in dieser Richtung gezogenen Geraden jede zwei Schnitte mit der Kurve im Unendlichen haben, weshalb sie Asymptoten der Kurve sind. Folglich: **Eine Stelloide n^{ter} Ordnung besitzt n reelle Asymptoten, die durch den Schwerpunkt der Angelpunkte gehen und eine n-strahlige Windrose bilden, die zugleich mit der unendlich fernen Geraden die erste Polarkurve des Ausstrahlungspunktes in Bezug auf die Stelloide n^{ter} Ordnung bildet**[1].

Dies sind etwa die hauptsächlichsten Eigenschaften der Stelloiden. Ebenso wie sie haben auch in der geometrischen Darstellung komplexer Zahlen ihren Ursprung diejenigen, welche aus dem Polynome

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

entspringen, wenn man mit F. Lucas

$$\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2}{P^2 + Q^2} = Const., \qquad \text{oder} \qquad \frac{P\frac{\partial P}{\partial y} + Q\frac{\partial Q}{\partial y}}{P\frac{\partial P}{\partial x} + Q\frac{\partial Q}{\partial x}} = Const.$$

setzt; sie werden beziehungsweise isodynamische Linien und halysische Linien (Irrlinien) genannt[2].

Ähnlichen Ursprung haben die Linien, deren allgemeine Gleichung

$$z^{\frac{1}{n}}\bar{z}^{\frac{1}{n}} + Az^{\frac{1}{n}} + \bar{A}\bar{z}^{\frac{1}{n}} + \beta = 0$$

lautet, wobei β reell ist. Ihrer Ordnung gemäfs heifsen sie Kar-

---

1) Vgl. auch Briot et Bouquet, *Traité des fonctions elliptiques* (II. Aufl. Paris 1875) S. 226; P. G. Laurin, *Sur la transformation isogonale définie par une fonction rationelle* (Lund 1887) S. 89.

2) Lucas, *Généralisation du théorème de Rolle* (C. R. CVI, 1888) und *Statique des polynômes* (Bull. de la Soc. math. de France XVII, 1889); Brocard (*Notes de bibliographie des courbes géométriques*, Partie complémentaire 1899) hat bemerkt, dafs die erste Idee dieser Kurven Duhamel zukommt und auf das Jahr 1862 zurückgeht.

dioiden vom Grade $2n$[1]). Ihre Bedeutung, die sie bisher in der Geometrie erlangt haben, ist nicht derart, dafs wir uns veranlafst sehen sollten, hier mehr als ihre Definition zu geben.

Sechzehntes Kapitel.

Allgemeines über die Untersuchung derjenigen algebraischen Kurven, deren Rektifikation von vorher bestimmten Funktionen abhängt.

165. Liegt eine Kurve als gegeben vor, so lehrt uns die Integral-Rechnung die Natur der Funktion kennen, die man anzuwenden hat, um deren Rektifikation auszuführen. Erheblich schwieriger ist die umgekehrte Aufgabe, nämlich die Auffindung aller algebraischen Kurven, deren Rektifikation vermittelst a priori bekannter Funktionen ausgeführt werden kann, oder, wenn man so sagen will, vermittelst Bogen von gegebenen Kurven. Eben diesem allgemeinen Probleme hat Euler viele Zeit und Mühe gewidmet[2]), indem er es zunächst auf eine Frage der unbestimmten algebraischen Analysis zurückführte, und dann mit jener wunderbaren Virtuosität in der Rechnung behandelte, die nur vergleichbar ist mit ähnlichen Vermächtnissen, wie sie uns Diophant in zahlentheoretischen Untersuchungen hinterlassen hat.

Das Euler'sche Problem kann man so ausdrücken: „Gegeben eine Funktion V einer Variabelen v, zwei andere Funktionen $x(v)$ und $y(v)$ aufzufinden, derart, dafs identisch

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = V \cdot dv\text{.“} \qquad (1)$$

Eine Lösung (oder wenn man will eine Umgestaltung) des Problemes erhält man, indem man, wenn U eine beliebige Funktion von u, und A, B Konstanten sind, welche die Gleichung (1) identisch befriedigen, alsdann setzt

$$dx = V\frac{\sqrt{A+U}}{\sqrt{A+B}}\,dv, \qquad dy = V\frac{\sqrt{B-U}}{\sqrt{A+B}}\,dv;$$

---

1) J. Goettler, *Conforme Abbildung eines von concentrischen gleichseitigen Hyperbeln oder gewissen Kurven n^{ter} Ordnung begrenzten Flächenstückes auf dem Einheitskreis* (München 1897).

2) Man sehe die drei Abhandlungen: *De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudinem per arcus parabolicos metiri licet* (Nova Acta Petrop. V, 1789, vorgelegt am 3. Juni 1776); *De binis curvis algebraicis eadem rectificatione gaudentibus* (Mém. de St. Pétersbourg, XI, 1830, vorgelegt am 20. Aug. 1781); *De lineis curvis quarum rectificatio per datam quadraturam mensuratur* (Leonhardi Euleri opera postuma mathematica et physica, I, Petropoli 1862, S. 439 u. 452).

somit ist die ganze Sache darauf zurückgeführt, jene so zu wählen, dafs die beiden Integrationen

$$\int V\frac{\sqrt{A+U}}{\sqrt{A+B}}\,dv, \qquad \int V\frac{\sqrt{B+U}}{\sqrt{A+B}}\,dv$$

ausführbar sind, und dafs die resultierende parametische Darstellung $x = x(v)$, $y = y(v)$ einer algebraischen Kurve angehöre. — Eine ähnliche Reduktion bekommt man, wenn man berücksichtigt, dafs Gleichung (1) durch folgende beiden kann vertreten werden:

$$dx = V\cos\varphi\cdot dv, \qquad dy = V\sin\varphi\cdot dv, \quad . \; . \; . \quad (3)$$

womit die Frage zurückgeführt ist auf die Aufsuchung der Funktion $\varphi = \varphi(v)$, für welche die Gleichungen

$$x = \int V\cos\varphi\cdot dv, \qquad y = \int V\sin\varphi\cdot dv$$

eine algebraische Kurve darstellen. — In dem Spezialfalle, dafs $V = \sqrt{P^2 + Q^2}$, wo P und Q Funktionen von v sind, kann Gl. (1) ersetzt werden sowohl durch

$$\frac{dx}{dv} = \frac{P\sqrt{A+U} - Q\sqrt{B-U}}{\sqrt{A+B}}, \qquad \frac{dy}{dv} = \frac{P\sqrt{B-U} + Q\sqrt{A+U}}{\sqrt{A+B}}, \; . \quad (4)$$

als auch durch

$$\frac{dx}{dv} = P\sin\varphi + Q\cos\varphi, \qquad \frac{dy}{dv} = P\cos\varphi - Q\sin\varphi, \quad . \; . \quad (5)$$

wo A, B, V, φ dieselbe Bedeutung haben wie vorhin. Somit kann die Umgestaltung des ursprünglichen Problems auf zwei andere den vorigen ähnliche Arten vor sich gehen. Wenngleich diese Betrachtungen noch nicht zur allgemeinen Lösung des aufgestellten Problems führen, so können sie dennoch in besonderen Fällen zu bemerkenswerten Resultaten führen; die folgenden Anwendungen mögen dieses zeigen.

166. a) Kurven, die durch Parabelbogen rektifizierbar sind[1]. In diesem Falle kann man $V = \sqrt{1 + v^2}$, d. h. $P = 1$, $Q = v$ setzen; die Gleichungen (4) werden dann

$$\frac{dx}{dv} = \frac{\sqrt{A+U} - v\sqrt{B-U}}{\sqrt{A+B}}, \qquad \frac{dy}{dv} = \frac{\sqrt{B-U} + v\sqrt{A+U}}{\sqrt{A+B}};$$

Euler setzt $U = \sqrt[r]{v}$ und erhält algebraische Kurven. Bei derselben Annahme geben die Gleichungen (5)

$$\frac{dx}{dv} = \sin\varphi + v\cos\varphi, \qquad \frac{dy}{dv} = \cos\varphi - v\sin\varphi;$$

setzt man nun $v = \sin\vartheta$ und nimmt an, dafs $\varphi = k\vartheta + \alpha$, wo k eine rationale Zahl ist, so erhält man integrierbare Formeln, die ebenfalls

1) Aufser den drei vorigen Euler'schen Abhandlungen s. auch die mit dem Titel *De infinitis curvis algebraicis, quarum longitudo arcui parabolico aequatur* (Mém. de St. Pétersbourg, XI, 1830; vorgelegt am 20. Aug. 1781).

zu algebraischen Kurven führen. Ein drittes und besseres Verfahren gründet sich auf die Betrachtung des Bogendifferenzials einer Parabel, das in der Form $\frac{dz\sqrt{z^2+a^2}}{a}$ geschrieben wird, wo z die unabhängige Variabele ist. Setzt man dann

$$dx = \frac{\sqrt{z^2+a^2}}{a}\cos\varphi\cdot dz, \qquad dy = \frac{\sqrt{z^2+a^2}}{a}\sin\varphi\cdot dz,$$

so ist die Frage darauf zurückgeführt, $\varphi = \varphi(z)$ so zu wählen, dafs x und y in endlichen Ausdrücken erhalten werden. Euler setzt zu dem Zwecke

$$z = a\operatorname{tg}\varphi, \qquad \varphi = n\vartheta,$$

und erhält infolgedessen

$$dx = a\frac{\cos n\vartheta\cdot d\vartheta}{\cos^3\vartheta}d\vartheta, \qquad dy = a\frac{\sin n\vartheta\cdot d\vartheta}{\cos^3\vartheta}d\vartheta. \quad . \quad . \quad (6)$$

Um die Intergrierbarkeit dieser Ausdrücke beurteilen zu können, setzen wir mit Euler

$$\varphi(n) = \int\frac{\cos n\vartheta\cdot d\vartheta}{\cos^3\vartheta}, \qquad \psi(n) = \int\frac{\sin n\vartheta\cdot d\vartheta}{\cos^3\vartheta};$$

durch teilweises Integrieren findet man

$$\varphi(n) = \frac{2}{n-3}\,\frac{\sin(n-1)\vartheta}{\cos^2\vartheta} - \frac{n+1}{n-3}\varphi(n-2),$$

$$\psi(n) = -\frac{2}{n-1}\,\frac{\cos(n-1)\vartheta}{\cos^2\vartheta} + \frac{n+1}{n-3}\psi(n-2).$$

Demnach ist die Integration ausführbar für einen gewissen Wert $\bar{n}$ von n, und wird es auch sein für alle Werte von der Form $\bar{n}+2k$; sie ist aber ausführbar für $n=1$; daher ist sie es auch für jedes ungerade n. Direkter erhält man dieses Resultat, wenn man beachtet, dafs aus den obigen Werten dx und dy sich ergiebt

$$\frac{x+iy}{a} = \int\frac{e^{in\vartheta}\cdot d\vartheta}{\cos^3\vartheta} = \int\frac{e^{in\vartheta}\cdot d\vartheta}{\left(\frac{e^{i\vartheta}+e^{-i\vartheta}}{2}\right)^3} = 8\int\frac{e^{i(n+3)\vartheta}\cdot d\vartheta}{(e^{2i\vartheta}+1)^3};$$

setzt man dann $e^{i\vartheta} = t$, so wird

$$\frac{x+iy}{a} = -8i\int(1+t^2)^{-3}t^{n+2}\cdot dt;$$

nun versichert uns die bekannte Theorie der binomischen Differenziale, dafs diese Integrierung ausführbar ist, wenn n eine ungerade Zahl ist. Wir schliefsen daher: **Welchen Wert auch die positive, ungerade Zahl n haben mag** (als positiv kann man n offenbar immer annehmen), **die Gleichungen (6) führen zu einer algebraischen Kurve, deren Bogen durch Parabelbogen ausgedrückt werden kann.**

b) Kurven, die durch Kreisbogen rektifizierbar sind. Die Anwendung des oben dargelegten Verfahrens zur Bestimmung derjenigen Kurven, die durch Kreisbogen rektifiziert werden können, ergab ver-

schiedentlich als Resultat nur den Kreis selbst, und daher wurde Euler veranlaſst, den Satz als wahrscheinlich auszusprechen: „Auſser dem Kreise giebt es keine algebraische Kurve, von der ein beliebiger Bogen sich durch Kreisbogen ausdrücken läſst“[1]). Erneute Versuche und die Anwendung der Polarkoordinaten führten ihn jedoch zu einer neuen Kurve, die von dieser Beschaffenheit ist und ihn von der im obigen Satze ausgesprochenen Meinung abstehen lieſs[2]).

Das Verfahren des groſsen Geometers war folgendes: Wenn ϱ und ω die Polarkoordinaten einer Kurve mit der beschriebenen Eigenschaft sind, so muſs

$$\int \sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\omega^2} = \varphi$$

sein, wobei φ einen Kreisbogen bedeutet; daher ist umgekehrt

$$\omega = \int \frac{\sqrt{d\varphi^2 - d\varrho^2}}{\varrho};$$

erforderlich ist nun, zwischen ϱ und φ eine Beziehung aufzustellen, derart, daſs diese Integration ausführbar werde. Euler setzt

$$\varrho = b + \cos\varphi$$

und erhält

$$\omega = \int \frac{\cos\varphi \cdot d\varphi}{b + \cos\varphi} = \varphi - b \int \frac{d\varphi}{b + \cos\varphi}.$$

Wird nun $t = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi$ gesetzt und die Konstante $b > 1$ angenommen, so findet sich

$$\int \frac{d\varphi}{b + \cos\varphi} = 2\int \frac{dt}{(b+1) + (b-1)t^2} = \frac{2}{\sqrt{b^2-1}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{b-1}{b+1}}\,t\right);$$

demnach ist

$$\omega = \varphi - \frac{2}{\sqrt{b^2-1}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{b-1}{b+1}}\,t\right).$$

Die entsprechende Kurve wird algebraisch sein, wenn $\frac{2b}{\sqrt{b^2-1}}$ eine rationale Zahl ist. Setzt man daher $\frac{b}{\sqrt{b^2-1}} = n$, so kann man schlieſsen: **Welches auch die rationale Zahl n sein möge, die Gleichungen**

$$\varrho = b + \cos\varphi, \qquad \omega = \varphi - \frac{2}{\sqrt{b^2-1}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{b-1}{b+1}}\,t\right),$$

wobei

$$t = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi \qquad \text{und} \qquad b = \frac{n}{\sqrt{n^2-1}},$$

---

1) S. die erste und dritte der in Note 1 (S. 380) citierten Abhandlungen, sowie die erste der in Note 1 des folgenden Kap. angeführten; auſserdem einen Brief Eulers an Lagrange vom 23. März 1775 in *L. Euleri opera postuma* I, S. 588. An jeder dieser Stellen spricht Euler noch den anderen hypothetischen Satz aus: „Es giebt keine Kurve, deren allgemeiner Bogen gleich dem Logarithmus einer beliebigen Funktion ist.“ Ob die Richtigkeit oder Unrichtigkeit dieses Satzes erwiesen, ist uns unbekannt (vgl. *Intermédiaire* VII, 1900, S. 194, und VIII, 1901, S. 182).

2) *De curvis algebraicis, quarum omnes arcus per arcus circulares metiri liceat* (Mém. de St. Pétersb. XI, 1830; vorgelegt 20. Aug. 1781).

stellen in den Polarkoordinaten ϱ und ω eine algebraische Kurve dar, die durch Kreisbogen rektifizierbar ist.

In einer der Akademie der Wissenschaften zu Petersburg am 20. Aug. 1823 vorgelegten Abhandlung hat N. Fufs die Bemerkung gemacht, dafs man zu den obigen Kurven auch gelangt, wenn man die Polargleichung derjenigen Kurven aufsucht, bei denen der Abstand des Poles von der Tangente durch $a\varrho - \varrho^2$ ausgedrückt wird, wo a eine gegebene Länge bedeutet[1]. In der That läfst sich diese Aufgabe alsbald auf folgende Differentialgleichung zurückführen

$$\frac{\varrho^2 \cdot d\omega}{\sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\omega^2}} = a\varrho - \varrho^2;$$

um sie zu integrieren, schreibe man sie folgendermafsen — indem man mit ds das Bogendifferential bezeichnet —

$$\varrho \cdot d\omega = (a - \varrho) ds;$$

Man ersieht dann, dafs, weil

$$ds^2 = d\varrho^2 + (\varrho \cdot d\omega)^2,$$

die vorige Gleichung ergiebt:

$$ds = \frac{d\varrho}{\sqrt{1 - (a - \varrho)^2}};$$

daher ist $\quad s = \arccos(a - \varrho) \quad$ oder $\quad \varrho = a - \cos s; \quad . \quad . \quad . \quad (7)$

die erstere beweist, dafs die gefundene Kurve durch Kreisbogen rektifizierbar ist.

Man hat ferner, infolge der vorhergehenden Formeln

$$d\omega = \frac{a - \varrho}{\varrho} ds = \frac{a - \varrho}{\varrho} \frac{d\varrho}{\sqrt{1 - (a - \varrho)^2}} = a \frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{1 - (a - \varrho)^2}}$$

$$- \frac{d\varrho}{\sqrt{1 - (a - \varrho)^2}} = a \frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{1 - (a - \varrho)^2}} - ds$$

daher:

$$\omega + s = a \int \frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{1 - (a - \varrho)^2}}.$$

Es ergiebt sich nun, wenn $a > 1$, und wenn man

$$t = \sqrt{\frac{1 - a + \varrho}{1 + a - \varrho}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

setzt, dafs

$$\omega + s = \frac{2a}{\sqrt{a^2 - 1}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a + 1}{a - 1}}\, t\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Diese Gleichungen im Verein mit (7) und (8) stellen die gesuchte Kurve dar und zeigen, dafs sie von der Euler'schen nicht verschieden ist.

---

1) *De curvis algebraicis, quarum singuli arcus arcubus circularibus aequantur* (Mém. de St. Pétersb. XI, 1830).

Diese ist nun ein ganz spezieller Fall einer sehr ausgedehnten Klasse von rationalen Kurven, die J. A. Serret in seiner *Mémoire sur les courbes algébriques dont les arcs s'expriment par des arcs de cercle* (Journ. de l'Éc. polyt. XXXV, 1853) kennen gelehrt hat. Wenn wir es für überflüssig erachten, uns hier mit der Kenntnisgabe derselben aufzuhalten, so liegt dies daran, dafs eben Serret selbst dieselben sozusagen popularisiert hat, dadurch, dafs er sie in zwei seiner bekanntesten Lehrbücher dargelegt hat[1]).

c) Kurven, die vermittelst Hyperbelbogen rektifizierbar sind. Eine Untersuchung solcher Kurven wurde von N. Fufs angestellt, der dazu ohne Zweifel durch die Ideen Euler's veranlafst wurde[2]). Man betrachte eine Hyperbel, deren Potenz k^2 und deren Asymptoten den Winkel α bilden. Nehmen wir dann ein orthogonales kartesisches Koordinatensystem, dessen Anfang der Mittelpunkt der Hyperbel und dessen x-Axe, die eine Asymptote ist, so kann die Hyperbel selbst durch die Gleichungen dargestellt werden

$$x = \frac{k^2}{v} + v\cos\alpha, \qquad y = v\sin\alpha,$$

daher ist

$$\frac{ds}{dv} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2} = \frac{1}{v^2}\sqrt{k^4 - 2k^2v^2\cdot\cos\alpha + v^4};$$

und wenn man $v = z^{\frac{n}{2}}$ setzt, hat man

$$ds = \frac{n\cdot dz}{2z^{\frac{n+2}{2}}}\sqrt{k^4 - 2k^2z^n\cdot\cos\alpha + z^{2n}};$$

sucht man nun zwei Funktionen p und q von z auf, derart, dafs identisch

$$p^2 + q^2 = k^4 - 2k^2z^n\cdot\cos\alpha + z^{2n} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

ist, so bekommt man, wenn man noch setzt

$$x = \frac{n}{2}\int\frac{p\cdot dz}{z^{\frac{n+2}{2}}}, \qquad y = \frac{n}{2}\int\frac{q\cdot dz}{z^{\frac{n+2}{2}}},$$

eine Kurve, die vermittelst Hyperbelbogen rektifizierbar ist. Nun läfst sich die rechte Seite von (10) in $2n$ lineare Faktoren zerlegen, die zu je zweien konjugiert sind; man bilde das Produkt von n derselben, von denen nicht zwei einander konjugiert sind; es sei $\varphi(z) + i\psi(z)$ dieses Produkt, dann ist das der anderen $\varphi(z) - i\psi(z)$ Setzt man also $p + qi = \varphi(z) + i\psi(z)$, so wird $p - qi = \varphi(z) - i\psi(z)$ und Gleichung (10) wird damit befriedigt werden. Es ist also hin-

1) *Cours d'algèbre supérieure,* 4. Aufl. I. (Paris 1877) S. 511—515; *Cours de calcul différential et intégral,* 2. Aufl., II. (Paris 1880) S. 248—259.

2) *De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudinem per arcus hyperbolicos metiri licet* (Nova Acta Petrop. XIV, Petersburg 1805).

reichend, $p = \varphi(z)$ und $q = \psi(z)$ zu nehmen. Berücksichtigt man noch das beliebige Element bei der Bildung des Produktes φ, so sieht man, dafs man im allgemeinen $\sum_{k=2}^{k=n-1} \binom{n}{k} = 2^n - 2$ Kurven erhält, welche den Bedingungen des Problems genügen; läfst man nun n variieren, so bekommt man deren unzählig viele.

Siebzehntes Kapitel.

Algebraische Kurven, die durch Ellipsenbogen rektifizierbar sind. Die Kurven von Serret.

167. Weitere Anwendungen der in Nr. **165** dargelegten Methoden wurden von Euler auf solche Kurven gemacht, die durch Ellipsenbogen rektifiziert werden können[1]). In diesem Falle müfste man (unter Beibehaltung der in Nr. **165** angewandten Bezeichnungen) setzen
$$V = \frac{\sqrt{1 + (k^2 - 1)v^2}}{\sqrt{1 - v^2}};$$
und daher
$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = dv \frac{\sqrt{1 + (k^2 - 1)v^2}}{\sqrt{1 - v^2}};$$
dieser Gleichung wird Genüge geleistet, wenn man setzt
$$dx = \frac{p + q}{\sqrt{2(1 + v)}} dv, \qquad dy = \frac{p - q}{\sqrt{2(1 - v)}} dv,$$
vorausgesetzt, dafs die Funktionen p und q von v identisch der Beziehung genügen
$$p^2 + q^2 - 2pqv = 1 + (k^2 - 1)v^2.$$
Z. B. kann man $p = 1$, $q = (k + 1)v$ nehmen und erhält so
$$dx = \frac{1 + (k + 1)v}{\sqrt{2(1 + v)}} dv, \qquad dy = \frac{1 - (k + 1)v}{\sqrt{2(1 - v)}} dv,$$
daher ist
$$x = \frac{1}{3}\left[1 - 2k + (k + 1)v\right]\sqrt{2(1 + v)},$$
$$y = \frac{1}{3}\left[2k - 1 + (k + 1)v\right]\sqrt{2(1 - v)},$$
womit eine Kurve sechster Ordnung dargestellt ist. — Dieselbe Frage läfst sich in verschiedener Weise behandeln[2]). Die Gleichungen

---

1) *De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudinem per arcus ellipticos metiri licet* (Nova acta Petrop. V, 1789, vorgelegt am 10. Juni 1776).

2) Euler, *De lineis curvis, quarum rectificatio per datam quadraturam mensuratur* (L. Euleri Opera postuma I, Petropoli, 1862, S. 439—452).

$$dx = \sqrt{1 + \frac{m^2 z^2}{1 - z^2}} \cos\varphi \cdot dz, \qquad dy = \sqrt{1 + \frac{m^2 z^2}{1 - z^2}} \sin\varphi \cdot dz$$

stellen offenbar eine durch Ellipsenbogen rektifizierbare Kurve dar, wenn $\varphi = \varphi(z)$ in der Art bestimmt ist, dafs x und y in endlichen Ausdrücken erhalten werden können. Um dies einzusehen, setze man $z = \sin\vartheta$; die vorigen Gleichungen werden dann:

$$dx = \sqrt{\cos^2\vartheta + m^2 \sin^2\vartheta} \cos\varphi \cdot d\vartheta,$$
$$dy = \sqrt{\cos^2\vartheta + m^2 \sin^2\vartheta} \sin\varphi \cdot d\vartheta.$$

Man stelle nun zwischen ϑ und einem neuen Winkel ω die Beziehung auf, dafs

$$\operatorname{tg}\omega = m \operatorname{tg}\vartheta; \quad \text{daher ist} \quad \frac{d\omega}{\cos^2\omega} = m \frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta},$$

und man erhält:

$$dx = \frac{\cos\vartheta \cdot \cos\varphi}{\cos\omega} \cdot d\vartheta, \qquad dy = \frac{\cos\vartheta \cdot \sin\varphi}{\cos\omega} \cdot d\vartheta.$$

Setzen wir daher $\varphi + \omega = n\vartheta$ und eliminieren φ und ω, so ergiebt sich

$$dx = d\vartheta \left[\cos\vartheta \cdot \cos n\vartheta + m \sin\vartheta \cdot \sin n\vartheta\right],$$
$$dy = d\vartheta \left[\cos\vartheta \cdot \sin n\vartheta - m \sin\vartheta \cdot \sin n\vartheta\right].$$

Integriert man, so findet sich, abgesehen von unwichtigen Konstanten,

$$x = \frac{m+1}{n-1} \sin(n-1)\vartheta - \frac{m-1}{n+1} \sin(n+1)\vartheta,$$
$$y = -\frac{m+1}{n-1} \cos(n-1)\vartheta + \frac{m-1}{n+1} \cos(n+1)\vartheta.$$

Diese Gleichungen stellen nun (vgl. Kap. 9 des folgenden Abschn.) Epicykloiden dar, die algebraisch sind, wenn n eine rationale Zahl ist; **folglich sind alle algebraischen Epicykloiden rektifizierbar durch Ellipsenbogen.**

168. Die Untersuchung der durch elliptische Integrale rektifizierbaren Kurven beschäftigte aufser Euler auch Legendre[1]), der eine Kurve sechster Ordnung mit dieser Eigenschaft fand; ferner J. A. Serret, der sich die Aufgabe stellte, alle rationalen Kurven mit dieser Eigenschaft zu bestimmen; er betrachtete dieses Problem als

1) *Traité des fonctions elliptiques* I. (Paris 1827) S. 35. — Die Legendre'sche Kurve 6ter Ordnung wird durch die Gleichungen dargestellt:

$$x = h \sin\varphi \left(1 + \frac{m}{3} \sin^2\varphi\right), \qquad y = bh \cos\varphi \left(1 + m - \frac{m}{3} \cos^2\varphi\right),$$

wo

$$m = \frac{3k^2}{1 - k^2}, \qquad h = \frac{1 - 2k^2}{b^2};$$

infolgedessen ist

$$s = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} - \frac{k^2}{b^2} \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \Delta(\varphi).$$

Spezialfall der Bestimmung zweier Funktionen $x(z), y(z)$, die der Bedingung genügen

$$dx^2 + dy^2 = Z dz^2,$$

wo Z eine rationale Funktion von z ist[1]). Wird

$$Z = \frac{c^2 z^{2n}}{\sqrt{(z-a)(z-\alpha)\cdot(z-b)(z-\beta)}}$$

gesetzt, wo a und α, b und β zwei Paare konjugiert imaginärer Zahlen sind, so geht die Aufgabe auf die von Euler schon behandelte zurück. Da in diesem Falle der Kurvenbogen s ein elliptisches Integral der Variabeln z wird, so ist z eine doppeltperiodische Funktion von s, demnach werden auch x und y doppeltperiodische Funktionen des Bogens sein. **Die Kurven von Serret erfreuen sich also der Eigentümlichkeit, dafs ihre Koordinaten doppeltperiodische Funktionen des Bogens sind**; es läfst sich beweisen, dafs sie die allgemeinsten rationalen Kurven von dieser Eigenschaft sind[2]). Wir können uns hier weder mit dem Beweise des Satzes aufhalten, noch mit der Wiedergabe der feinsinnigen Betrachtungen, die Serret angestellt hat, um die Gleichungen unzähliger Kurven mit der obigen Eigenschaft zu erhalten, noch des Verfahrens, durch welches Liouville die Tragweite der von jenem erhaltenen Schlufsfolgerungen noch erweiterte[3]). Wir beschränken uns darauf, folgenden Satz wiederzugeben, der einen kleinen Teil jener Schlufsfolgerungen zusammenfafst: „Wenn man mit x, y die Koordinaten eines Kurvenpunktes bezeichnet, und man setzt

$$x + iy = Ce^{i\omega} \int \frac{(z-a)(z+a)^n}{(z-\alpha)^2(z+\alpha)^{n+1}} dz$$

oder

$$x + iy = Ce^{i\omega} \frac{(z+a)^{n+1}}{(z-\alpha)(z+\alpha)^n} + Const.,$$

wo C und ω beliebige Konstanten sind, a und α komplexe konjugierte Zahlen sind und n eine reelle Zahl, die mit jenen Konstanten durch die Gleichung $\frac{(a+\alpha)^2}{4a\alpha} = \frac{n}{n+1}$ verbunden ist, so erhält man die parametrische Darstellung einer rationalen Kurve, deren Bogen durch $C\int \frac{dz}{\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-\alpha^2)}}$ ausgedrückt wird.“ Alle so entstehenden Kurven

1) *Mémoire sur la rappresentation des fonctions elliptiques et hyperelliptiques* (Liouvilles Journ. X, 1845); *Développements sur une classe d'équations relatives à la représentation géométrique des fonctions elliptiques* (Das.); *Notes sur les courbes elliptiques de première classe* (Das.); *Théorie géométrique de la lemniscate et des courbes elliptiques de la première classe* (Das. XI, 1846). Vgl. auch Serret, *Cours de calcul différentiel et intégral* II. 2. Aufl. (Paris 1880) S. 264—269.

2) Krohs, *Die Serret'schen Kurven sind die einzigen algebraischen vom Geschlechte Null, deren Koordinaten eindeutige doppelt-periodische Funktionen des Bogens der Kurve sind* (Dissert. Halle a. S., 1891).

3) Liouvilles Journ. X, 1845, S. 351—363.

bilden das, was Serret erste Klasse der elliptischen Kurven nannte; sie sind Verallgemeinerungen der Lemniskate, welche Kurve man erhält, indem man $n = 1$ setzt. Serret selber machte die Bemerkung, dafs es „pour ces courbes une mode de génération de suprème élégance" giebt, „qui peut servir à definir les courbes elliptiques de la première classe, dont la théorie deviendra, dès lors entièrement indépendente des considérations analytiques, qui les ont fait découvrir." Unsere nun folgenden Auseinandersetzungen werden die Richtigkeit dieser Ansicht darthun und die geometrische Bedeutung der Serret'schen Kurven erster Klasse aufser Frage setzen.

„Gegeben sind ein fester Punkt O und eine feste Gerade r, die wir als durch O gehend annehmen können (Taf. XIII, Fig. 99); aufserdem ist eine Strecke a und eine reelle positive Zahl n gegeben. Ein veränderliches Dreieck OPM hat eine Ecke in O und die beiden Seiten OP und OM von konstanter Länge und zwar $OP = a\sqrt{n}$, $PM = a\sqrt{n+1}$; sind nun die Winkel $POM = \alpha$, $PMO = \beta$, mit dem Winkel φ, den die Seite OM des beweglichen Dreiecks mit der festen Geraden r bildet, durch die Relation verknüpft:

$$\pm\varphi = n\alpha - (n+1)\beta, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

so ist der geometrische Ort des Punktes M eine elliptische Kurve erster Klasse." Um dies zu beweisen, nehmen wir der Einfachheit halber an, dafs $a = 1$; wird $OM = \varrho$ gesetzt, so ergiebt das Dreieck OMP:

$$\cos\alpha = \frac{\varrho^2 - 1}{2\varrho\sqrt{n}}, \qquad \cos\beta = \frac{\varrho^2 + 1}{2\varrho\sqrt{n+1}}, \quad \ldots \quad (2)$$

oder aber

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{\triangle}{2\varrho\sqrt{n}}, \qquad \sin\beta = \frac{\triangle}{2\varrho\sqrt{n+1}}, \\ \text{wo} \quad \triangle &= \sqrt{-\varrho^n + 2(2n+1)\varrho^2 - 1}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2')$$

daraus folgt dann

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}. \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Nehmen wir O als Pol und r als Polaraxe, so ergiebt sich die Polargleichung des Ortes der Punkte M durch Elimination der Winkel α, β aus der Gleichung (1) und den Gleichungen (2) oder (2′). Die Elimination läfst sich ausführen, wenn n rational ist, und zeigt dann, dafs die resultierende Kurve algebraisch wird.

Ist z. B. $n = 1$, so hat man der Reihe nach

$$\pm\varphi = \alpha - 2\beta, \qquad \cos\varphi = \cos\beta\cdot\cos(\alpha-\beta) + \sin\beta\cdot\sin(\alpha-\beta),$$

$$\cos\alpha = \frac{\varrho^2-1}{2\varrho}, \qquad \sin\alpha = \frac{\sqrt{-\varrho^4+6\varrho^2-1}}{2\varrho}; \qquad \cos\beta = \frac{\varrho^2+1}{2\sqrt{2}\varrho},$$

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{-\varrho^4+6\varrho^2-1}}{2\varrho\sqrt{2}}, \qquad \sin(\alpha-\beta) = \frac{\sqrt{-\varrho^4+6\varrho^2-1}}{2\sqrt{2}\varrho},$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \frac{3\varrho^2-1}{2\sqrt{2}\varrho^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{\varrho^4+4\varrho^2-1}{4\varrho^3};$$

zu kartesischen Koordinaten übergehend erhält man die Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 - 4x(x^2 + y^2) + 4(x^2 + y^2) - 1 = 0,$$

welche eine Lemniskate darstellt.

Kehren wir jetzt zu dem allgemeinen Falle zurück, um zu bemerken, dafs aus der Gleichung (2') durch Differenziation und darauf folgende Anwendung von (2) sich ergiebt:

$$\frac{d\alpha}{\cos\beta} = \frac{-2\,d\varrho}{\sqrt{n+1}\,\triangle}; \quad \frac{d\beta}{\cos\alpha} = \frac{-2\,d\varrho}{\sqrt{n}\,\triangle} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

und diese beiden, kombiniert mit (1), führen zu der Gleichung

$$\pm\, d\varphi = \frac{\varrho^2 - (2n+1)}{\triangle}\,\frac{d\varrho}{\varrho}, \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

und weil im allgemeinen

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2,$$

so ist im vorliegenden Falle

$$\pm\, ds = \frac{2\sqrt{n(n+1)}}{\triangle}\cdot d\varrho; \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Unter Benutzung von (4) können wir auch schreiben

$$\pm\, ds = \sqrt{n}\,\frac{d\alpha}{\cos\beta} = \sqrt{n+1}\,\frac{d\beta}{\cos\alpha}. \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Zweckmäfsig setzt man nun $k = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$; Gleichung (3) wird dann $\sin\beta = k\sin\alpha$, und die Gleichung (7) liefert uns dann

$$\pm\, ds = \sqrt{n}\,\frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha}}; \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

diese zeigt uns, dafs der Kurvenbogen s des Ortes der Punkte M durch ein elliptisches Integral I. Gattung ausgedrückt wird; w. z. b. w.

Die voraufgehenden Formeln lassen auch einige Eigenschaften der betrachteten Kurven deutlich erkennen. Man hat nämlich

$$\text{Dreieck } OMP = \frac{1}{2}\sqrt{n}\sqrt{n+1}\cdot\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{4}\triangle;$$

$$\frac{1}{2}\int \varrho^2\cdot d\varphi = \frac{1}{4}\int \frac{4\varrho^3 - 4(2n+1)\varrho}{2\triangle}\cdot d\varrho = \frac{1}{4}\triangle + Const.$$

Folglich: **Die Fläche des Kurvensektors, gerechnet von der Polaraxe aus, ist gleich dem Inhalte des erzeugenden Dreiecks, wenn dieses eine Ecke im Endpunkte des Bogens jenes Sektors gelegen hat.** Aufserdem folgt aus (2) und (2')

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{\triangle}{2\sqrt{n(n+1)}}, \qquad \cos(\alpha+\beta) = \frac{\varrho^2 - (2n+1)}{2\sqrt{n(n+1)}},$$

oder wegen (6) und (7)

$$\sin(\alpha+\beta) = \pm\frac{ds}{d\varrho}, \qquad \cos(\alpha+\beta) = \pm\,\varrho\frac{d\varrho}{ds},$$

und dies zeigt, **dafs die Neigung der Normalen gegen den Radius vector gleich dem Winkel $\alpha + \beta$ ist, oder gleich seinem Supplementwinkel.** Wenn man also, im ersten Falle, den Winkel $PMN = \sphericalangle POM$ macht, so wird MN die Kurvennormale in M sein. Andererseits ist MN die Tangente in M an den dem Dreiecke MOP umbeschriebenen Kreis; daher wird die Gerade, welche M mit dem Centrum C dieses Kreises verbindet, Tangente in M an die fragliche Kurve sein. Im Falle, dafs der Neigungswinkel der Normalen gegen den Radius vector $= \pi - (\alpha + \beta)$ wäre, müfste man das zu OMP in Bezug auf M symmetrische Dreieck betrachten, um die vorigen Schlufsfolgerungen zu erweitern, und gelangt so leicht zu dem Resultate: **Ist ein fester Punkt O gegeben und variiert das Dreieck OMP in der Weise, dafs immer $OM = a\sqrt{n}$, $MP = a\sqrt{n+1}$, und dafs aufserdem die unendlich kleine Verschiebung MM' des Punktes M immer in der Richtung geschieht, die den Punkt M mit dem Mittelpunkte des dem Dreiecke umbeschriebenen Kreises verbindet, so erzeugt der Punkt M eine zur Zahl n gehörige elliptische Kurve I. Spezies.**

Aus dem Vorhergehenden kann man entnehmen, dafs der Winkel ε zwischen der Kurvennormale und der Polaraxe durch $\varepsilon = \varphi - (\alpha + \beta)$ gegeben wird. Demnach ist der Kontingenz-Winkel gegeben durch $d\varepsilon = d\varphi - (d\alpha + d\beta) = (n-1)d\alpha - n d\beta$, oder

$$d\varepsilon = \frac{3\varrho^3 - (2n+1)}{\Delta} \frac{d\varrho}{\varrho};$$

daraus folgt, dafs der Krümmungsradius R gegeben ist durch

$$R = \frac{2\sqrt{n(n+1)} \cdot \varrho}{3\varrho^2 - (2n+1)};$$

die Wendepunkte der fraglichen Kurve liegen daher auf dem Kreise um O mit dem Radius $\sqrt{\frac{2n+1}{3}}$ [1]).

Achtzehntes Kapitel.

Algebraische Kurven, die vermittelst Lemniskatenbogen rektifizierbar sind. Die Sinusspiralen.

169. Da die Lemniskate durch spezielle elliptische Funktionen rektifizierbar ist, so ist die Untersuchung derjenigen Kurven, die durch Lemniskatenbogen rektifizierbar sind, nur ein spezieller Fall der im vorigen Kapitel behandelten. Dennoch lohnt es der Mühe, sich mit

1) Bezügl. weiterer Untersuchungen über die elliptischen Kurven s. L. Kiepert, *De curvis, quarum arcus integralibus ellipticis primi generis exprimitur* (Dissert. Berlin, 1870).

diesen besonders zu beschäftigen, um zu zeigen, wie Euler hierauf die Betrachtungen in Nr. **165** angewendet hat[1]). Es ist klar, dafs die Gleichungen

$$dx = \frac{a^2 \cdot dz}{\sqrt{a^4 - z^4}} \cos\varphi, \qquad dy = \frac{a^2 \cdot dz}{\sqrt{a^4 - z^4}} \sin\varphi$$

eine der gesuchten Kurven darstellen, wofern nur $\varphi = \varphi(z)$ in geeigneter Weise gewählt wird. Um diese Wahl zu definieren, setzen wir

$$z^2 = a^2 \sin\vartheta;$$

wir erhalten dann

$$\frac{2dx}{a} = \frac{\cos\varphi \cdot d\vartheta}{\sqrt{\sin\vartheta}}, \qquad \frac{2dy}{a} = \frac{\sin\varphi \cdot d\vartheta}{\sqrt{\sin\vartheta}};$$

nehmen wir aufserdem an, dafs $\varphi = n\vartheta$, so ergiebt sich

$$x = \frac{a}{2}\int \frac{\cos n\vartheta \cdot d\vartheta}{\sqrt{\sin\vartheta}}, \qquad y = \frac{a}{2}\int \frac{\sin n\vartheta \cdot d\vartheta}{\sqrt{\sin\vartheta}}. \quad . \quad . \quad (1)$$

Um die Integrierbarkeit dieser Formeln beurteilen zu können, setzen wir

$$\varphi(n) = \int \frac{\cos n\vartheta \cdot d\vartheta}{\sqrt{\sin\vartheta}}, \qquad \psi(n) = \int \frac{\sin n\vartheta \cdot d\vartheta}{\sqrt{\sin\vartheta}};$$

integrieren wir nun teilweise, so erhalten wir folgende Reduktionsformeln:

$$\varphi(n) = \frac{4}{2n-1}\sqrt{\sin\vartheta} \cdot \cos(n-1)\vartheta + \frac{2n-3}{2n-1}\varphi(n-2),$$

$$\psi(n) = \frac{4}{2n-1}\sqrt{\sin\vartheta} \cdot \sin(n-1)\vartheta + \frac{2n-3}{2n-1}\psi(n-2),$$

die beweisen, dafs, wenn die Integration für einen gewissen Wert $\bar{n}$ von n ausführbar ist, sie für alle Werte $\bar{n} + 2k$ es ist. Überdies kann die Untersuchung der Integrierbarkeits-Bedingung auch ausgeführt werden, indem man der Reihe nach aus (1) folgende Gleichungen ableitet:

$$\frac{2(x+iy)}{a} = \int \frac{e^{in\vartheta} \cdot d\vartheta}{\sqrt{\dfrac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i}}} = \sqrt{2i}\int \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta} \cdot d\vartheta}{\sqrt{e^{2i\vartheta} - 1}};$$

setzen wir nun

$$e^{i\vartheta} = t,$$

so können wir schreiben

$$\frac{2(x+iy)}{a} = \frac{\sqrt{2i}}{i}\int t^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} \cdot (t^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot dt;$$

wendet man nun die Theorie der binomischen Differentiale an, so sieht man: damit die Integration ausführbar sei, mufs n von der Form $2k + \frac{1}{2}$ sein. Demnach: **Wenn $n = 2k + \frac{1}{2}$, so stellen**

---

1) *De lineis curvis quarum rectificatio per datam quadraturam mensuratur* No. 7—13 (L. Euleri opera postuma I, Petropoli 1862).

die Formeln (1) eine algebraische Kurve dar, die durch Lemniskatenbogen rektifizierbar ist.

Die Rektifikation der Lemniskate hat jedoch noch in ganz anderer Weise zu neuen algebraischen Kurven geführt, zu denjenigen nämlich, mit denen wir jetzt unsere Leser bekannt machen wollen.

170. Erinnern wir uns der Definition der Euler'schen Integrale I. und II. Spezies

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} \cdot dx, \qquad \Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} \cdot dx,$$

sowie der sie verknüpfenden Relation

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

und setzen hierin $x = \sin^2 \omega$, $p = \frac{m}{2}$, $q = \frac{n}{2}$, so erhalten wir die Identität

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1}\omega \cdot \cos^{n-1}\omega \cdot d\omega = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}. \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Unter der Voraussetzung, dafs $m = n$, und wenn man $2\omega = \vartheta$ setzt, bekommt man

$$\int_0^{\pi} \sin^{m-1}\vartheta \cdot d\vartheta = 2^{m-1} \frac{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma(m)};$$

und da man leicht einsieht, dafs

$$\int_0^{\pi} \sin^{m-1}\vartheta \cdot d\vartheta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1}\vartheta \cdot d\vartheta,$$

so schliefst man, dafs

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1}\vartheta \cdot d\vartheta = 2^{m-2} \frac{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma(m)} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Nachdem dieses vorausgeschickt, holen wir die Polargleichung der Lemniskate hervor

$$\varrho^2 = \frac{(2a)^2}{2} \cos 2\omega; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

bezeichnet s den Bogen dieser Kurve, so haben wir

$$\left(\frac{ds}{d\omega}\right)^2 = \varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2 = \frac{2a^2}{\cos 2\omega}, \quad \text{und} \quad s = a\sqrt{2}\int (\cos 2\omega)^{-\frac{1}{2}} \cdot d\omega.$$

Der Gesamtumfang s_2 der Lemniskate ist das Vierfache vom Werte dieses Integrals, genommen zwischen den Grenzen $\omega = 0$ und $\omega = \frac{\pi}{4}$; demnach ist

$$s_2 = 4a\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2\omega)^{-\frac{1}{2}} \cdot d\omega,$$

oder wenn $2\omega = \vartheta$ gesetzt wird

$$s_2 = 2a\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\vartheta)^{-\frac{1}{2}} \cdot d\vartheta;$$

wenden wir nun die Gleichung (3) an, so ergiebt sich

$$s_2 = a\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Dies liefert den Gesamtumfang der Lemniskate, ausgedrückt durch Euler'sche Integrale I. Spezies. J. A. Serret, der diesen beachtenswerten Ausdruck gefunden, hat bemerkt, dafs die Lemniskate zu einer ganzen Klasse von Kurven mit dieser Eigenschaft gehöre[1]). Es sind dieses — wenn n eine ganze positive Zahl ist — die Kurven mit der Polargleichung:

$$\varrho^n = \frac{(2a)^n}{2} \cos n\omega. \text{ }^{2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Setzen wir hierin $n = 1$, so erhalten wir den Kreis mit dem Durchmesser a, dessen Umfang $s_1 = \pi a$ ausgedrückt wird durch die der Gleichung (5) analoge:

$$s_1 = a\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}.$$

Im allgemeinen Falle liefert Gleichung (6)

$$s = 2^{1-\frac{1}{n}} a\int (\cos n\omega)^{\frac{1}{n}-1} \cdot d\omega.$$

Den Gesamtumfang s_n der Kurve bekommt man, wenn man den Wert dieses Integrales, genommen zwischen den Grenzen $\omega = 0$ und $\omega = \frac{\pi}{2}$, mit $2n$ multipliziert; er ist daher

$$s_n = 2n \cdot 2^{1-\frac{1}{n}} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} (\cos n\omega)^{\frac{1}{n}-1} \cdot d\omega;$$

setzen wir nun $n\omega = \vartheta$, so wird er zu

$$s_n = 2^{2-\frac{1}{n}} \cdot a\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\vartheta)^{\frac{1}{n}-1} \cdot d\vartheta,$$

---

1) *Note sur les intégrales eulériennes de seconde espèce* (Liouvilles Journ. VII, 1842).

2) Nach Nr. **155** besitzen sie n Symmetrieaxen. Es ist leicht einzusehen, dafs ihre Ordnung $2n$ ist; wäre n negativ, so würde die Ordnung $-n$ sein; (vgl. S. 400).

und daher mit Benutzung von (3)

$$s_n = a \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

welche Gleichung vollständig analog zu (5) ist, und sich mit dieser identifiziert, wenn $n = 2$.

Wir können noch hinzufügen, dafs man verwandte Ausdrücke für die Fläche der Kurve (6) aufstellen kann[1]. Da nämlich die Fläche eines Sektors gegeben ist durch

$$\frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{2(n-1)}{n}} \cdot a^2 \int (\cos n\omega)^{2n} \cdot d\omega,$$

so ist die ganze von der Kurve umschlossene Fläche S_n gleich dem $2n$-fachen dieses Ausdruckes, genommen zwischen den Grenzen $\omega = 0$ und $\omega = \frac{\pi}{2n}$; also

$$S_n = n \cdot 2^{\frac{2(n-1)}{n}} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2n}} (\cos n\omega)^{\frac{2}{n}} \cdot d\omega;$$

setzen wir nun $n\omega = \vartheta$ und benutzen (3), so ergiebt sich:

$$S_n = 2^{\frac{2(n-1)}{n}} \cdot a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\vartheta)^{\frac{2}{n}} \cdot d\vartheta = 2a^2 \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n} + 1\right)}.$$

Es ist aber

$$\Gamma\left(\frac{1}{n} + 1\right) = \frac{2}{n}\Gamma\left(\frac{2}{n}\right); \quad \Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{2}{n}-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}$$

und daher

$$S_n = 2^{\frac{2(n-2)}{n}} n\pi a^2 \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

welches eben der angekündigte Ausdruck ist. Für $n = 1$ bekommt man $S_1 = \frac{\pi a^2}{4}$, also die Fläche des Kreises mit dem Durchmesser a; für $n = 2$, $S_2 = 2a^2$, die Fläche der Lemniskate (vgl. Nr. 94). — Die Gleichungen (7) und (8) zeigen, dafs die durch die Gl. (6) dargestellten Kurven zur Darstellung der Euler'schen Integrale II. Spezies dienen können, sowohl durch ihre Fläche als auch durch ihren Umfang.

171. Schon vor Serret wurden dieselben Kurven von Maclaurin[1] betrachtet und untersucht; nach ihm wurden so viele schöne

1) G. Loria, *Integrali euleriani e spirali sinusoidi* (Prager Ber., 1897).

2) *Traité des fluxions, trad. Pezenas* (Paris 1747) S. 264 u. 285.

Eigenschaften an ihnen entdeckt, daſs man es für angebracht hielt, sie mit einem besonderen Namen zu bezeichnen: den Vorzug giebt man allgemein dem Namen Sinusspiralen (spirales sinusoïdes), der von Hâton de la Goupillière erdacht wurde[2]) und den wir annehmen wollen, ohne über seine Trefflichkeit zu diskutieren[3]); die Zahl n nennt man den Index der Kurve.

Setzt man in der Gleichung (6)

$$\varrho = \frac{k^2}{\varrho_1}, \qquad \omega = \omega_1,$$

so erhält man

$$\varrho_1^{-n} = \frac{1}{2}\left(\frac{k^2}{2a}\right)^{-n} \cos(-n)\omega_1;$$

Daraus folgt: **Die Inverse einer Sinusspirale ist eine zweite Sinusspirale.**

Wir wollen jetzt die hauptsächlichsten Sätze über die Sinusspiralen angeben, nachdem wir die Bemerkung voraufgeschickt haben, daſs es von nun an nicht mehr wie im vorigen notwendig ist, anzunehmen, daſs die Zahl n ganz und positiv sei; allerdings ist die entsprechende Kurve nur dann algebraisch, wenn n rational ist[3]).

Wenn μ der Winkel der Kurventangente mit dem Radius vector ist, so hat man im allgemeinen $\operatorname{tg}\mu = \varrho : \frac{d\varrho}{d\omega}$, daher wegen Gl. (6)

$$\operatorname{tg}\mu = -\operatorname{ctg} n\omega, \quad \text{oder auch} \quad \mu = \frac{\pi}{2} + n\omega;$$

dies besagt: **Wenn bei einer Sinusspirale der Radius vector gleichförmig um den Pol rotiert, so dreht sich die Tangente gleichförmig um den Berührungspunkt**; daher rührt der Name Linien proportionaler Krümmung, mit welchem unsere Kurven zuweilen bezeichnet werden[4]). Es ist natürlich gestattet in dem obigen Satze das Wort „Tangente“ durch „Normale“ zu ersetzen; daher entsteht die Vermutung,

---

1) *Note sur les courbes que représent l'équation* $\varrho^n = A \sin n\omega$ (Nouv. Ann. 2. Ser. XV, 1876). Dort sowohl, als auch in den neueren *Notes bibliographiques* (Das. 3. Ser. XVII, 1898) wird der Leser viele bibliographische Daten über die fraglichen Kurven finden. Wahrscheinlich hat Hâton den Namen „spirale sinusoïde“ vorgeschlagen, indem er eine von T. Olivier in seinem *Cours de géométrie descriptive* gegebene Bezeichnung erweiterte (Paris 1854, II. Aufl. S. 293).

2) Ribaucour (*Etudes sur les élassoides* etc. Belg. Mém. XLIV, 4°, 1881) wandte dagegen den Namen Lamé'sche Spiralen an, um daran zu erinnern, daſs dieser groſse Geometer schon 1836 (Liouvilles Journ. I, S. 86) über sie geschrieben hat; die Benennung Orthogénide rührt von Allegret her (*Mémoire sur la rapresentation des transcendentes par des arcs de courbes*, Ann. de l'Éc. norm. sup. 2e Ser. II, 1873, S. 167).

3) Die Ordnung der Kurve kann in diesem Falle durch das in Nr. 135 angewandte Verfahren gefunden werden.

4) Laquière, *Quelques propriétés d'une classe des courbes spirales* (Nouv. Ann. 3e Ser. II, 1883), wo der Name spirales à inflexion proportionelle angewandt wird.

dafs die Sinusspiralen die vom Grafen von Fagnano vergeblich gesuchten Kurven seien[1]), welche die Eigenschaft haben, „dafs die Winkel, welche die von einem festen Punkte ausgehenden Sehnen mit der Axe bilden, in einem konstanten Verhältnisse stehen zu den Winkeln, welche die Normalen in den Endpunkten der Sehnen mit derselben Axe bilden.“ Dafs diese Vermutung sich mit der Wirklichkeit deckt, kann man durch folgende kurze Rechnung zeigen[2]). Nennen wir ϱ, ω die Koordinaten eines Punktes M der gesuchten Kurve, μ den Winkel der zugehörigen Tangente mit dem Radius vector im Berührungspunkte und k den Wert des konstanten Verhältnisses, so ergeben die Bedingungen des Problems (vgl. Fig. 100 auf Taf. XIII) die Gleichung

$$k\omega = \omega + \frac{\pi}{2} - \mu \quad \text{oder} \quad (k-1)\omega = \frac{\pi}{2} - \mu;$$

daraus folgt

$$\operatorname{ctg}(k-1)\omega = \operatorname{tg}\mu = \varrho : \frac{d\varrho}{d\omega}.$$

Schreiben wir diese Gleichung wie folgt

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \operatorname{tg}(k-1)\omega \cdot d\omega,$$

so sind die Variabelen getrennt, und durch Integrieren ergiebt sich

$$\log\varrho + \frac{1}{k-1}\log\cos(k-1)\omega = c,$$

oder auch

$$\varrho^{1-k} = c^{1-k}\cos(1-k)\omega.$$

Somit ist, da diese Gleichung von der Form (6) ist, bewiesen, dafs die Kurven des Fagnano Sinusspiralen sind.

Wenn n eine ganze Zahl ist, so können unsere Kurven noch in anderer Weise definiert werden. Es seien $ae^{\frac{2ik\pi}{n}}$ $(k = 0, 1, 2 \ldots . n-1)$ die n komplexen Zahlen, welche die Ecken A_k eines regelmäfsigen Vielecks darstellen, $\varrho e^{i\omega}$ die einem Punkte M der Ebene entsprechende Zahl, dann ist

$$\overline{A_0M}^2 \cdot \overline{A_1M}^2 \ldots . . \overline{A_{n-1}M}^2 =$$

$$\prod_{k=0}^{k=n-1}\left(\varrho^2 - 2a\varrho\cos\left(\omega - \frac{2k\pi}{n}\right) + a^2\right) = \varrho^{2n} - 2a^n\varrho^n\cos n\omega + a^{2n};$$

daraus leitet sich ab, dafs der Ort der Punkte M so beschaffen ist, dafs

$$\overline{A_0M} \cdot \overline{A_1M} \ldots . . \overline{A_{n-1}M} = b^n$$

als Polargleichung hat:

$$\varrho^{2n} - 2a^n\varrho^n\cos n\omega + a^{2n} = b^{2n}.$$

Im speziellen hat man für $b = a$ die Gleichung

$$\varrho^n = 2a^n\cos n\omega,$$

1) *Produzioni matematiche* II. (Pesaro 1750) S. 375—412.

2) Vgl. den S. 395 citierten Aufsatz des Verf.

welche im wesentlichen mit (6) zusammenfällt. Folglich: **Eine Sinusspirale mit ganzzahligem Index n ist eine spezielle Cassinoide mit n Brennpunkten (vgl. Nr. 161), d. h. der Ort derjenigen Punkte der Ebene eines regulären n-Ecks, deren Abstände von den Ecken des Vielecks ein Produkt geben, gleich der n^{ten} Potenz des Radius des dem Vielecke umbeschriebenen Kreises.**

172. Bezeichnen wir nun mit R den Krümmungsradius der Kurve (6) und mit ν den Winkel der Normalen mit dem Radius vector, so haben wir

$$R = \frac{2^{\frac{n-1}{n}} a}{n+1} (\cos n\omega)^{\frac{1-n}{n}}, \qquad \cos\nu = \cos n\omega \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

und daher

$$R\cos\nu = \frac{\varrho}{n+1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

welche Gleichung folgenden Satz beweist: **Bei jeder Sinusspirale ist das Verhältnis der Projektion des Krümmungsradius auf den Radius vector zum Radius vector selbst ein konstantes.** Es sei $\varrho - \varrho'$ die genannte Projektion; da nun wegen (10) $\varrho - \varrho' = \frac{\varrho}{n+1}$ ist, so haben wir $\varrho' = \frac{n\varrho}{n+1}$ und die Gleichung (6) wird dann

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \varrho'^n = \frac{(2a)^n}{2} \cos n\omega, \qquad \text{oder auch} \qquad \varrho'^n = \frac{1}{2}\left(\frac{2na}{n+1}\right)^n \cos n\omega.$$

Da diese Gleichung von derselben Form wie (6) ist, so sieht man: **Bei einer Sinusspirale ist der Ort der Projektionen der Krümmungsmittelpunkte auf die zugehörigen Radienvectoren eine andere Sinusspirale mit demselben Index und demselben Pol.**

Die durch Gleichung (10) ausgedrückte Eigenschaft ist charakteristisch für die Sinusspirale sowie für eine andere Kurve, die man als Grenzfall derselben ansehen kann[1]). Wenn nämlich $\frac{\varrho}{R\cos\nu} = Const.$, und man bezeichnet mit m den Wert dieser Konstanten und setzt für R und $\cos\nu$ ihre Werte ein, so erhält man die folgende Differenzialgleichung

$$\varrho^2 - \varrho\frac{d^2\varrho}{d\omega^2} + 2\left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2 = m\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2\right],$$

oder aber

$$\frac{\frac{1}{\varrho}\frac{d^2\varrho}{d\omega^2} - \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2}{1 + \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2} + m - 1 = 0.$$

Wenn $m \neq 1$, so werden wir diese Gleichung in folgende umgestalten

$$\frac{d}{d\omega}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\omega}\right) + m - 1 = 0,$$

---

1) Allegret, *Remarques sur une certaine famille de courbes planes* (Nouv. Ann. de math. 2. Ser. XI, 1872); M. du Châtenet, *Sur les courbes dans lesquelles la projection du rayon de courbure sur le rayon vecteur est avec lui dans un rapport constant* (Das. 3. Ser. V, 1886).

daher wird bei geeigneter Wahl der Integrationskonstante

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\omega}\right) + (m-1) = 0,$$

oder

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\omega} + \operatorname{tg}(m-1)\omega = 0.$$

Eine zweite Integration ergiebt nun

$$\log\varrho = \frac{1}{m-1}\log\cos(m-1) + k,$$

wo k eine Konstante ist, oder auch

$$\varrho^{m-1} = k^{m-1}\cos(m-1)\omega.$$

Da diese Gleichung von der Form (6) ist, so stellt sie eine Sinusspirale dar. — In dem Falle $m = 1$, den wir ausgeschlossen haben, ist die Differenzialgleichung des Problems

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d^2\varrho}{d\omega^2} - \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2 = 0,$$

welche integriert liefert:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\omega} = c$$

oder

$$\frac{d\varrho}{d\omega} = c\cdot d\omega,$$

und durch Integrieren

$$\varrho = be^{c\omega}.$$

Wir werden (in Nr. **191**) sehen, dafs diese eine logarithmische Spirale ist; diese teilt also mit der Sinusspirale die durch Gleichung (10) ausgedrückte Eigenschaft.

Die Gleichung (10) führt noch zu einer weiteren Folgerung. Betrachten wir aufser der durch (6) dargestellten Spirale eine andere ähnliche Kurve, welche jene im Punkte (ϱ, ω) berührt; bezeichnen wir mit n' den Index und mit R' den Krümmungsradius derselben, so haben wir

$$R'\cos\gamma = \frac{\varrho}{n'+1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10')$$

aus (10) und (10′) folgt

$$\frac{1}{R} : \frac{1}{R'} = \frac{n+1}{n'+1};$$

dies ist eine Gleichung, welche die bemerkenswerte Eigenschaft ausdrückt, die wir (Nr. **126**) bei den triangulär-symmetrischen Kurven kennen gelernt haben. Nun ist dies Zusammentreffen kein zufälliges, und um den wahren Grund desselben einzusehen, setzen wir in (6) $n = -m$ und schreiben sie infolgedessen so

$$\varrho^m\cos m\omega = 2(2a)^m, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6')$$

wenn wir jetzt $\varrho e^{i\omega} = x + iy$ setzen, so wird

$$\varrho^m(\cos m\omega + i\sin m\omega) = (x+iy)^m$$

und

$$\varrho^m(\cos m\omega - i\sin m\omega) = (x-iy)^m$$

und demnach erhält (6') folgendes Aussehen:

$$\left(\frac{x+iy}{2a}\right)^m + \left(\frac{x-iy}{2a}\right)^m = 4 \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

dies beweist: **Die Sinusspiralen sind triangulär-symmetrische Kurven in Bezug auf ein Dreieck, von welchem zwei Ecken in den Kreispunkten der Ebene liegen**[1]. Bemerkenswert ist, dafs die Gleichung der Sinusspiralen in der Form (11) von Beltrami erhalten wurde[2], als er jene Systeme ebener Kurven aufsuchte, die, wenn sie um einen gegebenen Winkel um einen Punkt ihrer Ebene gedreht werden, das ursprüngliche System unter einem konstanten, gleichfalls gegebenen Winkel schneiden. Es ist somit bewiesen, dafs dieses Beltrami'sche Problem von den Kurven, deren Haupteigenschaft wir gerade darlegen, gelöst wird; es ist ebenfalls bewiesen, dafs die Sinusspiralen mit rationalem Index algebraische Kurven sind und dafs, um die Ordnung einer Sinusspirale mit gegebenem Index zu bestimmen wir dasselbe Verfahren anwenden können, das zur Lösung der analogen Frage bei den triangulären Kurven dient (vgl. Nr. **127**).

Von den Sinusspiralen möge noch aufser der Polar- und kartesischen Gleichung die natürliche Gleichung angegeben werden[3]. Um diese zu finden, setzen wir zur Abkürzung $\frac{(2a)^n}{2} = \alpha^n$; die Gl. (6) wird dann $\varrho^n = \alpha^n \cos n\omega$ und giebt

$$s = \alpha \int (\cos n\omega)^{\frac{1-n}{n}}, \qquad R = \frac{\alpha}{n+1} (\cos n\omega)^{\frac{1-n}{n}}.$$

Durch Elimination von ω findet man alsdann

$$s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{n+1}{\alpha} R\right)^{\frac{2n}{n+1}} - 1}};$$

wird nun der Kürze wegen $\frac{\alpha}{n+1} = b$ gesetzt, so können wir schliefsen: **Die natürliche Gleichung aller Sinusspiralen mit dem Index n hat folgende Gestalt:**

$$s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{b}\right)^{\frac{2n}{n+1}} - 1}} \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

1) Mit Benutzung dieser Bemerkung kann man aus einem Satze von Lamé, den wir in Nr. 133 bewiesen haben, einen anderen über Sinusspiralen ableiten, welchen R. C. Archibald auf S. 19 seiner Inaugural-Dissertation *The cardioid and some its related curves* (Strafsburg 1900) direkt bewiesen hat.

2) S. die Note *Intorno ad alcuni sistemi di curve piane* (Annali di Matem. IV, 1861).

3) Cesàro, *Lezioni di geometria intrinseca* (Napoli 1896) S. 51.

Es liegt aufserhalb unserer Aufgabe, auch die mechanischen Eigenschaften der Sinusspiralen[1]), sowie ihr Auftreten in Fragen der Geodäsie[2]) und der Analysis[3]) darzulegen. Wir beschliefsen daher dieses Kapitel, indem wir die bemerkenswertesten unter den speziellen Sinusspiralen anführen; wir erhalten sie, wenn wir dem Index n spezielle Werte zuerteilen:

1) $n = 1$; $\varrho = a \cos\omega$; ein Kreis mit dem Durchmesser $2a$.

2) $n = -1$; $\varrho \cos\omega = 4a$; eine Gerade.

3) $n = 2$; $\varrho^2 = 2a^2 \cos 2\omega$; eine Bernoulli'sche Lemniskate.

4) $n = -2$; $\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\cos 2\omega}{8a^2}$; eine gleichseitige Hyperbel.

5) $n = -\frac{1}{2}$; $\varrho = \frac{16a}{1 + \cos\omega}$; eine Parabel.

6) $n = +\frac{1}{2}$; $\varrho = \frac{a}{4}(1 + \cos\omega)$; eine Kardioide.

Aufser diesen uns schon bekannten Kurven mögen noch die neuen Kurven angeführt werden, welche folgenden Werten des Index entsprechen:

7) $n=3$; $\varrho^3=4a^3\cos 3\omega$; die Kurve 6. O. $(x^2+y^2)^3=4a^3(x^3-3xy^2)$; sie wird öfters die Kiepert'sche Kurve genannt, nach dem Geometer, der (jedoch nach W. Roberts) wichtige Untersuchungen über die Rektifikation derselben angestellt hat, indem er sich dabei der elliptischen Funktionen bediente[4]).

8) $n = -\frac{1}{3}$; $\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^3\frac{\omega}{3}}{16a}$; Brennlinie einer Parabel durch Reflexion, wenn die Lichtstrahlen senkrecht zur Axe auffallen, welche Kurve Cazamian cubique de l'Hôpital[5]) und Archibald Tschirnhausen's cubic nannte[6]).

---

1) O. Bonnet, *Propriétés géometriques et mécaniques de quelques courbes* (Liouvilles Journ. IX, 1844); Hâton de la Goupillière, *Thèse d'Astronomie* (Paris 1857) und *Sur le minimum du potentiel de l'arc* (Ass. fr., Besançon 1893); de Saint-Germain, *Recueil d'exercises sur la mécanique rationnelle,* 2e éd. (Paris 1889) S. 155—56.

2) A. Winckler, *Bemerkung über einige Formeln der Geodäsie* (Crelles Journ. L, 1855). Die daselbst (S. 34) auftretende Refraktionskurve ist eine Sinusspirale, da ihre Gleichung in Polarkoordinaten r, v folgende ist: $r = R\left[\frac{\sin(z + (k-1)v)}{\sin z}\right]^{\frac{1}{k-1}}$.

3) Borel, *Leçons sur les séries divergentes* (Paris 1901) S. 132.

4) S. die schon citierte Dissertation *De curvis, quarum arcus integralibus ellipticis primi generis exprimitur* (Berlin 1870) und die Abhandlung *Über eine geometrische Anwendung der complexen Multiplication der elliptischen Functionen* (Crelles Journ. LXXIV, 1872). — Giebt es aufser der Lemniskate und der Kiepert'schen Kurve Sinusspiralen, die durch elliptische Funktionen rectifizierbar sind?

5) *Application de la méthode de transformation par polaires reciproques à des théorèmes relatives aux cubiques unicursales* (Nouv. Ann. 3e Ser. XIII, 1894, S. 307).

6) O. a. Inaugural-Dissertation, S. 18.

9) $n = \frac{1}{3}$; $\varrho = \frac{a}{4} \cos^3 \frac{\omega}{3}$; der Ort der Scheitel derjenigen Parabeln, die einen gegebenen Kreis berühren und einen Punkt der Peripherie als gemeinsamen Brennpunkt haben[1]), eine von Archibald[2]) Cayley Sextic genannte Kurve.

10) $n = \frac{2}{3}$; $\varrho^2 = \frac{a^2}{2} \cos^3 \frac{2\omega}{3}$; die Fuſspunktkurve der Lemniskate in Bezug auf ihren Mittelpunkt.

11) $n = \frac{3}{2}$; $\varrho^3 = 4a^3 \cdot \cos^2 \frac{3\omega}{2}$; eine von W. Roberts[3]) untersuchte Kurve.

12) $n = 4$; $\varrho^4 = 8a^4 \cos 4\omega$; eine aus vier Blättern bestehende in Bezug auf beide Axen symmetrische, vierfach cirkulare Kurve achter Ordnung.

13) Überhaupt sind bemerkenswert alle Sinusspiralen, die durch eine Gleichung von der Form

$$\varrho = \frac{p}{2} \frac{1}{\cos^n \frac{\omega}{n}}$$

dargestellt werden, da sie zu der groſsen Familie der Sektrix-Kurven gehören[4]). Um diese wichtige Thatsache zu beweisen, beachten wir, daſs, wenn μ der Winkel der Tangente im Punkte P (ϱ, ω) mit dem Radius vector ist,

$$\operatorname{tg} \mu = \varrho : \frac{d\varrho}{d\omega} = \operatorname{ctg} \frac{\omega}{n} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{n}\right)$$

ist, und daher

$$\mu = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{n}.$$

Fällen wir also vom Pole auf diese Tangente die Senkrechte OP_1, so ist

$$\sphericalangle P_1PO = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{n}, \quad \text{daher} \quad \sphericalangle P_1OP = \frac{\omega}{n};$$

nun ist aber, wenn wir die Polaraxe OA nennen, $\sphericalangle POA = \omega$ und deswegen

$$\sphericalangle P_1OP = \frac{1}{n} POA.$$

Wollen wir daher einen Winkel α in n gleiche Teile teilen, so legen wir ihn mit dem einen Schenkel auf OA; der andere Schenkel schneide die betrachtete Kurve in gewissen Punkten P; ziehen wir in einem

---

1) Nouv. Ann. Question 166, gelöst 1848 von P. Serret.

2) O. a. Inaugural-Dissertation, S. 13.

3) *Note sur la rectification de quelques courbes* (Liouvilles Journ. XII, 1847).

4) Für den Fall $n = 3$ wurde diese Eigenschaft von F. Gauſs bemerkt: *Über Kurven, welche die Eigenschaft haben, daſs je zwei Tangenten aus einer gegebenen Geraden eine Strecke ausschneiden, welche zu dem von den Berührungspunkten begrenzten Bogen in einem gegebenen Verhältnisse stehen* (Progr. Bunzlau, 1890).

derselben die Tangente und fällen auf sie das Lot OP_1, so ist P_1OP einer der gesuchten Winkel.

Kurven, die allgemeiner als die Sinusspiralen sind und die Polargleichung haben

$$\varrho = \begin{cases} \sin^n \\ \cos^n \end{cases} m\omega,$$

kommen in der darstellenden Geometrie vor[1]).

Neunzehntes Kapitel.

Die Lissajous'schen Kurven.

173. Der mathematischen Untersuchung gewisser akustischer Phänomene verdankt die Geometrie eine Klasse von Kurven, der wir das letzte Kapitel dieses Abschnitts widmen wollen[2]); es sind diejenigen Kurven, die man — nach dem Namen des französischen Physikers, der sie zuerst betrachtet hat[3]) — die Lissajous'schen Kurven nennt. Wir definieren sie durch die beiden Gleichungen

$$x = a \sin(mt + \gamma), \quad y = b \sin(nt + \delta), \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

die eine parametrische Darstellung der Kurve geben; a und b sind beliebige reelle Konstanten, γ und δ beliebige gegebene Winkel und m und n bekannte Zahlen. Diese kann man immer als positiv annehmen, weil, wenn sie es nicht wären, man als Parameter $-t$ statt t nehmen könnte, womit nur der positive Sinn auf einer oder beiden Koordinataxen geändert würde. Wenn das Verhältnis $\frac{m}{n}$ irrational ist, so ist leicht einzusehen, dafs die Kurve nicht algebraisch sein kann; ist es aber rational, so kann man immer die beiden Zahlen als ganz und relativ prim annehmen, denn, wenn sie es nicht wären, so könnte man sie dahin bringen, indem man $\frac{\tau}{\varDelta}$ als neuen Parameter nimmt, wo $\varDelta$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner von m und n ist. Schliefslich, wenn man die Bezeichnungen in geeigneter Weise wählt,

---

1) F. J. (Gabriel-Marie) *Exercises de géométrie déscriptive* III. Aufl. (Tours und Paris 1893) S. 785.

2) Andere algebraische, mathematisch-physikalische Kurven finden sich in der Abhandlung von Euler: *Problema: Un corps étant attiré en raison réciproque quarrée des distances vers deux points fixes donnés; trouver les cas où la courbe décrite par ce corps sera algébrique* (Mém. de Berlin XVI, 1760); die daselbst niedergelegten Resultate wurden von Legendre vollständig behandelt im II. B. seiner *Exercises de calcul intégral* (Paris 1817).

3) Lissajous, *Mémoire sur la position des noeuds dans les lames qui vibrent transversalement* (Ann. de Phys. et de Chemie, 3. Ser. XXX, 1850).

kann man immer bewirken, dafs $m \geqq n$ und $\delta = 0$ wird. Kurz und gut: Wir können eine Lissajous'sche Kurve darstellen durch die Gleichungen

$$x = a \sin(mt + \gamma), \qquad y = b \sin nt, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wo die Zahlen m, n ganz, positiv, relativ prim sind, und die erste gröfser oder gleich der letzteren ist.

Die Untersuchung derartiger Kurven kann auf zwei verschiedene Arten ausgeführt werden.

I. Die elementarste ist eine einfache Anwendung des klassischen Verfahrens der Diskussion einer Kurve, die durch kartesische Koordinaten dargestellt ist[1]), welches Verfahren keine prinzipiellen Schwierigkeiten bietet, da die in Gleichung (2) auftretenden Kreisfunktionen so sehr bekannt sind; z. B. läuft die Bestimmung der Doppelpunkte darauf hinaus diejenigen Wertepaare t' und t'' aufzusuchen, welche ergeben

$$\sin(mt' + \gamma) = \sin(mt'' + \gamma), \qquad \sin nt' = \sin nt''; \quad \text{u. s. w.}$$

II. Die andere Methode ist, wenn auch nicht schwieriger, so doch kunstvoller[2]); bei dieser wird gesetzt

$$x = \frac{x_2}{x_3}, \qquad y = \frac{x_1}{x_3}, \qquad e^{it} = \frac{\lambda}{\mu}$$

und man erhält dann an Stelle von (2):

$$\frac{x_2}{x_3} = \frac{a}{2i} \frac{e^{i\gamma}\lambda^{2m} - e^{-i\gamma}\mu^{2m}}{\lambda^m \mu^m}, \qquad \frac{x_1}{x_3} = \frac{b}{2i} \frac{\lambda^{2n} - \mu^{2n}}{\lambda^n \mu^n}.$$

Bezeichnen wir nun mit ϱ einen Proportionalitätsfaktor, so können diese Gleichungen auch durch die drei folgenden ersetzt werden:

$$\left.\begin{aligned} \varrho x_1 &= b(\lambda^{2n} - \mu^{2n}) \\ \varrho x_2 &= a(e^{i\gamma}\lambda^{n+m}\mu^{n-m} - e^{-i\gamma}\lambda^{n-m}\mu^{n+m}) \\ \varrho x_3 &= 2i\lambda^n\mu^n \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Da somit die homogenen Koordinaten eines beliebigen Punktes der Lissajous'schen Kurven durch binäre Formen von λ und μ vom Grade $2n$ ausgedrückt sind, so ist damit die Anwendung der Theorie der binären Formen auf diese Kurven ermöglicht. Vor allem zeigen uns die Gleichungen (3), **dafs die Lissajous'schen Kurven algebraisch und von der Ordnung $2n$ sind**; es mufs jedoch bemerkt werden, dafs es gewisse Werte des Winkels γ giebt, für welche man eine (doppelt gerechnete) Kurve von der Ordnung n erhält. Wenn m ungerade ist, so sind diese singulären Werte $\frac{k\pi}{n}$ $(k = 1, 2 \ldots, 2n - 1)$, während,

---

1) Himstedt, *Über Lissajous'sche Curven* (Archiv der Math. LXX, 1884).

2) W. Braun, *Die Singularitäten der Lissajous'schen Stimmgabelkurven* (Dissert. Erlangen, 1875); vgl. den Auszug unter dem Titel *Ueber Lissajous' Curven* (Math. Ann. VIII, 1875).

wenn m ungerade ist, diese Werte sind $\frac{2k\pi}{n}$ $(k = 1, 2 \ldots, n-1)$. Im allgemeinen Falle besitzt die Kurve $(2n-1)(n-1)$ Doppelpunkte und unter diesen $2(n-m+1)$ Spitzen, von denen $2nm-(n+m)$ in endlicher Entfernung liegen; sie hat aufserdem $2(m-1)$ Wendepunkte im Unendlichen und $2(m+n)$ im Endlichen, von denen $2(n-m)$ reell sind; schliefslich hat sie $(2n+2m-1)(n+m-1) - 2(n+2m-1)$ Doppeltangenten, sie ist infolgedessen von der Klasse $2(n+m)$. Hat aber γ einen der oben angegebenen Werte, so hat die Kurve $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppelpunkte und unter diesen $n-m+1$ Spitzen, von welchen $\frac{(m-1)(n-1)}{2}$ in endlicher Entfernung liegen; aufserdem hat sie $m-1$ Wendetangenten im Unendlichen und $n+m-3$ in endlicher Entfernung, von denen nur $n-m-1$ reell sind; die Zahl der Doppeltangenten beträgt $\frac{(n+m-2)(n+m-3)}{2} - (n+2m-4)$, und daher ist ihre Klasse $n+m-1$. — Mit dem Beweise dieser Sätze wollen wir uns nicht aufhalten, weil die Lissajous'schen Kurven in der Geometrie eine weniger wichtige Stelle einnehmen[1]). Wir wollen nur noch bemerken, dafs aufser der Geraden und der Ellipse sich noch mindestens eine bemerkenswerte Kurve vierter Ordnung unter ihnen befindet[2]), die rektifizierbar ist; es ist die durch folgende Gleichungen dargestellte:

$$x = 4\sqrt{2}\, b \sin(\vartheta + \alpha), \qquad y = \sin 2\vartheta. \ ^{3)}$$

1) Die mechanische Zeichnung der Lissajous'schen Kurven betreffend siehe J. C. W. Ellis, *A machine for tracing curves described by points of a vibrating string* (Cambridge Proc. II, 1870), und Dechevrens, *Le campylographe, machine à tracer des courbes* (C. R. CXXX, 1900), wo auch allgemeinere Kurven betrachtet und gezeichnet werden; vgl. *Intermédiaire* VIII, 1901, S. 187.

2) E. Sang, *On a singular case of rectification in lines of fourth order* (Edinburgh Proc. VII, 1892).

3) Zum Schlusse dieses Abschnittes möge noch auf die Abhandlung von C. Weltzien verwiesen werden, *Zur Theorie derjenigen Kurven, deren Coordinaten sich rational und ganz durch zwei lineare Funktionen und zwei Quadratwurzeln aus ganzen Funktionen eines Parameters darstellen lassen* (Math. Ann. XXX, 1887). Die daselbst untersuchten Kurven sind, in homogenen Koordinaten, folgender parametrischen Darstellung fähig

$$\varrho x_k = (a_{k,0} t + a_{k,1})\sqrt{E(t)} + (b_{k,0} t + b_{k,1})\sqrt{F(t)}, \quad (k = 1, 2, 3);$$

wenn E und F Funktionen von der Ordnung $p+1$ sind, so ist ihre Ordnung $p+3$ und ihr Geschlecht p.

VI. Abschnitt.

Transscendente Kurven.

Erstes Kapitel.

Einleitung.

174. Alle diejenigen Kurven, die man nicht durch eine algebraische (ganze rationale) Gleichung zwischen den kartesischen Koordinaten x, y eines Punktes darstellen kann, nennt man transscendente Kurven. Unter den nicht algebraischen Kurven verdienen diejenigen einen abgesonderten Platz, deren linke Seite ein Polynom in x, y mit irrationalen Exponenten ist; diese tragen nach einem Vorschlage von Leibniz den Name interscendente Kurven[1]), und sie bezeichnen gewissermafsen den Übergang zwischen den algebraischen und transscendenten Kurven; ein Beispiel dieser Art ist uns schon in Nr. **127** (am Schlusse) begegnet.

Jener ganze Teil nun der Theorie der algebraischen Kurven, der die in Bezug auf eine projektive oder Cremona'sche Transformation invarianten Eigenschaften betrifft (Polaren-Theorie, kovariante Kurven, Plücker'sche Charakteristiken, Geschlecht, adjungierte Kurven u. s. w.) hat bis heute kein Seitenstück in der Theorie der transscendenten Kurven; dagegen die ganze metrische Geometrie der ebenen Kurven (Konstruktion der Tangenten, des Oskulationskreises, Quadratur, Rektifikation u. s. w.), da sie unabhängig von der Annahme, dafs die Kurve algebraisch sei, ist durchaus auf die transscendenten Kurven anwendbar. Wenn man sich hier an den Gebrauch kartesischer Koordinaten hält, so erweisen sich die algebraischen und die transscendenten Kurven als gänzlich heterogene geometrische Figuren; in vielen Fällen jedoch verschwindet dieser Unterschied, wenn man andere Koordinatensysteme anwendet. Z. B. haben wir in Nr. **134** gesehen, dafs in Polarkoordinaten ϱ, ω die Gleichung $\varrho = R \sin \mu\omega$, bei Variierung des Index μ, unzählig viele Kurven darstellt, die algebraisch oder transscendent sind, jenachdem μ rational oder irrational ist, die sich jedoch vieler gemeinsamer Eigenschaften erfreuen; dies beweist, dafs man in einem solchen Falle

---

1) Vgl. Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Genf 1750) S. 8; daselbst ist als Beispiel folgendes angeführt: $y^{\sqrt{2}} + y = x$.

— sowie in vielen anderen ähnlichen — von kartesischen Koordinaten abzusehen und sich anderer Koordinaten zu bedienen hat, die mehr geeignet sind, die eigentliche Natur der verschiedenen bekannten transscendenten Kurven auszudrücken. Diese Ansicht ist so verbreitet, daſs man Versuche gemacht hat, Theorien aufzustellen für die Kurven, die durch eine algebraische Gleichung dargestellt werden, wenn man Polarkoordinaten anwendet, oder für bipolare oder natürliche Koordinaten u. s. w. Da man jedoch auf diesem Wege noch nicht einmal dahin gelangt ist, die Fundamente für eine allgemeine Theorie der transscendenten Kurven zu legen, so hat man versucht, sie mit algebraischen Kurven zu verknüpfen, damit die ungemein reichen Kenntnisse, die man von diesen besitzt, auch auf jene ihr Licht werfen mögen; das sie verknüpfende Band wurde durch die Theorie der Differenzialgleichungen hergestellt, und es sollen die erhaltenen Resultate hier erwähnt werden[1].

Es sei
$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
eine Differenzialgleichung erster Ordnung und vom Grade μ, so liefert diese ∞^1 Integralkurven, die algebraisch oder transscendent sein können. **Da nun**, wenn x, y gegeben sind, **die Gleichung (1) vom Grade μ in $\frac{dy}{dx}$ ist, so gehen durch jeden Punkt der Ebene μ Integralkurven.** Dem entsprechend kann man fragen: Wie viele Kurven des Systemes berühren eine beliebige Gerade der Ebene? Wenn $y = ax + b$ die Gleichung der Geraden ist, so erhält man die Abscissen der betreffenden Berührungspunkte, wenn man die Gleichung
$$f(x, ax + b, a) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$
auflöst, die entsteht, wenn man in (1) den obigen Wert von y einsetzt; **ergiebt sich diese Gleichung als vom ν^{ten} Grade, so wird jede Gerade der Ebene von ν Integralkurven berührt.** Wenden wir nun die Chasles'sche Nomenklatur an, so können wir sagen (vgl. Nr. **157**): **die Integralkurven der Differentialgleichung (1) bilden ein System mit den Charakteristiken μ und ν.** Daraus kann man alsbald ableiten: Die Berührungspunkte der von einem Punkte O an alle jene Integralkurven gezogenen Tangenten liegen auf einer Kurve von der Ordnung $\mu + \nu$, die O als μ-fachen Punkt hat; dual hierzu hüllen die Tangenten an jene Integralkurven in den Punkten, in welchen sie von einer beliebigen Geraden r geschnitten werden, eine Kurve von der Klasse $\mu + \nu$ ein, welche die Gerade r als ν-fache Tangente hat. Diese Sätze werden insbesondere auf eine einzelne isolierte Integral-

1) Für das Folgende s. Fouret, *Mémoire sur les systèmes généraux de courbes planes, algébriques ou transcendentes, définis par deux charactéristiques* (Bull. de la Soc. math. de France II, 1873—4) und Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie* I. (Leipzig 1875) VII. Abt. IV. Kap.

kurve angewendet, und erweisen sich als besonders nützlich, wenn diese transscendent ist; sie führen dann zu folgendem allgemeinen Satze: **Wenn eine transscendente Kurve einem System von Integralkurven mit den Charakteristiken μ und ν angehört, so liegen die Berührungspunkte der Tangenten, die man von einem beliebigen Punkte der Ebene an sie ziehen kann, auf einer Kurve von der Ordnung $\mu + \nu$, und die Tangenten, die man an sie in ihren Schnittpunkten mit einer beliebigen Geraden legen kann, umhüllen eine Kurve von der $(\mu + \nu)^{\text{ten}}$ Klasse**[1]. Umgekehrt, wenn einer dieser beiden Umstände zutrifft, so gehört die gegebene Kurve einem Systeme an[2].

Aus dem Vorhergehenden geht hervor, von welcher Wichtigkeit es ist, bei jeder transscendenten Kurve zu wissen, ob sie einem System angehört, und wir werden darauf bedacht sein, diesen Umstand bei den hauptsächlichsten Kurven, mit denen wir uns beschäftigen werden, auch anzugeben. Von vornherein wollen wir hier (mit Fouret) bemerken, dafs die vorigen Sätze auf alle Kurven anwendbar sind, die durch eine Gleichung von folgendem Typus dargestellt werden können:

$$\varphi\left(x, y, \sin\frac{m}{n}u, \sin\frac{m'}{n'}u, \ldots \cos\frac{p}{q}u, \cos\frac{p'}{q'}u, \ldots e^{\frac{r}{s}u}, e^{\frac{r'}{s'}u}, \ldots\right) = 0,$$

wo φ das Symbol einer algebraischen, rationalen, ganzen Funktion, u eine ähnliche Funktion in x, y ist, und $m, n \ldots\ldots$ beliebige ganze Zahlen sind. Sie ist nämlich reduzierbar auf die Form

$$\psi\left(x, y, \sin\frac{u}{\delta}, \cos\frac{u}{\delta}\right) = 0,$$

wo ψ eine andere rationale ganze Funktion bedeutet. Differenzieren wir bezw. nach x, y, so entsteht eine Relation vom Typus

$$\chi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \sin\frac{u}{\delta}, \cos\frac{u}{\delta}\right) = 0,$$

wo χ eine neue rationale Funktion bedeutet; eliminieren wir $\sin\frac{u}{\delta}$ und $\cos\frac{u}{\delta}$ aus diesen beiden und der Gleichung $\sin^2\frac{u}{\delta} + \cos^2\frac{u}{\delta} = 1$, so bekommen wir eine Gleichung von der Form (1) w. z. b. w.

175. Einige der Begriffe, die wir schon zur Gewinnung neuer algebraischer Kurven in Anwendung sahen, wurden auch, und zwar mit gutem Erfolge angewendet, um neue transscendente Kurven zu erhalten. Vor allem war der Gedanke, die Eigenschaften der Kegelschnitte zu verallgemeinern, auch für den Zweig der Geometrie, den wir jetzt behandeln, ergiebig an Resultaten; folgendes Beispiel möge dies zeigen.

Bekanntlich bilden die Tangenten in einem beliebigen Punkte eines (centrischen) Kegelschnittes mit den zu den Brennpunkten ge-

---

1) Betreffs einiger Spezialfälle dieses Satzes s. P. H. Schoute, *Intermédiaire* T. III, 1896, S. 7.

2) Fouret, *Sur les courbes planes transcendentes susceptibles de faire partie d'un système μ, ν* (Bull. de la Soc. math. II, 1873—74).

zogenen Vectoren gleiche Winkel; dafs diese Eigenschaft für die Kurven zweiter Ordnung charakteristisch ist, wurde von Euler bewiesen[1]). Dies führte G. Bellavitis zu folgender Aufgabe: Eine Kurve zu finden derart, dafs die Tangente in einem beliebigen ihrer Punkte mit den Verbindungslinien dieses Punktes mit zwei festen Punkten Winkel bilden, deren Differenz konstant ist. Wenn diese Konstante von Null verschieden ist, so sind die entsprechenden Kurven transscendent; sie wurden von Bellavitis durch die Methode der Äquipollenzen[2]), und von S. R. Minich durch das gewöhnliche, durch die Integralrechnung vorgeschriebene Verfahren bestimmt[3]). Übrigens, wenn A und B die festen Punkte und δ die konstante Differenz ist, so ist leicht einzusehen, dafs die gesuchten Kurven nichts anderes sind, als die Trajektorien des Winkels δ in dem Systeme der Kegelschnitte, die A und B zu Brennpunkten haben; von diesem Gesichtspunkte aus ist die Aufgabe des Bellavitis von G. Mainardi gelöst worden[4]), und da seine elegante Lösung in einem sehr bekannten Werke von Boole[5]) zu finden ist, so dürfen wir uns auf die Anführung desselben beschränken.

Eine andere reiche Quelle transscendenter Kurven bietet sich bei der Untersuchung der Quadratur des Kreises dar; wir werden daher den Quadratrix-Kurven das folgende Kapitel (2) widmen. Eine berühmte von Archimedes entdeckte Kurve, sowie alle, die durch Verallgemeinerung ihrer Definition erdacht wurden, werden uns einen ziemlichen Teil dieses Abschnittes hindurch (Kap. 3—6) beschäftigen. Einen noch gröfseren Teil (Kap. 7—12) nehmen die Untersuchungen ein über die Eigenschaften derjenigen Kurven, die (ähnlich wie die vorher betrachteten) durch geeignete Kombinationen spezieller Bewegungen erzeugt werden. Darauf werden wir die hauptsächlichsten Kurven behandeln, zu denen man bei der Auflösung von Aufgaben gelangt ist, die demjenigen Gebiete angehören, das die ersten Analytiker „methodus tangentium inversa“ nannten (Kap. 13—15). Weniger wichtig jedoch erwähnungswert sind die Kurven, die aus der geometrischen Darstellung der bekanntesten Funktionen, welche die Analysis bietet, hervorgehen (Kap. 16, 17); einige derselben sind beachtenswert durch ganz aufsergewöhnliche Singularitäten, an die man früher keineswegs ge-

1) *Solutio trium problematum difficiliorum ad methodum tangentium inversam pertinentium* (Mém. de l'Accad. de St. Pétersbourg, X, 1821—22).

2) *Saggio d'applicazione del calcolo delle equipollenze* (Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto, V, 1835). Vgl. auch *Sposizione del metodo delle equipollenze* (Mem. della Soc. Ital. delle Scienze, XXV, 2ª Parte, 1854).

3) *Soluzione d'un problema di geometria relativo al metodo inverso delle tangenti* (Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto, VII, 1837).

4) *Sulla integrazione delle equazioni differenziali* (Annali di Matem. I, 1850).

5) *A treatise on differential equations* (IV. Aufl. London 1877) S. 234—251.

dacht hatte (Kap. 18). Zwei andere Gruppen von Kurven wurden bei der Untersuchung gewisser geometrischer Transformationen gefunden (Kap. 19, 20). Recht zahlreich sind solche, zu denen die mathematische Untersuchung gewisser Erscheinungen in der Natur führt (Kap. 21—25); wir werden so die wichtigsten physikalisch-mathematischen Kurven kennen lernen und sehen, dafs sie auch beachtenswerte geometrische Eigenschaften besitzen.

Zweites Kapitel.

Die Quadratrixkurven.

176. Im 12. Kapitel des vorigen Abschnittes haben wir Notiz genommen von vielen algebraischen Kurven, die dazu dienen können, geometrisch das Problem der Teilung eines Winkels in gleiche Teile zu lösen. Dies Problem kann aber auch — ebenso wie die noch allgemeinere Aufgabe, einen Winkel in zwei Teile von gegebenem Verhältnisse zu teilen — vermittelst einer nicht-algebraischen Kurve gelöst werden, deren charakteristische Eigenschaft (*τὸ σύμπτωμα*[1])) nach der Aussage des Proklus der berühmte Sophist Hippias aus Elea angegeben hatte. Dieselbe Kurve wurde aber auch von einem anderen Geometer — Dinostratus — angewendet, um ein anderes nicht weniger berühmtes Problem zu lösen, nämlich das der Quadratur des Kreises: daher der Name Quadratrix (*τετραγωνίζουσα*), mit welchem sie nach dem Vorgange des Pappus bezeichnet wird[2]). Dieser berühmte Kommentator giebt die Erzeugung der Kurve mit folgenden Worten an[3]): „Gegeben ist ein Quadrat (Taf. XIII, Fig. 101 a) $ABCD$, man beschreibe um den Mittelpunkt A den Kreis BED und lasse die Gerade AB sich so bewegen, dafs der Punkt A fest bleibt, und B den Kreis BED beschreibt. Die Gerade BC bleibe immer parallel zu AD, während ihr Punkt B die Gerade BA gleichförmig durchläuft; währenddem durchlaufe die Gerade AB gleichförmig den Winkel BAD (d. h. der Punkt B den Kreis BED). Es möge dabei eintreffen, dafs AB und BC zu gleicher Zeit auf der Geraden AD zusammenfallen. Unter der Voraussetzung dieser so geregelten Bewegung werden die Geraden AB und BC sich in jeder ihrer Lagen in einem variabeln Punkte F schneiden, der dann inner-

---

1) Mit diesem Namen bezeichneten die Alten bekanntlich dasjenige bei ihrer Methode, was den Dienst der Gleichung in der modernen analytischen Geometrie versieht.

2) Heilbronner (*Historia matheseos*, Lipsiae 1742) giebt der Kurve den heute vergessenen Namen „Voluta delumbata".

3) *Pappus*, herausgeg. v. Hultsch, S. 250—52.

halb des von der Geraden BA und AD und dem Kreise BED begrenzten Raumes eine gewisse Linie beschreibt, die immer nach derselben Seite konkav ist, und die sich als geeignet erweist zur Aufsuchung eines Quadrates, das einem gegebenen Kreise inhaltsgleich ist."

Aus diesem Passus geht hervor, dafs die Quadratrix sich leicht punktweise konstruieren läfst (die bequemste Art ist, sowohl die Gerade AB als auch den Quadranten BE in 2^n gleiche Teile zu teilen); ferner geht daraus hervor, dafs sie auch dazu dienen kann, die Aufgabe, einen Winkel in Teile zu teilen, die in einem gegebenen Verhältnisse stehen, zurückzuführen auf die analoge Aufgabe, eine Strecke in dieser Weise zu teilen, welche Zurückführung die Lösung der Aufgabe sehr erleichtert.

Um eine geeignete analytische Darstellung der Quadratrix des Dinostratus zu erhalten, nehmen wir die Geraden AB und AD als x- und y-Axen, nennen r die Seite des Quadrates, ω den variabelen Winkel FAB und μ einen Zahlen-Koëffizienten, dann bestehen die Beziehungen:

$$x = (1 - \mu)r, \qquad \omega = \mu\frac{\pi}{2},$$

folglich nach Elimination von μ

$$\frac{r - x}{r} = \frac{2\omega}{\pi}.$$

Ist aber $AF = \varrho$, so hat man $x = \varrho \cdot \cos\omega$, und folglich

$$\varrho = \frac{r}{\cos\omega}\left(1 - \frac{2\omega}{\pi}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Dies ist die Polargleichung der Kurve; setzen wir $\omega = \frac{\pi}{2} - \varphi$, so ergiebt sich hieraus

$$\varrho = \frac{2r}{\pi}\frac{\varphi}{\sin\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

als zweite Form der Polargleichung, der wir schon früher (Nr. 147) begegnet sind. Da $x = \varrho\cos\omega$, $\omega = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$, so wird (1) zu

$$\frac{x}{r} = 1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},$$

oder auch

$$y = x\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2r}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

dies ist die kartesische Gleichung der Quadratrix. Sie zeigt uns, dafs die Kurve die x-Axe in unendlich vielen Punkten mit den Abscissen $\pm r$, $\pm 3r$, $\pm 5r$ ..... schneidet, die alle Wendepunkte der Kurve sind; ferner, dafs alle die Geraden $x = \pm 2r$, $x = \pm 4r$ ..... Asymptoten der Kurve sind. Diese besteht demzufolge, aufser dem von Roberval betrachteten parabolischen Zweige, aus unzählig vielen Wendezügen, die paarweise symmetrisch zur y-Axe sind. (Auf Taf. XIII sind letztere in der verkleinerten Nebenfigur 101b angedeutet; eine vollständigere Zeichung findet der Leser auch in Haas, *Kleyers Lehrbuch der Differentialrechnung* III. Teil, Stuttgart 1894, S. 120.) Ferner ergiebt sich unmittelbar aus der Gleichung eine wichtige Folgerung;

es sei y_0 die Ordinate des Punktes I, in welchem die Quadratrix die Gerade AD (x-Axe) schneidet, so haben wir

$$y_0 = \lim_{x=0} y = \lim_{x=0} \frac{x}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2r}} = \lim_{x=0} \left(\frac{2r}{\pi} \cos^2 \frac{\pi x}{2r}\right) = \frac{2r}{\pi};$$

und daher ist $\pi = \frac{2r}{y_0}$; ist nun der Punkt I geometrisch bestimmt, so ist damit auch π bestimmt und damit jeder Kreisumfang rektifiziert, und jeder Kreis quadriert, damit ist die Anwendbarkeit der Kurve des Hippias und Dinostratus auf das Problem der Quadratur des Kreises erhärtet.

Die Gleichung (2) führt noch zu einem anderen Schlusse; sie zeigt nämlich, dafs die Gleichung der Tangente im Punkte (x, y) die Gleichung hat

$$Y - y = (X - x)\left\{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2r} - \frac{\frac{\pi x}{2r}}{\sin^2\frac{\pi x}{2r}}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wo X, Y die laufenden Koordinaten sind; oder wegen Gleichung (2)

$$Y - y = (X - x)\left\{\frac{y}{x} - \frac{\pi(x^2 + y^2)}{2rx}\right\} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$

Betrachten wir in dieser Gleichung X und Y als gegeben, x, y als unbekannt, so kann sie mit (2) kombiniert zur Bestimmung des Berührungspunktes der vom Punkte $P(X, Y)$ aus an die Quadratrix gezogenen Tangente dienen; da nun (3) eine kubische Gleichung zu x, y ist, die durch $X = x$, $Y = y$ befriedigt wird, so folgern wir: **Die Berührungspunkte der Tangenten, die man von einem Punkte P an eine Quadratrix ziehen kann, liegen auf einer Kurve dritter Ordnung, die durch diesen Punkt hindurchgeht**; die Quadratrix gehört demnach (vgl. **174**) einem System mit den Charakteristiken $\mu = 1$, $\nu = 2$ an. Daraus folgt: **Die Tangenten an eine Quadratrix in den Punkten, in welchen sie von einer Geraden geschnitten wird, umhüllen eine Kurve dritter Klasse, die jene Gerade als Doppeltangente hat.**

177. Wie aus dem in voriger Nr. wiedergegebenen Passus der Sammlung des Pappus hervorgeht, glaubten die Alten, dafs die Quadratrix nur aus dem Zweige BI innerhalb des Quadranten ABD bestehe, und diese Ansicht hat sich mindestens bis zu den Zeiten Vietas erhalten[1]; die Irrigkeit derselben wird zur Evidenz bewiesen durch die Thatsache, dafs die Gleichung (2) sich nicht ändert, wenn man das Vorzeichen von x wechselt, also ist die Quadratrix symmetrisch in Bezug auf die y-Axe (AD); dieselbe Gleichung zeigt, dafs, wenn $|x| > r$, $y < 0$; folglich erstreckt sich die Kurve auch nach der negativen Seite der y, ferner ergiebt sich für $x = |2r|$, $y = \infty$. Auch

1) Vgl. *Variorum de rebus mathematicis responsorum*, Cap. VIII, Prop. I (F. Vietae, *Opera mathematica* ed. Schooten, Lugd. Batav. 1646, S. 365).

erkennt man leicht mit Anwendung einer der bekannten Regeln für Kurvengleichungen, dafs die beiden Geraden $x = \pm 2r$ Asymptoten der Quadratrix sind. Dies sind die wichtigen Bemerkungen, die Montucla[1]) dem P. Leautaud[2]) zuschreibt, die sich jedoch schon früher als von Roberval[3]) gemacht vorfinden. Diesem verdankt man aufserdem eine bemerkenswerte Konstruktion der Tangente in einem beliebigen Punkte F, die wir passend hier wiedergeben: „Man beschreibe um A als Mittelpunkt (Taf. XIII, Fig. 101 a) den Kreisbogen der in F beginnt und in dem Punkte G von AD endigt. Auf der ihn in F berührenden Geraden trage man $FR = FG$ ab; die in R zu ihr errichtete Senkrechte schneide AD im Punkte T. Durch diesen Punkt geht die Tangente an die Quadratrix in F." Ohne uns mit dem Beweise für diese Konstruktion aufzuhalten, wollen wir vielmehr noch bemerken, dafs aus der Gleichung (3′), wenn man in ihr $X = 0$ setzt, sich ergiebt:

$$Y = \frac{\pi(x^2 + y^2)}{2r},$$

oder auch

$$\frac{AT}{\overline{AF}^2} = \frac{2\pi r}{(2r)^2}.$$

Die rechte Seite ist nun, wenn π gefunden ist, bekannt; da man nun AF kennt, so kann man auch AT und somit auch die Tangente FT finden[4]).

Um die Quadratrix zu quadrieren, setzen wir $\frac{\pi x}{r} = u$ und haben dann

$$\int y \cdot dx = \int \frac{2ru}{\pi} \operatorname{ctg} u \cdot \frac{2r}{\pi} \cdot du = \left(\frac{2r}{\pi}\right)^2 \int u \operatorname{ctg} u \cdot du;$$

nun ist

$$u \operatorname{ctg} u = u \frac{\cos u}{\sin u} = \frac{1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \cdots\cdots}{1 - \frac{u^2}{3!} + \frac{u^4}{5!} - \cdots\cdots}$$

$$= 1 - \frac{u^2}{3} - \frac{u^4}{45} - \frac{2u^6}{945} - \cdots\cdots$$

und daher

$$\int y \cdot dx = \left(\frac{2r}{\pi}\right)^2 \left\{u - \frac{u^3}{9} - \frac{u^5}{225} - \frac{u^7}{6615} - \cdots\cdots\right\}.$$

1) *Histoire des mathématiques*, Nouv. éd. (Paris 1799) II, S. 77.

2) S. die Arbeit *Cyclomathia*, *seu de multipla circuli contemplatione* (Lugd. Batav. 1663).

3) *Observations sur la composition des mouvements* etc. (Mém. de l'Acad. des Sciences VI, Paris 1730) S. 51; wie bekannt, stammt diese Arbeit etwa aus dem Jahre 1636.

4) Über die Frage der Tangentenziehung siehe ferner die *Lectiones geometricae* von Barrow (London 1670; wieder abgedruckt in *The mathematical Works of Is. Barrow*, herausg. v. Whewell, Cambridge 1860), die *Analyse des infiniment petits* vom Marquis de l'Hôpital (Paris 1696), die *Oeuvres de Fermat* I. S. 163 und III. S. 145, sowie auch Wallis, Phil. Trans. 1672, und H. Resal, *Construction de la tangente en un point de la quadratrice* (Nouv. Ann. 2. Ser. XV, 1876).

Dieser Ausdruck findet sich in einem Briefe, den Newton am 13. Juli 1676 an Oldenburg schrieb, damit er ihn Leibniz mitteile[1]); in diesem Briefe findet sich auch eine analoge Entwickelung für den Bogen der Quadratrix. Veröffentlicht wurde sie erst viel später von A. Stone[2]) in *A method of fluxions* (London 1730) und alsbald scharf kritisiert von Joh. Bernoulli, der bemerkte: „Avec tout cela il ne donne pas la quadrature par une expression finie, comme nous en pouvons donner une, quoique les logarithmes y entrent"[3]). Auf welche Formel er hier anspielt, ist mathematisch sicher nicht bekannt. Zugegeben, dafs er an einen Ausdruk für die Fläche $\mathcal{A}$ gedacht hat, die zwischen der Kurve und der x-Axe gelegen ist (also das Doppelte des Sektors ABI), so bekommt man die von ihm wahrscheinlich angekündigte Formel auf folgende Weise[4]): Die Gleichung (3) zeigt, dafs

$$\mathcal{A} = 2\int_0^r x \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2r} \cdot dx$$

ist; setzt man nun $\pi(r - x) = 2ru$, so erhält man

$$\mathcal{A} = \frac{4r^2}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2u) \operatorname{tg} u \cdot du$$

$$= \frac{4r^2}{\pi^2}\left\{\left[(2u - \pi) \log \cos u\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos u \cdot du\right\};$$

und da der integrierte Teil für diese Grenzen gleich Null wird, so ist

$$\mathcal{A} = -\frac{8r^2}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos u \cdot du = \frac{8r^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{2}\pi \log 2,$$

und daher ist[5])

$$\mathcal{A} = \frac{4r^2 \log 2}{\pi}$$

die gesuchte Formel.

178. Pappus hat eine beachtenswerte stereometrische Erzeugung der Quadratrix entdeckt; sie wird ausgedrückt durch folgenden

Satz: Schneidet man eine Schraubenfläche mit gerader Leitlinie mit einer durch eine Erzeugende gelegten Ebene und projiziert die Schnittkurve auf die Basisebene, so erhält man eine Quadratrix.

---

1) *Leibniz ed. Gerhardt* I, S. 109. Vgl. auch den *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* (1736) reproduziert in *Isaaci Newtoni opuscula* I. (Lausanne et Genevae 1744) S. 198.

2) Vgl. *Analyse des infiniment petits par M. Stone,* übers. von Rondet (Paris 1735) S. 70—71.

3) *Remarque sur le livre intitulé* etc. (Joh. Bernoulli Opera IV) S. 177.

4) *Intermédiaire* IV, 1897, S. 14.

5) Cesàro, *Calcolo infinitesimale* (Neapel 1899) S. 263—64.

Beweis: Die Gleichung der Schraubenfläche und der schneidenden Ebene seien

$$\frac{2\pi z}{p} = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}; \qquad z - \frac{p\alpha}{2\pi} + \lambda\left(\frac{x}{\cos\alpha} - \frac{y}{\sin\alpha}\right) = 0\,. \quad . \quad (4)$$

Durch Elimination von z aus diesen beiden Gleichungen erhält man die der im Satze betrachteten Projektionskurve; diese neue Gleichung lautet:

$$\frac{p}{2\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - \frac{p\alpha}{2\pi} + \lambda\left(\frac{x}{\cos\alpha} - \frac{y}{\sin\alpha}\right) = 0\,.$$

Gehen wir zu Polarkoordinaten über, so wird sie:

$$\varrho = \frac{p \sin 2\alpha}{4\pi\lambda} \frac{\alpha - \varphi}{\sin(\alpha - \varphi)};$$

da sie nun von der Form (1′) ist, so ist der Satz bewiesen.

Es möge noch bemerkt werden, daſs, wenn man dieselbe Schraubenfläche (4) durch die Ebene

$$z = x \sin\alpha + y \cos\alpha - k$$

schneidet, man als Projektion die Kurve

$$\varrho = \frac{p}{2\pi} \frac{\varphi + \frac{2k\pi}{p}}{\sin(\varphi + \alpha)}$$

erhält, die offenbar allgemeiner als die Quadratrix ist, da sie mit dieser nur übereinstimmt, wenn $\alpha = \frac{2k\pi}{p}$ ist. Die durch sie dargegestellten Kurven wurden von Chasles[2]) betrachtet, der ihnen den Namen verlängerte oder verkürzte Quadratrix gab. Man kann sie auch erhalten, ohne aus der Ebene herauszugehen, in ähnlicher Weise, wie im Anfange für die gewöhnliche Quadratrix angegeben wurde[3]); wenn man nämlich in der (Nr. **176**) angegebenen Erzeugungsweise die Bedingung aufhebt, daſs die beiden bewegten Geraden zu Anfang der Bewegung zusammenfallen, so erhält man Kurven, die durch eine Gleichung von folgendem Typus dargestellt werden können

$$\varrho = a \frac{\omega \pm \alpha}{\sin\omega},$$

die eben verlängerte oder verkürzte Quadratrices sind.

Zum Schlusse sei bemerkt: Wenn man die Gl. (1) wie folgt schreibt

$$\varrho \frac{\cos\omega}{r} = 1 - \left(\frac{2\omega}{\pi}\right),$$

so sieht man, daſs die Quadratrix zur Familie derjenigen Kurven gehört, deren allgemeine Gleichung

---

1) *Aperçu historique* (II. Aufl., Paris 1875) S. 32, Note; vgl. Fouret, *Sur une généralisation de la quadratrice* (Nouv. Ann. 3. Ser. V, 1886).

2) Brocard, *Question de licence* (Mathésis, VI, 1886).

$$\varrho \frac{\cos \omega}{r} = 1 - \left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^{\frac{m}{n}}$$

ist; mit ihnen hat sich Pater Caraccioli[1]) beschäftigt.

179. Die mathematische Litteratur des 17. Jahrhunderts liefert auch drei geometrische Beiträge zur Quadratur des Kreises in Form von drei neuen Quadratrixkurven. Die ältere und bekanntere ist die Tschirnhausen'sche Quadratrix[2]), eine Kurve, die durch die Gleichung

$$y = r \sin \frac{\pi x}{2r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

dargestellt wird; setzt man $\frac{y}{r} = Y$, $\frac{\pi x}{2r} = X$, so wird diese Gleichung zu

$$Y = \sin X,$$

die, wie wir (Nr. **218**) sehen werden, die Sinuskurve ist; **demnach ist die Tschirnhausen'sche Quadratrix eine der Sinuslinie affine Kurve.** Denken wir uns diese Kurve vollständig gezeichnet, so leuchtet ein, dafs, wenn für $y = r$, $x = \xi$ wird, $\pi = \frac{2r}{\xi}$ ist; somit ist klar, dafs sie eine Quadratrix ist. Dies ist die bemerkenswerteste Eigenschaft der Kurve. Man kann beachten, dafs die Fläche zwischen der x-Axe und dem ersten Kurvenbogen, der seine Endpunkte auf dieser Axe hat, gleich ist

$$\int_0^r r \sin \frac{\pi x}{2r} \cdot dx = \frac{2r^2}{\pi},$$

woraus man dann π ableiten könnte, wenn dieser Wert nicht auf andere Weise bekannt wäre; ähnlich ist das durch Rotation dieser Fläche um Ox erzeugte Volumen gleich

$$\pi \int_0^r r^2 \sin^2 \frac{\pi x}{2r} \cdot dx = \frac{1}{2} \pi r^3;$$

daher würde, nachdem dieses direkt bestimmt ist, in gleicher Weise der Wert π sich daraus ergeben.

Die Tschirnhausen'sche Quadratrix kann folgendermafsen konstruiert werden: „Gegeben (Taf. XIII, Fig. 102) ein Kreis mit dem Centrum O, dem Radius r und zwei zueinander senkrechte Durchmesser desselben AA' und BB'; man nehme an, dafs ein Radius OM gleichförmig sich um O drehe, während eine zu AA' parallel bleibende Gerade sich ebenfalls gleichförmig von AA' aus beginnend verschiebe; man nehme aufserdem an, dafs beide Bewegungen zu gleicher Zeit beginnen und zugleich aufhören, so dafs, wenn M in B angelangt ist, auch die Gerade mit der Tangente in B an den Kreis zusammenfalle. Der Ort des Punktes P, in welchem sich die beiden bewegten Geraden

1) *De lineis curvis liber* (Pisis 1740) S. 181—189.

2) *Medicina mentis* (Amstel. 1686) S. 115.

schneiden, ist eine Tschirnhausen'sche Quadratrix." Ist nämlich φ der Winkel AOM, OA die x-Axe, so ist

$$y = r \cdot \sin\varphi, \qquad r\varphi : r\frac{\pi}{2} = x : r;$$

daraus folgt

$$y = r \sin\frac{\pi x}{2r},$$

w. z. bew. war[1]).

Ähnlich der Tschirnhausen'schen Quadratrix, sowohl durch ihre Gestalt als auch durch ihre Gleichung, ist eine Kurve, die man zu Ehren dessen, der sie zuerst betrachtet hat, die Ozanam'sche Kurve nennen könnte[2]). Ihre Definition ist folgende: „AB sei ein fester Durchmesser eines Kreises, dessen Centrum O, dessen Radius a sei (Taf. XIII, Fig. 103); von einem beliebigen Punkte P desselben fälle man das Lot auf AB und trage auf diesem vom Fuſspunkte H aus die Strecke HM gleich dem Bogen AP des gegebenen Kreises ab; der Ort des Punktes M ist die Ozanam'sche Kurve." Nehmen wir A als Anfang, AB als x-Axe, bezeichnen mit φ den Winkel POB, so können wir zur analytischen Darstellung der Kurve die beiden Gleichungen nehmen

$$x = a + a\cos\varphi, \qquad y = a(\pi - \varphi),$$

oder folgende, die sich durch Elimination von φ hieraus ergiebt

$$\frac{x}{2a} = \sin^2\frac{y}{2a};$$

wird zur Abkürzung $2a = b$ gesetzt, und macht man

$$\frac{x'}{b} = \sin\frac{y}{b}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

so erhält man aus der Gleichung der Ozanam'schen Kurve

$$\frac{x}{b} = \sin^2\frac{y}{b},$$

die folgende

$$bx = x'^2;$$

man erhält daher unsere Kurve aus der durch die Gleichung (α) dargestellten Sinuskurve (s. Nr. **222**) durch eine einfache geometrische Transformation, die eine Punktkonstruktion der Ozanam'schen Kurve liefert, wenn die Sinuskurve gezeichnet vorliegt.

180. Mit einer anderen Quadratrix macht uns die Nr. 260 der *Philosophical Transactions* (vom J. 1700) bekannt, welche eine anonyme Schrift[3]) enthält mit dem Titel *The construction of a Quadratrix*

---

1) Diese Erzeugung bietet eine auffallende Ähnlichkeit mit derjenigen der Quadratrix des Dinostratus, von der wir in Nr. **176** ausgegangen sind.

2) Ozanam, *Dictionnaire mathématique ou idée générale des mathématiques* (Amsterdam 1691) S. 98—99, woselbst als Quelle der *Traité d'algèbre* desselben Verfassers angegeben ist. Vgl. auch Cramer, *Introduction* etc. S. 7.

3) Die Herausgeber (C. Hutton, G. Shaw und R. Pearson) des Neudruckes der *Philos. Trans. of th. R. Soc. of London* bemerken bei dieser Gelegenheit

to the circle being the curve described by its equable evolution. Die Kurve, um dies sich handelt, wird in Polarkoordinaten ϱ, ω durch die Gleichung

$$\varrho = \frac{4\pi r \cos\omega}{\pi - 2\omega} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

dargestellt. Dafs sie zur Quadrierung des Kreises dienen kann, ersieht man, wenn man beachtet, dafs die Gleichung für $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\varrho = 2\pi r$ ergiebt, ist daher die Kurve zum wenigsten für die zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gelegenen Werte von ω gezeichnet, so kennt man die Länge des Kreisumfanges mit dem Radius r, und also π. Da für $\omega = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $(k \neq 0)$ $\varrho = 0$ wird, so ist klar, dafs die Kurve unzählige Male durch den Pol hindurch geht; der Radius vector wächst unzählige Male zu einem endlichen Maximum an, u. s. w. Die Kurve steht zur Quadratrix des Nikomedes in sehr einfacher geometrischer Beziehung, was ja erklärlich ist, da sie in gleicher Weise wie jene der Quadratur des Kreises dient. Führen wir nämlich auf die Gleichung (6) die Transformation durch reziproke Radienvectoren aus, welche ihr Centrum im Pole und als Potenz k^2 hat, so bekommen wir eine Kurve von der Gleichung

$$\varrho = \frac{k^2}{4r} \frac{1 - \frac{2\omega}{\pi}}{\cos\omega};$$

indem nun diese im wesentlichen mit Gleichung (1) identisch ist, so ist bewiesen, dafs diese neue Quadratrix die Inverse der älteren ist.

Setzen wir $\pi - 2\omega = \varphi$ und $2\pi r = a$, so wird Gleichung (6)

$$\varrho = a\frac{\sin\varphi}{\varphi}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6')$$

und in dieser eleganten Form wurde sie von mehreren aufgefunden, die die Kurve, mit der wir uns hier beschäftigen, wieder entdeckten, und auf diese müssen wir noch zurückkommen.

Vor allem ist von Gregor Fontana folgende Aufgabe gestellt worden[1]): „Auf einer unbegrenzten Geraden MQ ist ein Punkt A gegeben (Taf. XIII, Fig. 104) und aufserhalb derselben ein beliebiger Punkt B; die Gerade AB und der Winkel BAQ sind somit bekannt. Man ziehe BC senkrecht zu AB, sowie die Halbierungslinie AC des

(IV, London 1809, S. 462): „This paper, which is anonymous, has much of the manner, style and peculiarities of William Jones, Esq., who soon afterwards made so cospicuous figure in the Royal Society and in the mathematical world.“ Dagegen hat E. Wölffing (*Bibliografia della cocleoide*, Boll. di bibl. e storia III, 1900) unabhängig vom Verf. nachgewiesen, dafs J. Perks der Verfasser der betreffenden Abhandlung ist (vgl. S. 424, Note 1).

1) S. den ersten Teil der Abhandlung *Sopra l'equazione d'una curva, sopra la falsità di due famosi teoremi e sopra le serie armoniche a termini infinitamente piccoli* (Mem. de la Soc. Ital. delle Scienze II, 1784).

Winkels BAQ; in gleicher Weise ziehe man CD senkrecht zu AC und die Halbierungslinie AD des Winkels CAQ; sodann ziehe man DE senkrecht zu AD und wieder die Halbierungslinie AE des Winkels DAQ; in dieser Weise bis ins Unendliche fortfahrend erhält man unzählig viele Punkte, deren letzter Punkt — wir wollen ihn H nennen — auf der Geraden MQ zu liegen kommt. Nachdem dies vorausgeschickt, fragen wir: 1) Wo liegt der Punkt H? 2) Welches ist die Gleichung der Kurve, auf welcher die Punkte $B, C, D, E, F \ldots\ldots H$ liegen?“. Zur Lösung dieser Aufgabe verfährt Fontana der Hauptsache nach in folgender Weise: Man nehme A als Pol und AQ als Polaraxe, bezeichne mit ϱ, φ die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Kurve und mit $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots, \varrho_n \ldots$ die den Winkeln $\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi}{2^2}, \frac{\varphi}{2^3}, \ldots \frac{\varphi}{2^n} \ldots$ entsprechenden Radienvectoren. Die angegebene Konstruktion führt dann ersichtlich zu folgenden Beziehungen

$$\varrho_1 = \frac{\varrho}{\cos\frac{\varphi}{2}}, \quad \varrho_2 = \frac{\varrho_1}{\cos\frac{\varphi}{2^2}}, \ldots \varrho_n = \frac{\varrho_{n-1}}{\cos\frac{\varphi}{2^n}}, \quad \ldots \qquad (\beta)$$

aus denen man durch Multiplikation ableitet

$$\varrho_n = \frac{\varrho}{\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{\varphi}{2^n}};$$

aber infolge der bekannten Relationen

$$\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}, \qquad \sin\frac{\varphi}{2} = 2\sin\frac{\varphi}{2^2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^2}, \ldots$$

$$\sin\frac{\varphi}{2^{n-1}} = 2\sin\frac{\varphi}{2^n}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^n},$$

ergiebt sich

$$\sin\varphi = 2^n\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{\varphi}{2^n}\cdot\sin\frac{\varphi}{2^n};$$

daher

$$\varrho_n\sin\varphi = \varrho\varphi\cdot\frac{\sin\frac{\varphi}{2^n}}{\frac{\varphi}{2^n}}.$$

Durch Übergang zum Grenzwerte ergiebt sich dann für $n = \infty$

$$\varrho_\infty\sin\varphi = \varrho\varphi.$$

Nennen wir nun die Polarkoordinaten des Punktes B, von welchem die Kurve ausgeht, a und α, so haben wir im besonderen

$$\varrho_\infty\sin\alpha = a\cdot\alpha;$$

dividieren wir die vorige Gleichung durch diese, so bekommen wir

$$\varrho = \frac{a\cdot\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\varphi}{\varphi},$$

welche Gleichung die Gestalt von (6′) hat; folglich liegen die Punkte $B, C, D, E \ldots\ldots H$ auf einer Quadratrix der obigen Art[1]).

Auf dieselbe Kurve war früher schon Fontana[2]) gestoſsen, als er den Ort der Schwerpunkte der Bogen eines gegebenen Kreises, die einen gegebenen Anfangspunkt haben, suchte. Sei O der Mittelpunkt, r der Radius jenes Kreises und A der Anfangspunkt der Bogen; man nehme O als Pol, OA als Polaraxe und betrachte einen beliebigen dieser Bogen $AA' = 2r\varphi$ (Taf. XIII, Fig. 105); dann hat sein Schwerpunkt bekanntlich als Polarkoordinaten bezw. φ und $r\frac{\sin\varphi}{\varphi}$; die Gleichung des fraglichen Ortes ist dann $\varrho = \frac{r\cdot\sin\varphi}{\varphi}$ [3]).

---

1) Die Gleichungen (β) auf vor. Seite $\varrho_k = \frac{\varrho_{k-1}}{\cos\frac{\varphi}{2^k}}$ können auch in folgende zusammengefaſst werden:

$$\varrho\left(\frac{\varphi}{2^{k-1}}\right) = \varrho\left(\frac{\varphi}{2^k}\right)\cdot\cos\frac{\varphi}{2^k},$$

oder, wenn man $\frac{\varphi}{2^k} = \omega$ setzt,

$$\varrho(2\omega) = \varrho(\omega)\cdot\cos\omega;$$

diese Relation läſst alsbald vermuten, daſs die Untersuchung der Gleichung der Kurve, auf welcher die Punkte $B, C, D, \ldots$ liegen, vollständig gleichbedeutend ist mit der Bestimmung derjenigen Funktion $\varrho = \varrho(\omega)$, welche der vorigen Funktionsgleichung genügt; aber es ist auch leicht einzusehen, daſs in Wirklichkeit so die Frage verallgemeinert worden ist. Ist nämlich eine Funktion $\varrho_0(\omega)$ gefunden, die der Aufgabe genügt, derart also, daſs

$$\varrho_0(2\omega) = \varrho_0(\omega)\cdot\cos\omega,$$

so hat man auch

$$\frac{\varrho(2\omega)}{\varrho_0(2\omega)} = \frac{\varrho(\omega)}{\varrho_0(\omega)},$$

daher ist $\frac{\varrho(\omega)}{\varrho_0(\omega)} = f(\omega)$ eine Funktion von ω, die sich nicht ändert, wenn man ω in 2ω verwandelt. Einem Satze von Laplace zufolge ist sie demnach von der Form $\Theta\left(\sin\frac{2\pi\log\omega}{\log 2}, \cos\frac{2\pi\log\omega}{\log 2}\right)$, wobei Θ eine beliebige Funktion bedeutet. **Wenn daher $\varrho_0(\omega)$ eine spezielle Lösung der obigen Funktionsgleichung ist, so ist $\Theta\left(\sin\frac{2\pi\log\omega}{\log 2}, \cos\frac{2\pi\log\omega}{\log 2}\right)$ die allgemeine Lösung derselben.** Die (verschiedentlich bewiesene) Nicht-Äquivalenz der Untersuchung der Gleichung der fraglichen Kurve mit der jener Funktionsgleichung wurde in der Hauptsache von E. Beltrami bemerkt (*Remarques au sujet de la Question 654*, Nouv. Ann. 2e Serie, II, 1863).

2) S. das zweite Problem von IX der *Disquisitiones physico-mathematicae nunc primum editae* (Pavia 1780).

3) Diese Erzeugungsweise der Kurve findet sich auch in einer Note von E. Egger im VI. B. der Ann. di Matem. 1864, S. 21—27 und in einer neueren Arbeit von V. Stoeckly, *Bedeutung und Eigenschaften der aus* $r = a\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ *entspringenden Curve* (Archiv XLVIII, 1868).

Eine dritte Aufgabe, die durch dieselbe Kurve gelöst wird, wurde privatim von D. Bernoulli und Goldbach[1]) behandelt, und öffentlich vorgelegt von Bossut[2]) und darauf von E. Catalan[3]); sie lautet folgendermaſsen: „Eine unendliche Zahl von Kreisen berühre eine Gerade in demselben Punkte; man nehme auf jedem derselben, von diesem Punkte ausgehend, einen Bogen von gegebener Länge an; welches ist der Ort der Endpunkte aller dieser Bogen?“ Um diese Frage zu beantworten, nehmen wir ein Polarkoordinatensystem, das diesen festen Punkt O als Pol hat (Taf. XIV, Fig. 106) und als Polaraxe die gegebene Gerade. Es sei C der Mittelpunkt, r der Radius eines beliebigen von jenen Kreisen, l die gegebene Länge, ϱ, φ die Koordinaten des Endpunktes des Bogens OM, so ist offenbar $l = 2r\varphi$, $\varrho = 2r \sin\varphi$; durch Elimination von r erhält man wiederum $\varrho = l\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ als Gleichung des Ortes der Punkte M.

Später gelangten zu derselben Kurve G. Jung[4]), J. Neuberg[5]) und C. Falkenburg[6]), indem sie von gewissen Betrachtungen der angewandten Mathematik ausgingen[7]); der letztere gab ihr auch, mit Rücksicht auf die Ähnlichkeit mit einer Schnecke, den Namen Kochleoide, der sich zu halten scheint; daſs sie dieselbe Kurve sei, welche die Alten mit diesem selben Namen[8]) bezeichnet haben, ist eine Vermutung von P. Mansion[9]), und die vorhandenen Dokumente berechtigen uns weder diese Vermutung anzunehmen, noch auch sie von der Hand zu weisen.

Die Gleichung (6′) läſst deutlich zwei ausgezeichnete Punkte erkennen: läſst man nämlich φ ins Unendliche wachsen, so geht ϱ in Null über, folglich ist der Pol ein asymptotischer Punkt; geht hingegen φ in Null über, so erreicht ϱ den Wert a, folglich ist A der vom Pole am weitesten entfernte Punkt und zugleich derjenige kleinster Krümmung.

---

1) S. den Brief v. 30. u. 31. Oktober 1726, veröffentlicht von P. H. Fuſs in *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII Siècle* (II, St. Petersbourg, 1843, S. 242 und 244).

2) *Calcul intégral* (Paris, An. IX); eine Lösung derselben von Gergonne findet sich im III. B. der *Annales de Mathém.*

3) *Manuel des candidats à l'École polytéchnique* I. (Paris 1857) S. 331. Vgl. Azzarelli, *Alcune proprietà di una curva trascendente* (Ann. di Matem. V, 1863), und Rankine, *On the approximate drawing of arcs of given length* (Rep. of Brit. Ass. XXXVII, 1867).

4) *Nuovi teoremi a complemento della regola di Guldin e proprietà della spirale* $r = a\frac{\sin\theta}{\theta}$ (Lincei Rend. 3. Ser. VII, 1883).

5) *Mathésis* V, 1885, Question 257.

6) *Die Cochleoïde* (Archiv LXX, 1883), nach Mitteilungen von J. Neuberg.

7) S. auch E. Cesàro, *Elementi di calcolo infinitesimale* (Neapel 1899) S. 332.

8) κοχλοειδὴς γραμμή; s. Pappus.

9) *Mathésis* V, 1885, S. 92.

Um die Tangente in einem beliebigen Kurvenpunkte $M(\varrho, \varphi)$ zu erhalten, benutzen wir die zweite von den oben angegebenen Erzeugungsweisen, sowie die zugehörige Fig. 105; den Winkel, den sie mit dem Radius vector bildet, nennen wir ϑ, dann giebt uns (6')

$$\operatorname{tg}\vartheta = \varrho : \frac{d\varrho}{d\varphi} = \frac{\varphi \cdot \sin\varphi}{\varphi \cdot \cos\varphi - \sin\varphi}.$$

Zeichnen wir nun die Schnittpunkte H, N des Radius OM mit der Geraden AA' und mit der Peripherie des gegebenen Kreises und bezeichnen den Winkel HMA' mit λ, so haben wir

$$OH = r\cos\varphi, \qquad AH = HA' = r\sin\varphi,$$

$$MH = OH - OM = r\cos\varphi - r\frac{\sin\varphi}{\varphi},$$

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{A'H}{MH} = \frac{\varphi \cdot \sin\varphi}{\varphi \cdot \cos\varphi - \sin\varphi}.$$

Dies zeigt uns, dafs $\lambda = \vartheta$, und dafs also die Gerade $A'M$ die Tangente in M an die Kochleoide ist; um also die Tangente in irgend einem Punkte M zu konstruieren, genügt es M mit A', dem zu A in Bezug auf OM symmetrischen Punkte, zu verbinden. Da nun die Lage des Punktes A' nur von dem Punkte A und der Geraden OM abhängt, so kann man mit E. Cesàro[1]) folgern: **Jede vom Pole O einer Kochleoide ausgehende Gerade schneidet die Kurve in unzählig vielen Punkten, die entsprechenden Tangenten konkurrieren in einen Punkt A', dessen Ort der Kreis um O mit dem Radius OA ist**; umgekehrt: **Zieht man von einem beliebigen Punkte A' dieses Kreises die Tangenten an die Kochleoide, so liegen deren Berührungspunkte auf der Halbierungslinie des Winkels AOA'.** Diese Punkte sind die Schwerpunkte der unzählig vielen Bogen dieses Kreises, die zu Endpunkten A und A' haben.

Diese Schlüsse können in folgender Weise bestätigt und erweitert werden. In kartesischen Koordinaten wird die Kochleoide durch folgende Gleichung dargestellt:

$$(x^2 + y^2)\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} - ay = 0,$$

folglich lautet die Gleichung der sie im Punkte (x, y) berührenden Geraden

$$[2axy - y(x^2 + y^2)]X + [a(y^2 - x^2)] + x^2(x^2 + y^2)]Y = ay(x^2 + y^2).$$

Ist nun X, Y gegeben, so stellt diese Gleichung eine Kurve dritter Ordnung dar, die durch den Punkt mit diesen Koordinaten hindurchgeht; folglich: **Die Berührungspunkte der von einem beliebigen Punkte P ihrer Ebene an die Kochleoide gezogenen Tangenten liegen auf**

---

1) *Quelques propriétés de la courbe représentées par* $u = R\frac{\sin\omega}{\omega}$ (Nouv. Corr. math. IV, 1878).

einer Kurve dritter Ordnung, die durch diesen Punkt hindurch geht und den Pol als Doppelpunkt hat. Die Kochleoide gehört also (vgl. Nr. **174**) einem System an mit den Charakteristiken $\mu = 1$, $\nu = 2$. Führen wir Polarkoordinaten ein und nehmen an, dafs der Punkt P in der Entfernung a vom Pole liege, setzen also

$$x = \varrho \cos \omega, \quad y = \varrho \sin \omega, \qquad X = a \cos \alpha, \quad Y = a \sin \alpha,$$

so wird die vorige Gleichung zu

$$a \sin(2\omega - \alpha) = \varrho [\sin \omega + \sin(\omega - \alpha)]$$

oder

$$\sin\left(\omega - \frac{\alpha}{2}\right) \left\{ a \cos\left(\omega - \frac{\alpha}{2}\right) - \varrho \cos \frac{\alpha}{2} \right\} = 0;$$

die Kurve dritter Ordnung des allgemeinen Falles zerfällt alsdann in die Gerade $\omega = \frac{\alpha}{2}$ und den Kreis $\varrho \cos \frac{\alpha}{2} = a \cos\left(\omega - \frac{\alpha}{2}\right)$, der durch die beiden ausgezeichneten Punkte der Kochleoide geht und seinen Mittelpunkt auf der Halbierungslinie des Winkels POA hat.

Zum Schlusse sei bemerkt[1]), dafs man die Kochleoide auch als eine besondere Centralprojektion einer Kreiscylinder-Schraubenlinie ansehen kann[2]).

181. Die Hyperbel ist nicht, in gleicher Weise wie der Kreis, algebraisch quadrierbar; will man also ihre Fläche berechnen, so mufs man zu transscendenten Funktionen seine Zuflucht nehmen; nun ist wohl klar, dafs während eine Kreisquadratrix wenigstens einen Punkt enthalten mufs, von dem eine kartesische Koordinate oder der Radius vector ein Vielfaches (ganzes oder gebrochenes) von π ist, für eine Hyperbelquadratrix, eine der Koordinaten eine logarithmische Funktion der anderen sein mufs. Von dieser Art ist die Kurve, für welche die Summe der Tangente und der Subtangente konstant ist. Deren Differentialgleichung ist nämlich

$$\sqrt{y^2 + y^2 \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} + y \frac{dx}{dy} = a,$$

oder

$$dx = \frac{a^2 - y^2}{2ay} dy;$$

durch Integrieren findet man alsbald

$$x = -\frac{y^2}{4a} + \frac{a}{2} \log \frac{y}{b}, \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

wo b eine beliebige Konstante ist. Es ist klar, dafs, wenn diese Kurve gezeichnet ist, man $\log \frac{y}{b}$ in rationalen Funktionen von y und

1) Weitere bibliographische Angaben findet man in dem S. 418 (Fufsnote) citierten Aufsatze von E. Wölffing.

2) Fouret, *Sur les faisceaux ponctuels planes de characteristique ν ayant un point principal d'ordre ν* (Bull. de la Soc. Math. de France VII, 1879, S. 199); *Mathésis*, 3. Reihe I, 1901, Question 1273 (H. Brocard).

dem zugehörigen x hat. Nun hat Perks 1706 ein geistreiches Instrument erdacht[1]), um in kontinuierlichem Zuge die Kurve (7) zu zeichnen; wir wollen uns mit der Beschreibung desselben nicht aufhalten, ebenso wollen wir uns hier nicht über die Sätze verbreiten, welche Colson[2]), der bekannte Professor an der Universität zu Cambridge, über diese Hyperbelquadratrix aufgestellt hat[3]). Bemerken wollen wir jedoch, dafs viel später Paul Fufs[4]) auf diese Kurve gestofsen ist, und eine sehr schöne Eigenschaft derselben entdeckt hat, deren Beweis wir nun darlegen wollen.

Zu dem Zwecke beachten wir zunächst, dafs, weil die Konstante b keinen Einflufs auf die Lage der Kurve zur y-Axe hat, man bei geeigneter Wahl derselben, die Gleichung (7) durch folgende ersetzen kann

$$x = \frac{a}{2} \log \frac{y}{a} + \frac{a^2 - y^2}{4a} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Wenn wir nun den Anfang und den positiven Sinn des Bogens s der Kurve passend wählen, so finden wir leicht

$$s = \frac{a}{2} \log \frac{y}{a} - \frac{a^2 - y^2}{4a} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Die Gleichungen (8) und (9) liefern dann

$$x - s = \frac{a^2 - y^2}{2a};$$

da (8) erkennen läfst, dafs $\lim\limits_{x=\infty} y = 0$,

so schliefsen wir $\lim\limits_{x=\infty} (x - s) = \frac{a}{2} \cdot$

---

1) *The construction and properties of a new Quadratrix to the hyperbola* (Phil. trans. No. 306, 1706; Bd. V, S. 302 des Neudrucks. — Folgender Umstand möge hier bemerkt werden: In der Einleitung seiner Schrift erwähnt Perks „the old quadratrix of Dinostratus by which the circle and the ellipse are squared“ und setzt hinzu „another sort for the same purpose, I insertet in the Transactions for the same purpose.“ Nun ist die einzige Abhandlung, auf die man jenen Hinweis beziehen kann, die anonyme, die wir anfangs von Nr. 180 citiert haben, somit scheint (eine gleichzeitige Bemerkung von E. Wölffing und vom Verf.) die von den Herausgebern des Neudrucks der Phil. Trans. — s. Note 3, S. 417 — gemachte Zuweisung an Jones unrechtmäfsig zu sein.

2) S. die eben citierte Abh. v. Perks.

3) Wir beschränken uns darauf, nur das folgende Beispiel anzuführen: Ist R der Krümmungsradius, T die Länge der Tangente, so findet man leicht:

$$R = \frac{(a^2 + y^2)^2}{4a^2 y}, \qquad T^2 = \frac{(a^2 + y^2)^2}{4a^2},$$

daher erfreut sich die Kurve der eleganten Eigenschaft, die durch die Beziehung $R : T = T : y$ wiedergegeben wird.

4) S. die vierte von den in der Abh. *Quantum differat longitudo arcus ab asymptota utraque in infinitum extensa* behandelten Problemen (Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg IX, 1824).

Die Differenz zwischen dem unbegrenzten Kurvenbogen der Hyperbelquadratrix und der Asymptote ist eine endliche Gröfse.

Zum Schlusse soll bewiesen werden, dafs die Hyperbelquadratrix ein Spezialfall derjenigen Kurven ist, die folgendes Problem lösen[1]): „Gegeben eine Gerade und ein Punkt A auf ihr; man soll durch diesen eine Kurve ziehen derart, dafs, wenn man in einem beliebigen Punkte M derselben eine Tangente zieht, der Schnitt T derselben mit der Geraden so bestimmt sei, dafs $AT = n \cdot \operatorname{arc} AM$, wo n ein gegebenes Verhältnis ist.“ Nehmen wir die Gerade als x-Axe, nennen a die Ordinate des Punktes A, s den Bogen und p das Verhältnis $\frac{dy}{dx}$, so führt das Problem zu folgender Relation

$$ns = x - \frac{y}{p} - a. \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

Differenzieren wir diese, so bekommen wir

$$n \cdot ds = \frac{y \cdot dp}{p^2};$$

und da nun $ds = \frac{dy\sqrt{1+p^2}}{p}$, so können wir auch schreiben

$$n\frac{dy}{y} = \frac{dp}{p\sqrt{1+p^2}},$$

daher ist, wenn wir integrieren

$$\left(\frac{y}{a}\right)^n = \frac{p}{1+\sqrt{1+p^2}},$$

wo a die Integrationskonstante ist. Aus dieser leiten wir den Wert von $p = \frac{dy}{dx}$ ab und erhalten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a^n y^n}{a^{2n} - y^{2n}},$$

oder auch

$$2a^n \cdot dx = a^{2n}\frac{dy}{y^n} - y^n \cdot dy \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

Nehmen wir vor allem an, dafs $n \neq 1$, so finden wir durch Integrieren

$$2a^n x = -\frac{a^{2n}}{(n-1)y^{n-1}} - \frac{y^{n+1}}{n+1} + Const.,$$

und da die Kurve durch den Punkt A hindurchgehen soll, so ist die Konstante bestimmt, und die vorige Gleichung wird

$$x = \frac{a(y^{n-1} - a^{n-1})}{2(n-1)y^{n-1}} + \frac{a^{n+1} - y^{n+1}}{2(n+1)a^n}, \quad \ldots \quad (12)$$

die eine algebraische oder interscendente Kurve darstellt, jenachdem n rational ist, oder nicht. — In dem ausgeschlossenen Falle $n = 1$, giebt (11)

$$x = \frac{a}{2}\log y - \frac{y^2}{4a} + Const.;$$

1) F. Fufs, *De curva quadam transcendente ejusque proprietatibus* (Mém. de St. Pétersbourg VIII, 1822).

bestimmen wir die Konstante in der Weise, dafs die Kurve durch den Punkt A geht, so finden wir

$$x = \frac{a}{2} \log \frac{y}{a} + \frac{a^2 - y^2}{4a}$$

als Gleichung der gesuchten Kurve; da diese mit Gleichung (8) übereinstimmt, so ist die obige Behauptung bewiesen.

Drittes Kapitel.

Die Archimedische Spirale.

182. Wenn eine Gerade sich um einen festen Punkt mit gleichmäfsiger Geschwindigkeit dreht, und ein beweglicher Punkt diese Gerade vom festen Punkte ausgehend ebenfalls mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchläuft, so beschreibt der bewegte Punkt eine Kurve, die durch den Anfangspunkt der Bewegung geht und unzählige Umgänge um den festen Punkt macht. Sie heifst die Archimedische Spirale, weil man die Entdeckung derselben, sowie die ihrer wichtigsten Eigenschaften, jenem berühmten Geometer von Syrakus verdankt[1]). Es ist einleuchtend, dafs, wenn man den festen Punkt als Pol und die Anfangslage der beweglichen Geraden als Polaraxe nimmt, die Polargleichung der Kurve lautet

$$\varrho = a\omega, \qquad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

wo a eine Konstante ist, die wir als positiv annehmen können. Lassen wir ω die Werte von 0 bis $+\infty$ durchlaufen, so geht auch ϱ von 0 bis $+\infty$; wir erhalten so einen Zweig der Kurve, den man gewöhnlich als die ganze Archimedische Spirale bildend ansieht; aber, wenn wir unserer Anschauungsweise entsprechend (s. Note I am Ende des Buches) dem ω und ϱ auch negative Werte erteilen, so erhalten wir den zweiten Zweig, der symmetrisch zu dem ersten in Bezug auf die sekundäre Polaraxe ist; auf dieser schneiden sich die beiden Zweige, wodurch auf dieser unzählig viele Doppelpunkte der Kurve bestimmt

---

1) S. das Werk *Περὶ ἑλίκων*. — In dem Einleitungsbriefe erzählt Archimedes, dafs er früher dem Konon den Wortlaut mehrerer Sätze über die Spirale mitgeteilt habe; dies veranlafste Pappus, die Erfindung dieser Kurve dem Konon zuzuschreiben (*Pappus*, herausg. v. Hultsch, S. 234), und dieser Irrtum ist von vielen wiederholt worden. (Vgl. G. Loria, *Le scienze esatte etc.* Lib. II, Nr. 40.) Was den Versuch Sedillot's angeht (*De l'orgine de la semaine planétaire et de la spirale de Platon*, Bull. di Bibl. e Storia VI, 1873, oder C. R. LXXV, 1872) die Erfindung dieser Spirale auf Plato zurückzuführen, so scheint uns dieser verfehlt, weil die Spirale, auf die im Timaeus hingewiesen wird, nicht geometrisch definiert ist.

werden (Taf. XIV, Fig. 107)[1]). — Wechseln wir das Vorzeichen von a in Gl. (1), so erhalten wir eine rechtsgewundene Spirale, die zu der vorigen in Bezug auf die Polaraxe symmetrisch ist.

Die Archimedische Spirale unterscheidet sich nicht von der spiralis quadrantis von Bartolomäus Souvey (lat. Soverus)[2]); diese wird nämlich erzeugt von einem Punkte, der gleichförmig den Durchmesser eines Kreises durchläuft, während dieser eine Rotation von 90^0 ausführt. Die Kurve ist also durch eine Gleichung vom Typus (1) darstellbar; ist R der Radius des gegebenen Kreises, so mufs für $\omega = \frac{\pi}{2}$ $\varrho = R$ werden, also gleich $\frac{2R}{\pi}$, und Gleichung (1) wird dann

$$\varrho = \frac{2R\omega}{\pi},$$

welche Gleichung im wesentlichen mit (1) identisch ist.

Die Gleichung (1) lehrt uns beliebig viele Punkte der Archimedischen Spirale bestimmen, wenn nur der Kreis mit dem Radius a rektifiziert ist; umgekehrt also, wenn wir die Spirale in kontinuierlichem Zuge zeichnen könnten, würde man jeden beliebigen Kreis rektifizieren können; da dies nun thatsächlich sich mit Hilfe eines sehr einfachen Instrumentes ausführen läfst[3]), so ist klar, dafs die Archimedische Spirale eine Quadratrix ist; einer Bestätigung dessen werden wir alsbald begegnen. — Indessen wollen wir be-

---

1) Von diesen beiden die Spirale bildenden Zweigen kannten die Alten nur den einen. Die älteste Erwähnung des anderen Zweiges [ich drücke mich so aus, weil auch in dem Werke von S. Angelis, *De infinitorum spiralium spatiorum mensura* (Venetiis 1660) und in *De lineis curvis liber* (Pisis 1740) von P. Caraccioli von der Spirale nur ein einziger Zweig gezeichnet ist] findet sich in der *Introductio in analysin infinitorum* (II, Lausannae 1748, S. 301—302) von Euler. Später begegnen wir ihm in den *Elementi di algebra* von Pietro Paoli (Pisa 1798, I, S. 312), in der *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen* von Magnus (Berlin 1833, S. 313—14), in dem *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal* (Paris 1841) von Cournot, in den *Leçons de géométrie analytique* von Briot und Bouquet (9. Aufl. Paris 1878, S. 349), in der *Analytischen Geometrie* von R. Baltzer (Leipzig 1882) S. 153; ferner in der *Analytischen Geometrie* von M. Simon (Leipzig 1900, S. 23 u. 24). Richtig sind die Verhältnisse auch dargelegt in der hübschen Monographie von A. Michalitschke, *Die archimedische, die hyperbolische und die logarithmische Spirale*, 2. Aufl., Prag 1891, S. 6. In vielen anderen sehr verbreiteten Büchern jedoch ist die Archim. Spirale immer noch als halbe Kurve gezeichnet: s. *Encyclopédie methodique,* Planche IV der *Géométrie* Fig. 39; Montferrier, *Dictionnaire des sciences math.* Planche LVII, Fig. 12; Serret, *Calcul différentiel* (2. Aufl. Paris 1879) S. 359; Haas, *Kleyers Lehrbuch der Differentialrechnung,* III. Teil (Stuttgart 1894) S. 22 u. 180; u. s. w.

2) Vgl. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,* II. (2. Aufl., Leipzig 1900) S. 832.

3) Clifford, *Il senso comune nelle scienze esatte* (Mailand 1886) S. 197—99.

merken, dafs, wenn wir zu kartesischen Koordinaten übergehen, die Gleichnng (1) wird

$$\sqrt{x^2+y^2} - a \cdot \text{arc tg}\frac{y}{x} = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

die Gleichung der Tangente im Punkte (x, y) der Kurve lautet demnach

$$(X-x)\left\{x\sqrt{x^2+y^2}+ay\right\}+(Y-y)\left\{y\sqrt{x^2+y^2}-ax\right\}=0;$$

machen wir diese rational, so erhalten wir

$$(x^2+y^2)\left\{Xx+Yy-(x^2+y^2)\right\}^2 = a^2(Yx-Xy)^2.$$

Da nun diese Gleichung, wenn X, Y gegeben sind, eine Kurve sechster Ordnung darstellt, die den Punkt mit den Koordinaten X, Y zum Doppelpunkt hat, **so gehören die Berührungspunkte der von einem Punkte an eine Archimedische Spirale gezogenen Tangenten einer Kurve sechster Ordnung an, für welche jener Punkt ein Doppelpunkt ist.** Dies genügt zum Nachweise (vgl. Nr. **174**), dafs jede Archimedische Spirale einem Systeme angehört mit den Charakteristiken $\mu = 2$, $\nu = 4$.

183. Hat die bewegliche, die Spirale erzeugende Gerade n Umläufe vollendet, so ist der bewegliche Punkt vom Pole um eine Länge $ON = 2n\pi a$ entfernt; der Kreis mit dem Mittelpunkte O und dem Radius ON wird von Archimedes ‚der n^{te} Kreis' genannt; die Länge seiner Peripherie beträgt $4n\pi^2 a$. Nennen wir andererseits den Winkel, den die Tangente mit dem Radius vector bildet μ, so liefert uns die bekannte Formel

$$\text{tg}\,\mu = \varrho : \frac{d\varrho}{d\omega}$$

im vorliegenden Falle $\quad \text{tg}\,\mu = a\omega : a = \omega.$

Demnach ist die trigonometrische Tangente des Winkels, den der Radius vector ON mit der Tangente in seinem Endpunkte bildet $= 2n\pi$. Dies beweist, dafs die im Pole zur Polaraxe errichtete Senkrechte die genannte Tangente in einem Punkte trifft, dessen Abstand vom Pole $= 2n\pi a \cdot 2n\pi = 4n^2\pi^2 a$, d. i. gleich dem n-fachen der Peripherie des ‚n^{ten} Kreises'. Daraus ergiebt sich dann, dafs, wenn man die Tangente in N an die Spirale ziehen kann, man auch den Kreis rektifizieren kann und umgekehrt; damit haben wir eine neue — von Archimedes angegebene — Art, die besprochene Spirale als Quadratrix zu betrachten.

Ist S_t die Polarsubtangente, so hat man $S_t = \varrho^2 : \frac{d\varrho}{d\omega} = \frac{\varrho^2}{a}$; wenn man nun den Kreis um O beschreibt, der durch den Punkt $M(\varrho, \omega)$ der Spirale geht, so ist die Länge seines zwischen der Polaraxe und der Geraden OM gelegenen Bogens $= \varrho\omega = \frac{\varrho^2}{a} = S_t$; daraus ergiebt sich ein Verfahren, den Endpunkt der Subtangente zu finden und somit die Tangente zu konstruieren. Es ist dies das älteste Beispiel

der Konstruktion einer Tangente mit Benutzung der Subtangente, und sollte deswegen hier bemerkt werden. Dieser Konstruktion der Tangente ist jedoch eine andere vorzuziehen, die sich aus der Bemerkung ergiebt, **dafs bei der Archimedischen Spirale $\varrho = a\omega$ die Subnormale $\left(S_n = \frac{d\varrho}{d\omega}\right)$ konstant und zwar gleich a ist.**

Es sei E_n die vom Radius vector beschriebene Fläche, wenn ω zwischen $2(n-1)\pi$ und $2n\pi$ variiert, und C_n die Fläche des ‚n^{ten} Kreises‘, dann hat man

$$E_n = \frac{1}{2}\int\limits_{\omega=2(n-1)\pi}^{\omega=2n\pi} \varrho^2 \cdot d\omega = \frac{a^2}{2}\int\limits_{\omega=2(n-1)\pi}^{\omega=2n\pi} \omega^2 \cdot d\omega = \frac{a^2}{6}\left[8n^3\pi^3 - 8(n-1)^3\pi^3\right]$$

$$= \frac{4\pi^3 a^2}{3}(3n^2 - 3n + 1),$$

und

$$C_n = 4n^2\pi^3 a^2;$$

daher ist

$$\frac{E_n}{C_n} = \frac{2n\pi a \cdot 2(n-1)\pi a + \frac{1}{3}(2\pi a)^2}{(2n\pi a)^2},$$

welche Formel besagt: **Die zwischen der n^{ten} Windung der Archimedischen Spirale und der Anfangslage der bewegten Geraden gelegenen Fläche verhält sich zur Fläche des ‚n^{ten} Kreises‘ wie das Produkt der Peripherieen des $(n-1)^{\text{ten}}$ und n^{ten} Kreises, vermehrt um ein Drittel des Quadrates der Peripherie des ersten Kreises zum Quadrate der Peripherie des n^{ten} Kreises.** Aus dem vorigen Werte von E_n leitet man ab

$$E_n - E_{n-1} = 8(n-1)\pi^3 a^2;$$

im speziellen

$$E_2 - E_1 = 8\pi^3 a^2,$$

daher ist

$$\frac{E_n - E_{n-1}}{E_2 - E_1} = n - 1,$$

eine Beziehung, die leicht in Worte zu kleiden ist.

Betrachten wir nun die Fläche S des gemischtlinigen Dreiecks, das als Seiten einen Bogen der Spirale und die beiden Radienvectoren ϱ_1 und $\varrho_2 > \varrho_1$ hat, deren Endpunkte bezw. M_1 und M_2 seien. Man findet leicht

$$S = \frac{(\varrho_2{}^2 + \varrho_2\varrho_1 + \varrho_1{}^2)(\varrho_2 - \varrho_1)}{6a};$$

sind dann S_1 und S_2 die Flächen der von denselben Radienvectoren und den durch M_1 bezw. M_2 gehenden Bögen begrenzten Kreissektoren, so ist

$$S_1 = \frac{\varrho_1{}^2(\varrho_2 - \varrho_1)}{2a}, \qquad S_2 = \frac{\varrho_2{}^2(\varrho_2 - \varrho_1)}{2a}$$

und daher

$$A' = S - S_1 = \frac{(\varrho_2 - \varrho_1)^2(2\varrho_1 + \varrho_2)}{6a}, \qquad A'' = S_2 - S = \frac{(\varrho_2 - \varrho_1)^2(\varrho_1 + 2\varrho_2)}{6a};$$

$$\frac{A'}{A''} = \frac{\varrho_1 + \frac{2}{3}(\varrho_2 - \varrho_1)}{\varrho_1 + \frac{1}{3}(\varrho_2 - \varrho_1)}, \qquad \frac{S}{S_2} = \frac{\frac{1}{3}(\varrho_2 - \varrho_1)^2 + \varrho_1\varrho_2}{\varrho_2{}^2};$$

diese Gleichungen drücken algebraisch einige von Archimedes entdeckte Sätze aus.

Überblicken wir das hier Dargestellte, so sehen wir, dafs Archimedes zwei von den eine jede Kurve betreffenden drei Fundamentalproblemen für seine Spirale gelöst hat, nämlich die Tangente zu ziehen und die Quadratur, dagegen das Problem der Rektifikation unberührt gelassen hat. Diese wichtige Aufgabe wurde nicht nur von keinem der Zeitgenossen und unmittelbaren Nachfolger des Archimedes gelöst, sondern erst nach neunzehn Jahrhunderten in Angriff genommen und überwunden, als Bonaventura Cavalieri[1]), Gregor von St. Vincentius[2]), Roberval, B. Pascal[3]) und Fermat[4]) unabhängig voneinander entdeckten, dafs das Problem der Rektifikation einer Archimedischen Spirale identisch sei mit dem analogen für eine Parabel. Um diese Behauptung exakt nachzuweisen, betrachten wir die beiden Kurven

$$y^2 = 2px \quad . \quad . \quad (3), \qquad \varrho = \frac{a\omega}{2\pi}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

nennen deren Bogen bezw. s_p und s_s und haben dann

$$ds_p = \frac{1}{p}\, dy \sqrt{p^2 + y^2}, \qquad ds_s = \frac{2\pi}{a}\, d\varrho \sqrt{\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 + \varrho^2}; \quad . \quad . \quad (5)$$

daraus geht hervor, wenn man

$$p = \frac{a}{2\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

setzt, dafs der Bogen der Parabel (3), vom Scheitel bis zum Punkte mit der Ordinate $y = k$ gerechnet, gleich dem Bogen der Spirale (4) ist, gerechnet vom Pol bis zum Punkte mit dem Radius vector $\varrho = k$. Die Beziehung (6) zwischen den Konstanten a, p kann man in der Weise ausdrücken, dafs man sagt: Bei der betreffenden Parabel mufs der Punkt, welcher als Ordinate den Radius des ersten Kreises der Spirale hat, den halben Umfang dieses Kreises

1) *Geometria indivisibilis* (Bononiae 1635) Lib. VI.

2) *Opus geometricum* (Antwerpiae 1647).

3) S. die Abhandl. *Egalité des lignes spirales et paraboliques* (Oeuvres de B. Pascal V, La Haye 1779, S. 441), die nach der Behauptung C. Henry's (Bull. di Bibliogr. e Storia etc. XVII, 1884) auf das Jahr 1659 zurückgeht. In dem *Lettre de M. Detonville,* der dieser Schrift vorausgeht, wird gesagt, dafs Roberval zu demselben Schlusse gelangt sei, „mais sans en donner de démonstration autrement que par les mouvements dont on voit quelque chose dans le Livre des Hydrauliques du R. P. Mersenne.“

4) S. einen an Carcavi mutmafslich 1659 geschriebenen Brief (*Oeuvres de Fermat* II, S. 438—40).

als Abscisse haben. — Integrieren wir die erste der Gleichungen (4) unter der Bedingung, dafs der Scheitel der Parabel der Bogenanfang sei, so finden wir

$$s_p = \frac{y}{2p}\sqrt{p^2+y^2} + \frac{p}{2}\log\frac{y+\sqrt{p^2+y^2}}{p}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

diese Formel erklärt, was schon einer der Gründer der Akademie der Wissenschaften in Paris, Adrian Azout, beweisen konnte, dafs „estant donnée une droite égale à une parabole ou à une spirale, la quadrature de l'hyperbole est donnée et contra“[1]). Wir fügen noch hinzu, dafs, wenn man hyperbolische Funktionen einführt, indem man

$$y = p\,.\,\mathfrak{Sin}\,\varphi$$

setzt, die Gleichung (7) folgende einfache und elegante Form annimmt[2])

$$s_p = \frac{p}{4}(\mathfrak{Sin}\,2\varphi + 2\varphi)\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7')$$

184. Pappus hat bemerkt[3]), dafs die Archimedische Spirale auf eine ähnliche Weise wie die Quadratrix des Dinostratus (s. Nr. **178**) sich konstruieren liefse; er sagt: **Die Archimedische Spirale ist die Orthogonalprojektion der Schnittlinie einer geraden Schraubenfläche von ebener Leitfläche mit einem Rotationskegel, dessen Scheitel auf der Axe liegt, auf die Grundfläche des Kegels selbst.** Um dies zu beweisen, beachten wir, dafs die beiden Flächen, von denen Pappus spricht, durch folgende beiden Gleichungen dargestellt werden können:

$$\frac{2\pi z}{p} = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}, \qquad \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a} + \frac{z}{c} - 1 = 0\,.$$

Durch Elimination von z erhält man folgende Gleichung für die Projektionskurve:

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a} + \frac{p}{2\pi c}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = 1;$$

gehen wir zu Polarkoordinaten über, so wird diese

$$\varrho = \frac{ap}{2\pi c}\left(\frac{2\pi c}{p} - \omega\right),$$

die thatsächlich einer Archimedischen Spirale zugehört.

Während diese stereometrische Erzeugung der Kurve ein ausschliefslich theoretisches Interesse bietet, giebt es eine andere, von Clairaut entdeckte[4]), die sich für die Praxis als sehr nützlich er-

1) Vgl. einen Brief von C. Mylon an Huygens vom 31. Jan. 1659 (*Oeuvres de Huygens* II, S. 334).

2) Hoüel, *Cours de Calcul infinitésimal* II. (Paris 1879) S. 33; Günther, *Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen* (Halle a. S. 1881) S. 241.

3) *Pappus,* herausg. v. Hultsch, S. 262.

4) S. die Abh., betitelt: *De la spirale d'Archimède décrite par un mouvement pareil à celui qui donne la cycloïde, et de quelques autres courbes du même genre* (Mém. de Paris, Année MDCCXL, Paris 1742).

weist, indem sie die Idee für ein neues Instrument, um die Kurve in kontinuierlichem Zuge zu zeichnen, liefert[1]). Zu dieser neuen Erzeugung gelangte der französische Geometer, indem er aufsuchte die Spurlinie eines mit einem festen Kreise unveränderlich verbundenen Griffels, wenn die Ebene des Kreises sich so bewegt, dafs sie fortwährend mit einer festen Geraden r auf dem Kreise rollt. Um die Gleichung dieses Ortes zu finden, betrachten wir den Kreis $BMEI$ (Taf. XIV, Fig. 108) und zeichnen ihn auch in der bewegten Ebene in derjenigen Lage, bei welcher er die Gerade r im Fufspunkte A des von dem Spurpunkt S des Griffels auf die Gerade r gefällten Lotes berührt. Sei BE die Lage, welche der Durchmesser AS in der Lage $BMEI$ annimmt. Wir nehmen diesen Durchmesser als Polaraxe und seinen Mittelpunkt C als Pol; um nun die Gleichung des gesuchten Ortes zu bekommen, wird es genügen eine Beziehung zwischen dem Radius vector $CS = \varrho$ und dem Winkel $SCE = \omega$ aufzustellen. Wir nennen daher den Radius des festen Kreises a, ziehen durch C die Gerade IM senkrecht zu r, und durch S zu r die Parallele SH; CH, die Differenz zwischen SA und a, ist dann eine gegebene Gröfse, die wir mit b bezeichnen wollen. CS möge den festen Kreis in F schneiden. Alsdann haben wir

$$\text{arc}\, BM = AM = SH = \sqrt{\overline{CS}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{\varrho^2 - b^2} = \text{arc}\, IE.$$

$$\sphericalangle SCH = \sphericalangle \operatorname{tg} \frac{SH}{CH} = \sphericalangle \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\varrho^2 - b^2}}{b};$$

$$\text{arc}\, FI = a \,\text{arc tg} \frac{\sqrt{\varrho^2 - b^2}}{b}; \quad \text{arc}\, FE = a\omega.$$

Und da $$\text{arc}\, FE = \text{arc}\, FI + \text{arc}\, IE,$$

so ergiebt sich $$a\omega = a\,\text{arc tg} \frac{\sqrt{\varrho^2 - b^2}}{b} + \sqrt{\varrho^2 - b^2}. \quad \ldots \quad (8)$$

Wenn im speziellen $b = 0$, d. h. der Griffel im Mittelpunkte des bewegten Kreises steht, so vereinfacht sich diese Gleichung und wird zu

$$\varrho = a\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right),$$

welches eine Archimedische Spirale darstellt. Diese Betrachtungen lassen die Archimedische Spirale als Individuum einer ganzen Klasse von Kurven, den sog. allgemeinen Kreisevolventen[2]), erscheinen.

1) Über dieses Instrument sehe man Michelotti, *Recherches sur les moyens les plus convenables pour la division et la subdivision pratique des arcs circulaires* (Mém. de l'Acad. de Turin VI, 1792—1800) gedruckt 1801.

2) Über diese Kurven, deren Gleichung (8) ist, und andere von Clairaut in der citierten Abh. betrachtete, s. eine Beantwortung von V. Retali im IV. B. (1897) S. 252 des *Intermédiaire.*

Zu einer anderen ähnlichen neuen Klasse von Kurven glaubte Burgi gelangt zu sein[1]), indem er die Betrachtung von Kurven mit der allgemeinen Polargleichung $\varrho = a\omega + b$ . . . . (9)

einführte. Eine derartige Kurve erhält man offenbar durch Verlängerung aller Vectoren der Spirale (1) um die Länge b, mit anderen Worten, sie ist eine Konchoide (vgl. Nr. **69**) der Archimedischen Spirale; sie wurde Neoide genannt[2]). Beachtet man jedoch[3]), dafs, wenn man $\omega_1 = \omega + \frac{b}{a}$ setzt, die Gleichung (9) zu $\varrho = a\omega_1$ wird, so sieht man ein, dafs die Neoide von der Archimedischen Spirale nicht verschieden ist[4]). Somit sehen wir: **Verlängert man alle Radienvectoren einer Archimedischen Spirale um dieselbe Strecke, so erhält man eine zweite, der ursprünglichen gleiche Spirale.** Es ist hervorzuheben, dafs diese Eigenschaft für die Archimedische Spirale charakteristisch ist. In der That, wenn $\varrho = f(\omega)$ die Polargleichung einer Kurve von dieser Eigenschaft ist, so mufs es einen Winkel α geben derart, dafs für jeden beliebigen Wert von ω besteht

$$f(\omega) + b = f(\omega + \alpha),$$

oder auch $$b = \alpha f'(\omega) + \frac{\alpha^2}{2!} f''(\omega) + \cdots\cdots;$$

und damit dies eintrete, mufs sein $f'(\omega) = \frac{b}{\alpha}$, $f''(\omega) = 0, \ldots\ldots,$ folglich ist die Gleichung der fraglichen Kurven

$$\varrho = \frac{b}{\alpha}\omega + c,$$

w. z. b. w.

1) *Lehrbuch der Mathematik,* III. (Wien 1832) S. 241.

2) Vgl. Hoffmann, *Mathematisches Wörterbuch,* IV. (Berlin 1864) S. 194, wo auch die Anwendung der Neoide bei den Spinnmaschinen erwähnt wird.

3) Stegmann, *Verschiedene mathematische Bemerkungen* (Archiv VIII, 1846).

4) Somit bezieht sich die Note von W. Rulf, *Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes der Neoide mittelst eines Kegelschnittes* (Archiv, 2. Ser. XI, 1892) auf die Archimedische Spirale. — Die Identität der Neoide mit der Archimed. Spirale könnte den Namen Neoide im Katalog der speziellen Kurven verschwinden lassen, wenn er nicht noch in anderem Sinne angewandt wäre; nämlich in der Abh. von W. J. Macquorn Rankine, *On the mathematical theory of stream lines especially those of four foci and upwards* (Phil. Trans. CLXI, 1871) ist S. 268 die Rede von „Neoïds, that is ship-shape lines". Daselbst finden sich dann noch andere Kurven, die (nach dem griechischen κυκνοειδής) „Cycnoïdes, or swan-like lines" genannt sind; da die einen sowohl wie die anderen nur Bezug auf die angewandte Mathematik haben, so thun wir hier ihrer nur flüchtige Erwähnung.

Viertes Kapitel.

Die Spiralen höheren Grades.

185. Als unmittelbare Verallgemeinerung der Archimedischen Spirale sind zu betrachten diejenigen Kurven, die in Polarkoordinaten durch eine Gleichung von der Form

$$\varrho^k = a^k \frac{\omega}{2\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

dargestellt werden, wo k eine ganze positive Zahl ist; wir bezeichnen sie mit dem Namen Spiralen höheren Grades. Von ihnen spricht Fermat in einem an P. Mersenne unterm 3. Juni 1636 gerichteten Briefe[1]) und verspricht nicht nur eine vollständige Behandlung derselben, sondern führt auch Sätze an über diejenige, welche dem Falle $k = 2$ entspricht, und von der er annimmt, dafs sie die wunderbare Kurve (παϱάδοξος γϱαμμή) sei, die, nach der Aussage des Pappus[2]), von dem Geometer Menelaus von Alexandrien erfunden wurde[3]). Die Entdeckungen Fermats wurden durch Mersenne bekannt gemacht, der von ihnen im zweiten Teile seiner *Harmonie universelle* (Paris 1637) spricht, und ferner in den *Cogitata physico-mathematica* (Lutetia. Paris. 1644); ebenderselbe erwähnt ihrer in einem Briefe an C. Huygens vom 22. Mai 1648[4]), wo die Aufgabe gestellt wird, das Verhältnis der vom Radius vector beschriebenen Fläche A, wenn der Winkel ω von 0 bis 2π variiert, zum Inhalte C des Kreises mit dem Radius a und dem Centrum O (den wir auch hier den ersten Kreis nennen) zu bestimmen. Diese Aufgabe läfst sich mit unseren Methoden leicht lösen; da nämlich

$$A = \frac{1}{2}\int\limits_{\omega=0}^{\omega=2\pi} \varrho^2 \cdot d\omega = \frac{k\pi}{a^k}\int\limits_{\varrho=0}^{\varrho=a} \varrho^{k+1} \cdot d\varrho = \frac{k\pi a^2}{k+1}, \quad \text{und} \quad C = \pi a^2,$$

so hat man sofort $\qquad A : C = k : (k+2)$;

für $k = 1$ haben wir einen Satz des Archimedes (s. Nr. **183**) wieder, während wir für $k > 1$ einen Satz erhalten, der mit anderen von Stephano de Angelis[5]) und John Wallis übereinstimmt, und

---

1) *Oeuvres de Fermat* II, S. 12—14, und III, S 277—78.

2) *Pappus,* herausg. v. Hultsch, S. 270.

3) Diese Ansicht des berühmten Senators von Toulouse fand wenige Anhänger, weil man allgemein annimmt, dafs die „wunderbare" Kurve doppelter Krümmung sei; s. G. Loria, *Le scienze esatte nell' antica grecia*, Lib. III n. 35 (Mem. dell' Acc. di Modena, II. Ser. XII, 1900).

4) *Oeuvres de Huygens* I, S. 95.

5) *De infinitorum spiralium spatiorum mensura* (Venetiis 1660), wo die Kurve (1) für $k = 1$ spiralis linearis, für $k = 2$ spiralis secunda seu quadratica, für $k = 3$ spiralis tertia seu cubica u. s. w. genannt wird.

der von R. de Sluse in einem Briefe an Huygens vom August 1663 mitgeteilt wird[1]).

Ist μ der Winkel, den die Tangente an die Spirale mit dem zum Berührungspunkt gehenden Radius vector bildet, so liefert Gl. (1) $\operatorname{tg}\mu = \varrho : \frac{d\varrho}{d\omega} = k\omega$, woraus man eine Methode ableiten kann, die Tangente zu konstruieren; andere erhält man, wenn man beachtet, daſs die Polar-Subtangente und Subnormale ausgedrückt werden durch $2k\pi\frac{\varrho^{k+1}}{a^k}$ bezw. $\frac{1}{2k\pi}\frac{a^k}{\varrho^{k-1}}$.

Die zu Ende von Nr. **182** für die Archimedische Spirale ausgeführte Rechnung läſst sich mit leichten Modifikationen der durch Gleichung (1) dargestellten Kurve anpassen und zeigt, daſs auch diese Kurve einem Systeme angehört, dessen Charakteristiken jedoch einen verschiedenen Ausdruck haben, jenachdem k gerade oder ungerade ist. Dieses verschiedene Verhalten in diesen beiden Fällen zeigt sich auch, wenn wir die Gestalt unserer Kurve untersuchen; nämlich, wenn k gerade ist, muſs man, um reelle Punkte der Kurve zu erhalten, dem ω positive Werte erteilen, und hat dann für jedes ω zwei gleiche aber entgegengesetzte Werte von ϱ, daher ist die Kurve symmetrisch in Bezug auf den Pol (der ein Punkt der Kurve ist); wenn hingegen k ungerade ist, so entsprechen zwei gleichen und entgegengesetzten Werten von ω gleiche und entgegengesetzte Werte von ϱ, daher ist jetzt die Kurve symmetrisch in Bezug auf die sekundäre Polaraxe.

Die Rektifikation der Spiralen höheren Grades liefert einen von Fermat gefundenen Satz, der eine Verallgemeinerung des Cavalieri'schen ist, den wir in Nr. **183** bewiesen haben. Um zu erkennen, worin dieser Satz besteht, beachten wir, daſs wenn s_s der Bogen der Spirale (1) ist

$$ds_s = \sqrt{\varrho^2 + \varrho^2 d\omega^2} = \frac{2k\pi}{a^k}\, d\omega \sqrt{\left(\frac{a^k}{2k\pi}\right)^2 + \varrho^{2k}};$$

bezeichnen wir anderseits mit s_p den Bogen der Parabel $(k+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, die durch die Gleichung

$$y^{k+1} = (k+1)p^k x$$

dargestellt wird, so haben wir

$$ds_p = \frac{1}{p^k}\, dy \sqrt{p^{2k} + y^{2k}}.$$

Damit ist gezeigt, daſs der Spiralenbogen vom Pol bis zum Punkte $\varrho = c$ gleich dem Parabelbogen vom Scheitel bis zum Punkte $y = c$ ist, vorausgesetzt, daſs zwischen den Konstanten a und p die Beziehung besteht

$$a = \sqrt[k]{2k\pi} \cdot p.$$

1) *Oeuvres de Huygens* IV, S. 399.

Für $k = 1$ erhalten wir den Cavalieri'schen Satz wieder; für ein beliebiges k erhalten wir einen Satz, den E. Torricelli an Michelangelo Ricci am 24. Aug. 1644 mitteilte[1]), und den Fermat dem Carcavy in einem Briefe bekannt gab, der am 13. Sept. 1659 dem Huygens übermittelt wurde[2]). Es ist merkwürdig, dafs Huygens in der Antwort an Carcavy vom 26. Febr. 1660 bemerkt hat: „La comparaison des autres sortes de spirales avec les lignes paraboloides que donne M. de Fermat est véritable, mais non pas fort difficile à trouver après que la première est connüe. Et je m'estonne qu'il prend plaisir à inventer des lignes nouvelles, qui n'ont pas autrement des proprietez dignes de considération"[3]). Hierdurch getroffen, antwortete Fermat dem Huygens durch Vermittelung von Carcavy[4]), dafs für $k = \frac{1}{2}$ seine Spirale ebenso wie die entsprechende Parabel (s. Nr. **118**) sich der bemerkenswerten Eigenschaft erfreuten, rektifizierbar zu sein, eine wichtige Bemerkung, da sie zeigt, dafs Fermat seine Betrachtungen nicht auf den Fall, dafs bei den durch Gleichung (1) dargestellten Spiralen k eine ganze Zahl sei, beschränkt hat. Wir wollen noch hinzufügen, dafs man eben diese Spirale ($k = \frac{1}{2}$) erhält, wenn man den Ort der Endpunkte der Polar-Subtangenten einer Archimedischen Spirale aufsucht.

186. Der Briefwechsel Fermats enthält auch Mitteilungen über eine andere Kurve, deren Erfindung man dem Galilei zuschreibt[5]); nachdem sie unrechtmäfsiger Weise Helix Baliani genannt worden war[6]), bezeichnet man sie heute mit dem Namen Galilei'sche Spirale. Sie ist unter die physikalisch-mathematischen Kurven zu rechnen, da sie definiert wird als „die Linie, die ein materieller, schwerer frei fallender Punkt in Bezug auf die mit ihrer täglichen Bewegung begabte Erde beschreibt". In Polarkoordinaten wird sie durch eine Gleichung von folgender Form wiedergegeben

$$\varrho = a - b\omega^2 \qquad (2)$$

Da diese Gleichung sich nicht ändert, wenn man das Vorzeichen von ω wechselt, so ist die Galilei'sche Spirale symmetrisch in Bezug auf die Polaraxe; der Pol ist ein Doppelpunkt und die bezüglichen Tan-

1) S. G. Ghinassi, *Lettere fin qui inedite di Evangelista Torricelli* (Faenza 1864) S. 17—19.

2) *Oeuvres de Huygens* II, S. 538; *Oeuvres de Fermat* II, S. 441. S. auch die an Laloubère gesandten und von diesem 1660 in dem Anhange zu dem Werke *Veterum geometria promota in septem de cycloide libris* veröffentlichten Sätze; neugedruckt in *Oeuvres de Fermat* I, S. 206, und III, S. 178.

3) *Oeuvres de Huygens* III, S. 27.

4) S. Fermat's Brief vom 25. Juni 1660, veröffentlicht in *Oeuvres de Huygens* III, S. 89, und *Oeuvres de Fermat* II, S. 448.

5) *Oeuvres de Fermat* II, S. 12.

6) Vgl. die Bemerkungen P. Tannery's im *Intermédiaire* III, 1896, S. 78 u. 213.

genten bilden mit der Polaraxe einen Winkel gleich $\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$, die Kurve hat ferner auf der Axe selbst unzählig viele Doppelpunkte, nämlich diejenigen, für welche $\varrho = a - bk^2\pi^2$, wo k eine ganze positive oder negative Zahl ist; für $k = 0$ aber erhält man einen einfachen Punkt mit einer zur Polaraxe senkrechten Tangente. Da die Subnormale ausgedrückt wird durch $S_n = -2b\omega$, so sieht man, **dafs die Archimedische Spirale der Ort der Endpunkte der Polar-Subnormalen einer Galilei'schen Spirale ist.** Andere Eigenschaften sind bis jetzt an dieser Spirale nicht aufgefunden worden, und sie scheint also mehr ein historisches Interesse zu besitzen.

Die Galilei'sche Spirale kann als ein Spezialfall einer anderen physikalisch-mathematischen Kurve aufgefafst werden, zu der Varignon[1]) gelangte, als er jene Frage verallgemeinerte die, wie wir in Nr. **119**, I. gesehen haben, Leibniz im Verlaufe seines berühmten Streites mit den Cartesianern vorgelegt hat. Es ist die Isochrone unter der Annahme, dafs der Mittelpunkt der Erde sich nicht mehr in unendlicher, sondern in endlicher Entfernung befinde. Durch Betrachtungen, die hier wiederzugeben keinen Wert hat, erhielt der genannte französische Geometer als Differenzialgleichung der fraglichen Kurve in Polarkoordinaten folgende

$$\frac{l\sqrt{a}}{c}\cdot d\omega = \frac{\sqrt{\varrho - a}\cdot d\varrho}{c-\varrho}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wo a, c, l gegebene positive Konstanten sind. Die Integration dieser Gleichung ist ausführbar; Varignon hat sie jedoch nicht ausgeführt, und somit entging ihm eine wichtige Einteilung, nämlich die der drei Fälle $c > a$, $c = a$ und $c < a$.

I. Ist $c > a$, so setze man $\varrho = a + u^2$, $c = a + k^2$, dann wird Gleichung (1)

$$\frac{l\sqrt{a}}{c}\cdot d\omega = du\left\{k\left(\frac{1}{u+k} - \frac{1}{u-k}\right) - 1\right\};$$

diese läfst sich leicht integrieren und giebt (bei geeigneter Wahl der Integrationskonstanten)

$$\frac{l\sqrt{a}}{c}\,\omega = k\log\frac{u+k}{u-k} - u.$$

Setzen wir aber für u und k ihre Werte wieder ein, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{l\sqrt{a}}{c}\,\omega = \sqrt{c-a}\log\frac{\sqrt{\varrho-a}+\sqrt{c-a}}{\sqrt{\varrho-a}-\sqrt{c-a}} - \sqrt{\varrho-a}, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

---

1) Siehe *Méthode pour trouver des courbes le long desquelles un corps tombant, s'approche ou s'éloigne de l'horizon en telle raison de tems qu'on voudra, et dans quelque hypothèse de vitesses que ce soit etc.* (Mém. de Paris, 1699).

welche in anderer Form zuerst von L. Mascheroni[1]) aufgestellt wurde. Da, wenn man $\varrho = c$ setzt, sie $\omega = \infty$ liefert, so wird die Kurve offenbar unendlich viele Windungen um den Pol machen. Schreiben wir Gleichung (2) folgendermafsen

$$\frac{l\sqrt{a}}{c\sqrt{c-a}}\,\omega = \log\frac{\sqrt{\frac{\varrho-a}{c-a}}+1}{\sqrt{\frac{\varrho-a}{c-a}}-1} - \sqrt{\frac{\varrho-a}{c-a}},$$

setzen alsdann $\sqrt{\frac{\varrho-a}{c-a}} = \vartheta$, so können wir erkennen, dafs man an Stelle von (2) zur analytischen Darstellung der Kurve auch folgendes Gleichungspaar benutzen kann:

$$\varrho = a + (c-a)\,\vartheta^2, \qquad \omega = \frac{c\sqrt{c-a}}{l\sqrt{a}}\left(\log\frac{\vartheta+1}{\vartheta-1} - \vartheta\right).$$

II. Wenn $c = a$, so wird Gleichung (1)

$$\frac{l}{\sqrt{a}}\cdot d\omega + \frac{d\varrho}{\sqrt{\varrho-a}} = 0;$$

durch Integration ergiebt sich

$$\varrho = a + \frac{l^2}{4a}\,\omega^2, \qquad (4)$$

welche Gleichung eine Galilei'sche Spirale (mit isoliertem Punkte) darstellt.

III. Wenn endlich $c < a$, so setzen wir $a = c + k^2$, $\varrho = a + u^2$; Gleichung (1) wird dann

$$\frac{l\sqrt{a}}{2c}\cdot d\omega + du - k^2\frac{du}{u+k^2} = 0,$$

und dann bei günstiger Wahl der Integrationskonstanten

$$\frac{l\sqrt{a}}{2c}\,\omega + u - k \operatorname{arc\,tg}\frac{u}{k} = 0.$$

Setzen wir für u, k ihre Werte wieder ein, so erhalten wir

$$\frac{l\sqrt{a}}{2c}\,\omega + \sqrt{\varrho-a} - \sqrt{a-c}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\varrho-a}}{\sqrt{a-c}} = 0. \qquad (5)$$

Dieser Gleichung wird Genüge gethan durch $\varrho = a$, $\omega = 0$, daher beginnt die Kurve in einem Punkte der Polaraxe. Schreiben wir Gleichung (5) folgendermafsen

$$\frac{l\sqrt{a}}{2c\sqrt{a-c}}\,\omega = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\varrho-a}{a-c}} - \sqrt{\frac{\varrho-a}{a-c}},$$

und setzen $\sqrt{\frac{\varrho-a}{a-c}} = \vartheta$, so erkennen wir, dafs die fragliche Kurve

---

1) Siehe einen gedruckten Brief, gerichtet *Al Nobile Signor Achille Alessandri,* datiert von Bergamo d. 19. Sept. 1782.

in diesem Falle auch durch folgende beiden Gleichungen dargestellt werden kann

$$\varrho = a + (a - c)\,\vartheta^2, \qquad \omega = \frac{2c\sqrt{a-c}}{l\sqrt{a}}\,(\operatorname{arc\,tg}\vartheta - \vartheta)\,. \quad . \quad (6)$$

Aus den Gleichungen (3), (4), (6) geht hervor, daſs die Varignon'sche Isochrone eine in Bezug auf die Polaraxe symmetrische Kurve ist; die eingehendere Diskussion derselben überlassen wir dem Leser.

187. Ebenfalls ein mehr historisches Interesse bieten die ∞^2 Kurven, die mit Variation der Konstanten a und p, durch die Gleichung

$$(\varrho - a)^2 = 2ap\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

dargestellt werden; wenn im speziellen a gegen 0, p gegen ∞ konvergiert in der Weise, daſs $\lim 2ap = \frac{b^2}{2\pi}$, wo b eine neue endliche Konstante ist, so wird Gleichung (3) zu

$$\varrho^2 = b^2 \frac{\omega}{2\pi},$$

und stellt dann eine Fermat'sche Spirale dar (vgl. Nr. **185**). Die durch Gleichung (3) dargestellten Kurven wurden von Jakob Bernoulli betrachtet[1]), der wegen der Analogie der Gl. (3) mit der einer Parabel, jede solche Kurve als „parabola helicoïdes, vel, si mavis, spiralis parabolica" bezeichnete; die Späteren gaben dem Namen „parabolische Spirale" den Vorzug, den auch wir anwenden wollen. Die betreffenden Kurven zeigen sehr verschiedene Gestalt, je nach dem Werte des Verhältnisses $\frac{a}{p}$ (Bernoulli hat insbesondere den Fall $\frac{a}{p} = 4\pi$ betrachtet); man kann aber jene Konstanten immer als positiv annehmen, dann entsprechen die reellen Punkte der Kurve positiven Werten von ω; zu jedem gehören zwei gleiche und entgegengesetzte Werte von ϱ, somit haben alle parabolischen Spiralen ein Centrum.

Auf die parabolischen Spiralen hat Bernoulli, von 1691 an, die Methoden angewandt, die Leibniz 1684 der mathematischen Welt mitgeteilt hat. So bestimmte er die Tangente, indem er bemerkte, daſs die Polar-Subnormale durch $\frac{d\varrho}{d\omega} = \frac{ap}{\varrho - a}$ gegeben wird, welcher Ausdruck leicht zu konstruieren ist und zeigt, daſs $\varrho^2\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{ap}{2}$ die Gleichung des Ortes der Endpunkte der Subnormalen ist, somit ist dieser Ort ein Lituus (s. Nr. **190**). Ähnlich bestimmte Bernoulli die Maxima und Minima von ϱ und ω; ersteres führte er auf die Untersuchung einer algebraischen Gleichung zwischen ω und $\operatorname{tg}\omega$ zurück; wenn nun ω und $\operatorname{tg}\omega$ durch eine algebraische Relation ver-

1) *Specimen calculi differentialis in dimensione parabolae helicoidis etc.* (Acta erudit. Jan. 1691 oder auch *Jacobi Bernoulli opera* I, S. 431; vgl. *Joh. Bernoulli opera* I, S. 46—47).

knüpft wären, so könnte man die vorige Gleichung umgestalten so, dafs sie algebraisch in ω wäre; ihre Wurzeln wären demnach der Zahl nach begrenzt, und die Grenzwerte von ϱ wären demnach in endlicher Zahl vorhanden. Nun zeigt aber die Gestalt der parabolischen Spirale, dafs ϱ im Gegenteil unzählig viele Maxima erhalten kann; somit ist die Annahme, dafs zwischen ω mit $\operatorname{tg}\omega$ eine algebraische Relation bestehe, eine absurde; insbesondere, macht man $\omega = \frac{\pi}{4}$, so sieht man, dafs π nicht die Wurzel einer algebraischen Gleichung sein kann[1]). Es ist dies vielleicht der älteste Versuch, die Unmöglichkeit einer algebraischen Lösung des Problems der Quadratur des Kreises nachzuweisen.

Die Wendepunkte der Spirale (3) erhält man, indem man Gl. (3) mit folgender kombiniert

$$\varrho^2 + 2\left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2 - \varrho\,\frac{d^2\varrho}{d\omega^2} = 0,$$

wir erhalten also

$$(a-\varrho)^5 - 2a(a-\varrho)^4 + a^2(a-\varrho)^3 + 3p^2a^2(a-\varrho) - p^3a^3 = 0;$$

die ähnliche Aufsuchung der Doppelpunkte wurde von Bernoulli nicht in Angriff genommen, kann aber ohne Schwierigkeit ausgeführt werden. Hingegen hat er sich mit der Quadratur der Kurve beschäftigt; es ist leicht, seine Schlüsse zu kontrollieren, wenn man beachtet, dafs

$$\frac{1}{2}\int \varrho^2 \cdot d\omega = \frac{1}{2ap}\int \varrho^2(\varrho - a)\cdot d\varrho = \frac{\varrho^2}{2p}\left(\frac{\varrho}{4a} - \frac{1}{3}\right) + Const.$$

Folglich erhält man, wenn man $2p = \frac{a}{2\pi}$ setzt und das Integral zwischen $\varrho = 0$ und $\varrho = a$ nimmt, $\frac{1}{6}\pi a^2$, wie auch Bernoulli gefunden hat.

Viel schwieriger und interessanter ist das Problem der Rektifikation der parabolischen Spirale; Jak. Bernoulli entdeckte, als er sich mit diesem beschäftigte, eine äufserst bemerkenswerte — auch bei anderen Kurven auftretende[2]) — Thatsache, die wir hier mitteilen wollen.

Es sei s der Spiralbogen, so liefert uns Gleichung (3)

$$s = \int d\varrho\sqrt{1 + \left(\varrho\frac{d\omega}{d\varrho}\right)^2} = \int d\varrho\sqrt{1 + \varrho^2\left(\frac{\varrho - a}{pa}\right)^2},$$

folglich hängt die Berechnung des s von elliptischen Integralen ab. Wenn wir nun die Betrachtung einer Kurve einführen, die durch folgende Gleichung dargestellt wird

1) Bernoulli fügt hinzu, dafs man ähnlich die Unmöglichkeit der algebraischen Quadratur „ullius curvae geometricae in se redeuntis" beweisen könne, welche Behauptung man wohl bezweifeln dürfte.

2) Enneper, *Elliptische Funktionen,* II. Aufl. (Halle a. S. 1890) S. 526 ff.

$$y^2 = 1 + \frac{x^2(x-a)^2}{a^2p^2},$$

so sieht man, dafs die Rektifikation der parabolischen Spirale, mit der Quadratur dieser Kurve äquivalent ist. Diese Kurve, oder besser die zu ihr affine und durch die Gleichung

$$y^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{x^2(x-a)^2}{4p^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

dargestellte, läfst sich nun auf folgende Weise konstruieren: „Es sei C der Mittelpunkt eines Kreises mit dem Durchmesser a, der im Anfangspunkte O die y-Axe berührt (Taf. XIV, Fig. 109). Wir nehmen nun auf Ox beliebig die beiden Strecken $CW = CZ$, ziehen in dem Kreise die zugehörigen Ordinaten WT und ZX und bestimmen den Schnittpunkt S von TX mit der y-Axe. Es sei nun A ein Punkt der x-Axe, derart, dafs $OA = 2p$. Man trage nun auf derselben Axe $OK = OS$ ab, ziehe AS und durch K die Parallele zu dieser Geraden; ist R der Schnittpunkt mit Oy, und trägt man die Strecke CR von W und Z aus auf den Geraden WT und ZX ab, so erhält man vier Punkte P der Kurve (4).“ Wir überlassen den Beweis dem Leser und bemerken, dafs aus der Konstruktion hervorgeht, dafs die Kurve (4) zur Geraden $x = \frac{a}{2}$ symmetrisch ist; demnach enthält sie unendlich viele Paare gleichgrofser Flächenstücke, und damit ist gezeigt: **Die parabolische Spirale enthält trotz der Unregelmäfsigkeit ihrer Gestalt unendlich viele Paare gleichlanger Bogen**; es ist dieses die hervorragendste geometrische Eigenschaft, welche sie besitzt[1]).

Fünftes Kapitel.

Andere algebraische Spiralen.

188. Das Wort „Spirale“, welches wir auf den vorhergehenden Seiten gebrauchten, geht in das entfernteste Altertum zurück, indem es dort eine Bahnlinie im astronomischen System Plato's bedeutete[2]),

---

1) Weitere, die obige Kurve und die bezüglichen Arbeiten betreffende Verhältnisse finden sich in der sorgfältigen Monographie von G. D. E. Weyer angegeben, *Ueber die parabolische Spirale* (Kiel und Leipzig, 1894); vgl. auch Wolfram, *Die apollonisch-parabolische Spirale* (Progr. Hof, ohne Jahreszahl).

2) A. Sédillot, *De l'origine de la semaine planétaire et de la spirale de Platon* (Bull. di bibl. e stor. VI, 1873, und C. R. XXVII, 1872) und Th. H. Martin, *Hypothèse astronomique de Platon* (Mém. de l'Ac. des Inscriptions et Belles Lettres, XXX, 1. Teil, 1881) S. 46—48. — Es möge angeführt werden, dafs im XXI. Kap. der *Astronomie* des Theon von Smyrna (s. Théon de Smyrne, *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon*, éd. Dupuis, Paris 1892, S. 328) von einer anderen astronomischen Spirale die Rede

jedoch der entsprechende allgemeine Begriff hat noch nicht jenen Grad der Präzision erlangt, den ein mathematischer Begriff erfordert[1]); vorläufig wollen wir als Spiralen[2]) bezeichnen alle Kurven, deren einfachste und geeignetste analytische Darstellung man bei der Anwendung von Polarkoordinaten erhält. Solcher Art sind die Kurven, welche die Polargleichung

$$\varrho = \frac{f(\omega)}{\omega + \varphi(\omega)}$$

haben, wo f und φ rationale Funktionen der trigonometrischen Linien des Winkels ω selbst, oder eines Vielfachen oder aliquoten Teiles desselben sind[3]); solcher Art sind diejenigen Kurven, die durch eine algebraische Gleichung zwischen ϱ und ω dargestellt werden, und die man passend als algebraische Spiralen bezeichnen kann[4]). Sei nun

$$f(\varrho, \omega) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

die Gleichung einer solchen Spirale; f sei vom Grade p in ω, und überhaupt vom Grade n. Da nun $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\omega = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$, so sieht man, dafs

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\varrho^2}\left\{\varrho x \frac{\partial f}{\partial \varrho} - y \frac{\partial f}{\partial \omega}\right\}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\varrho^2}\left\{\varrho y \frac{\partial f}{\partial \varrho} + x \frac{\partial f}{\partial \omega}\right\},$$

und demnach

$$(X - x)\left\{\varrho x \frac{\partial f}{\partial \varrho} - y \frac{\partial f}{\partial \omega}\right\} + (Y - y)\left\{\varrho y \frac{\partial f}{\partial \varrho} + x \frac{\partial f}{\partial \omega}\right\} = 0 \ . \quad (2)$$

---

ist; sie ist von ähnlicher Gestalt wie die Sinuslinie und wird beschrieben von einer Welle, die gezwungen wird zwischen zwei Schranken zu bleiben; s. auch Martin a. a. O. S. 49.

1) S. die Artikel *Spirale* in der *Encyclopédie methodique,* im *Mathematischen Wörterbuch* von Hoffmann und im *Dictionnaire des sciences math.* von Montferrier. Vgl. ferner Brocard, *Notes de bibliographie des courbes géometriques*, Partie complémentaire (Bar Le-Duc, 1899) S. 166.

2) Andere (s. Montferrier a. a. O. II, S. 410) wenden den Namen Radial-Kurven an.

3) G. Fouret, *Sur la construction de la tangente à la courbe* $\varrho = \frac{f(\omega)}{\omega + \varphi(\omega)}$, *$f(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ désignant des fonctions rationelles des lignes trignometriques de l'angle ω, de ses multiples ou de ses parties aliquotes* (Nouv. Ann. 2. Ser. XIX, 1880).

4) Dieser Name wird in dem angegebenen Sinne gebraucht von W. Rulf in der Abh. *Geometrische Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes der algebraischen Spiralen* (Monatshefte III, 1892). Sylvester dagegen (Phil. Magazine, 4. Ser. XXXVI, 1868) gebraucht ihn, um eine Kurve zu bezeichnen, bei welcher die Länge des vom Pole auf die Tangente gefällten Lotes eine algebraische Funktion des Kontingenzwinkels ist; insbesondere kann man die sog. „ganzen Spiralen" betrachten, welches successive Evolventen des Kreises sind, von denen wir in Nr. 251 sprechen werden. — Algebraische Spiralen in unserem Sinne sind insbesondere die parabolischen und hyperbolischen Spiralen höherer Gattungen, womit J. Sobotka sich eingehend beschäftigt hat (*Zur infinitesimalen Geometrie einiger Plancurven,* Prager Ber. 1898); ihre allgemeine Gleichung ist $\varrho^n = a^n \omega^p$ $(p \mp n)$.

die Gleichung der Tangente an die Spirale im Punkte (x, y) ist. Eliminieren wir ω aus dieser mit Berücksichtigung von Gleichung (1) und setzen für ϱ seinen Wert $\sqrt{x^2+y^2}$, so erhalten wir die Gleichung des Ortes der Berührungspunkte der vom Punkte (X, Y) an die Kurve gezogenen Tangenten. Man gelangt so immer zu einer algebraischen Gleichung, und **daher gehören alle algebraischen Spiralen einem algebraischen Systeme an**; die Charakteristiken desselben haben jedoch verschiedene Werte, je nach den Fällen:

I. Wenn in Gleichung (2) ω nicht auftritt, so stellt sie ohne weiteres den genannten Ort dar. Dieser Umstand tritt ein, wenn

$$\frac{\partial}{\partial \omega}\left(\varrho x \frac{\partial f}{\partial \varrho} - y \frac{\partial f}{\partial \omega}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \omega}\left(\varrho y \frac{\partial f}{\partial \varrho} + x \frac{\partial f}{\partial \omega}\right) = 0,$$

d. h. $\frac{\partial^2 f}{\partial \varrho\, \partial \omega} = \frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2} = 0$, d. h. wenn $f = a\omega + \varphi(\varrho)$ ist (das einfachste Beispiel einer solchen Kurve bietet uns die Archimedische Spirale). Wenn bei diesem Falle in (2) nur gerade Potenzen von ϱ auftreten, so ist sie rational in x und y, stellt daher eine Kurve dar, deren Ordnung gleich dem Grade m der Gleichung (2) in x, y, die einfach durch den Punkt (X, Y) geht. Daher gehört die Kurve einem Systeme an, dessen Charakteristiken $\mu = 1$, $\nu = m - 1$ sind. Wenn jedoch in (2) auch ungerade Potenzen von ϱ vorkommen, so ist eine Erhebung ins Quadrat notwendig, und ist diese ausgeführt, so sieht man, dafs dann die Charakteristiken des Systems $\mu = 2$ und $\nu = 2(m-1)$ sind.

II. Wenn hingegen in Gleichung (2) ω im Grade q auftritt, so führt die vermittelst der dialytischen Methode von Sylvester ausgeführte Elimination von ω aus den Gleichungen (1) und (2) zu einer Gleichung, deren linke Seite eine Determinante von der Ordnung $p + q$ ist, in welcher die Elemente der ersten q-Horizontalreihen mit einem der beiden Faktoren $(X - x)$ oder $(Y - y)$ behaftet sind; wenn nun diese linke Seite nur gerade Potenzen von ϱ enthält, so geht der betrachtete Ort q-mal durch den Punkt (X, Y), anderenfalls $2q$-mal durch den Punkt hindurch. Die Spirale gehört also einem System an, für welches $\mu = q$ oder $= 2q$ ist; die andere Charakteristik, ν, ergiebt sich aus der Betrachtung der genannten resultierenden Gleichung, die, wenn nötig, rational gemacht ist.

189. Zu der grofsen Kategorie der algebraischen Spiralen gehören nicht nur diejenigen, die wir in den vorigen Kapiteln behandelt haben, sondern auch eine andere nicht weniger beachtenswerte, zu deren Untersuchung wir uns jetzt wenden.

Wenn man eine Archimedische Spirale einer Transformation durch reziproke Radienvectoren unterwirft, deren Centrum im Auge der Spirale liegt, so bekommt man eine andere Kurve, die in Polarkoordinaten durch eine Gleichung von folgender Form dargestellt wird

$$\varrho\omega = a \qquad (3)$$

Sie findet sich — unter anderen allgemeineren — in einer Abhandlung von Varignon, die der Pariser Akademie im Jahre 1704 vorgelegt, aber erst 1722 veröffentlicht wurde[1]); sie wurde ferner auch von Joh. Bernoulli entdeckt, der in einem französisch geschriebenen Briefe an Hermann vom 7. Okt. 1710 sie Spirale hyperbolique[2]) nannte, und ungefähr drei Jahre später, als er die Analogieen sowohl, als auch die Verschiedenheiten zwischen ihr und der Archimedischen erkannt hatte, schrieb: „ita ut non incongrue haec spiralis vocari possit Hyperbolica, vel etiam Archimedea inversa; utpote, quae cum Archimedea ordinaria hoc commune habet, quod in utraque distantiae punctorum ab umbilico sint proportionales circulationibus emensis, in Archimedea vulgari directe, in nostra vere inverse“[3]). Der Name hyperbolische Spirale ist nun allgemein angenommen worden in Hinsicht auf die Analogie der Gleichung (3) mit der einer auf die Asymptoten als Axen bezogenen Hyperbel.

Die Gleichung (3) zeigt uns, dafs gleichen und entgegengesetzten Werten von ω auch gleiche und entgegengesetzte Werte von ϱ entsprechen; folglich ist die hyperbolische Spirale eine in Bezug auf die sekundäre Polaraxe symmetrische Kurve, auf dieser befinden sich unendlich viele Doppelpunkte (Taf. XIV, Fig. 110). Lassen wir ω bis $\pm\infty$ gehen, so geht ϱ in 0 über; **demnach ist der Pol ein asymptotischer Punkt der Kurve**; machen wir hingegen $\omega = 0$, so erhalten wir $\varrho = \infty$, folglich geht die Kurve durch den unendlich fernen Punkt der Polaraxe, und da Gleichung (1) uns sagt, dafs

$$\lim_{\omega=0} (\varrho \sin\omega) = \lim_{\omega=0} \left(a \frac{\sin\omega}{\omega}\right) = a,$$

so ist die zur Polaraxe im Abstande a gezogene Parallele eine Asymptote der Kurve.

Die Polar-Subtangente wird gegeben durch $S_t = \varrho^2 : \frac{d\varrho}{d\omega} = -a$; folglich: **Der Ort der Endpunkte der Polar-Subtangente der hyperbolischen Spirale (3) ist der mit dem Radius a um den Pol beschriebene Kreis.** Daraus folgt eine höchst einfache Konstruktion der Tangente. Bei dieser Gelegenheit wollen wir noch vermerken, dafs die Kurve in kartesischen Koordinaten durch die Gleichung

$$\sqrt{x^2+y^2} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - a = 0$$

dargestellt wird, und daher die Tangente durch

$$(X-x)\left\{ax - y\sqrt{x^2+y^2}\right\} + (Y-y)\left\{ay + x\sqrt{x^2+y^2}\right\} = 0;$$

1) Über diese Arbeit von Varignon siehe Kap. I des folgenden Abschn.

2) Mém. de Paris 1710; *Joh. Bernoulli Opera omnia* I, S. 480.

3) *De motu corporum gravium, pendolorum et projectilium* (Acta erud. Febr 1713); oder *Joh. Bernoulli Opera* I, S. 552.

nehmen wir nun an, dafs der Punkt P mit den Koordinaten X, Y gegeben sei, so ergiebt sich hieraus leicht: **Die Berührungspunkte der Tangenten, die man von einem beliebigen Punkte P der Ebene an eine hyperbolische Spirale ziehen kann, gehören einer Kurve vierter Ordnung an, die P zum Doppelpunkte hat**; infolgedessen gehört jede hyperbolische Spirale einem System an, mit den Charakteristiken $\mu = 2$, $\nu = 2$.

Die Fläche A des Sektors zwischen einem Spiralenbogen und den Radienvectoren der Endpunkte gelegen wird gegeben durch

$$A = \frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\Omega} \varrho^2 \cdot d\omega = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\omega_0} - \frac{1}{\Omega}\right);$$

wenn also Ω nach ∞ übergeht, so nähert sich A immer mehr dem Wert $\frac{a^2}{2\omega_0}$, so lange $\omega_0 \neq 0$. Für das Bogendifferential hingegen erhält man

$$ds = d\omega \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2} = -\frac{a\sqrt{a^2+\varrho^2}}{\varrho}\, d\varrho;$$

daher ist
$$s = \frac{a}{2} \cdot \log \frac{\sqrt{a^2+\varrho^2}+a}{\sqrt{a^2-\varrho^2}-a} - \sqrt{a^2+\varrho^2} + Const.,$$

welches zeigt, **dafs die Rektifikation der hyperbolischen Spirale von Logarithmen abhängt**, eine Bemerkung von Côtes[1]).

Es sei μ der Winkel, den die Tangente mit dem Radius vector bildet und R der Krümmungsradius. Man findet dann leicht

$$\sin \mu = \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2}} = \frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}, \qquad R = \frac{a}{\omega}\left\{\frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\omega}\right\}^3,$$

und daraus durch Elimination von ω

$$\frac{\varrho}{R} = \sin^3 \mu; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

man könnte nachweisen, dafs dieses eine charakteristische Eigenschaft der hyperbolischen Spirale ist[2]).

Zwischen unserer Spirale und der Kochleoide (Nr. **180**) besteht eine höchst einfache Beziehung, die hier hervorgehoben werden soll: **Zieht man durch einen beliebigen Punkt $M(\varrho, \omega)$ der Spirale (3) die Parallele zur Polaraxe und macht auf dieser $MM_1 = MO$, so ist der Ort der Punkte $M_1(\varrho_1, \omega_1)$ eine Kochleoide.**

Beweis: Es ist nämlich

$$\omega_1 = \frac{\pi+\omega}{2}, \qquad \varrho_1 = 2\varrho \sin\frac{\omega}{2},$$

oder
$$\omega = 2\omega_1 - \pi, \qquad \varrho = \frac{\varrho_1}{2\sin\left(\omega_1 - \frac{\pi}{2}\right)};$$

1) Phil. Trans. No. 29, 1714.

2) Tisserand, *Recueil complémentaire d'exercises sur le calcul infinitésimal*, II. Aufl. (Paris 1895) S. 310.

setzen wir dies in (3) ein, so finden wir

$$\varrho_1\left(\omega_1 - \frac{\pi}{2}\right) = a \sin\left(\omega_1 - \frac{\pi}{2}\right),$$

welche Gleichung (vgl. Nr. **180**) eine Kochleoide darstellt, wie behauptet war.

Es giebt aber auch eine sehr bekannte Raumkurve, zu welcher die hyperbolische Spirale eine intime Beziehung hat. Betrachten wir nämlich die Schraubenlinie mit den Gleichungen

$$x = a\cos\omega, \quad y = a\sin\omega, \quad z = ka\omega,$$

und projizieren sie von irgend einem beliebigen Punkte der Axe — z. B. dem mit der Ordinate ζ — so erhalten wir eine Fläche, die durch die Gleichungen

$$x = \frac{a\cos\omega}{1+\lambda}, \quad y = \frac{a\sin\omega}{1+\lambda}, \quad z = \frac{ka\omega + \lambda\zeta}{1+\lambda},$$

dargestellt werden kann, wobei λ ein neuer Parameter ist. Die Schnittlinie dieser Kegelfläche mit der xy-Ebene erhält man, wenn man $z = 0$ macht, d. h. $\lambda = -\frac{ka\omega}{\zeta}$; sie wird daher durch die Gleichungen dargestellt:

$$x = \frac{a\cos\omega}{1 - \frac{ka\omega}{\zeta}}, \quad y = \frac{a\sin\omega}{1 - \frac{ka\omega}{\zeta}}.$$

Nun läſst sich hieraus ableiten, daſs

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{a}{1 - \frac{ka\omega}{\zeta}},$$

oder, wenn man $\sqrt{x^2+y^2} = \varrho$, $1 - \frac{ka\omega}{\zeta} = \varphi$ setzt: $\varrho\varphi = a$; folglich: **Die Projektion einer Schraubenlinie von einem Punkte der Axe** des Rotationscylinders, auf welchen sie aufgezeichnet ist, **auf eine zu dieser Axe senkrechte Ebene ist eine hyperbolische Spirale.**

190. Die Gleichungen

$$\varrho_1 = \frac{a}{\omega - 1}, \quad \varrho_2 = \frac{a}{\omega + 1}$$

stellen ersichtlich zwei hyperbolische Spiralen mit demselben Pole dar. Wir suchen ihre Konchoidale (vgl. Nr. **68**), indem wir $\varrho = \varrho_1 + \varrho_2$ setzen und erhalten die Kurve

$$\varrho = \frac{2a}{\omega^2 - 1}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

die gefunden wird, wenn man die Kurve sucht, die ein fester Punkt eines Kreisbogens, dessen Radius a ist, beschreibt, wenn er sich auf eine gegebene Gerade, die er berührt, aufwickelt[1]). Es ist bemerkens-

---

1) R. Fabri, *Sulle curve cicloidali* (Atti dell' Acc. Pont. dei Nuovi Lincei, X, 1856), und E. Catalan, *Note sur la théorie des roulettes* (Nouv. Ann. de math. XV, 1856).

wert, dafs diese Kurve elementar rektifizierbar ist; nämlich aus (5) ergiebt sich

$$\frac{ds}{d\varrho} = \frac{\varrho + a}{\sqrt{\varrho^2 + 2a\varrho}},$$

und also durch Integration

$$s = \sqrt{\varrho^2 + 2a\varrho};$$

bezeichnet man nun mit R den Krümmungsradius, so findet man[1])

$$R = \varrho \left(\frac{a+\varrho}{a}\right)^2;$$

daraus ergiebt sich die natürliche Gleichung

$$R = \frac{(\sqrt{a^2+s^2} - a)(a^2+s^2)}{a^2}.$$

Zu einer anderen algebraischen Spirale gelangt man, wenn man eine Kurve von der Beschaffenheit sucht, dafs die Fläche zwischen ihrem Bogen und den Radienvectoren in den Endpunkten proportional dem Logarithmus des Verhältnisses der beiden Vectoren selbst ist. Es ist dies eine Aufgabe, die R. Côtes sich stellte und in folgender Weise gelöst hat[2]): Die Bedingungen des Problems übersetzen sich alsbald in die Gleichung

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\omega_0}^{\omega_1} \varrho^2 \cdot d\omega = a^2 \log \frac{\varrho_1}{\varrho_0}.$$

Durch Differenzieren ergiebt sich

$$d\omega = 2a^2 \frac{d\varrho}{\varrho^3}$$

und durch Integrieren $\quad \omega - \alpha = -\frac{a^2}{\varrho^2}.$

Setzt man hierin $\alpha - \omega = \varphi$, so findet man

$$\varrho^2 \varphi = a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad : \quad (6)$$

als Gleichung der gesuchten Kurve. Diese ist symmetrisch in Bezug auf den Pol, der ein asymptotischer Punkt der Kurve ist; die reellen Punkte der Kurve erhält man, wenn man dem φ positive Werte erteilt (s. Taf. XIV, Fig. 111).

Transformieren wir (6) durch reziproke Radienvectoren, so erhalten wir, wenn das Centrum der Transformation mit dem Pole zusammenfällt,

$$\varrho^2 = b^2\omega, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

welches eine Fermat'sche parabolische Spirale zweiten Grades darstellt (s. Nr. **185**); infolgedessen wird die durch (6) dargestellte die inverse

1) Es ist ratsam, hier die u. a. von Serret, *Calcul différentiel,* II. Aufl., Paris 1879, S. 305, angegebene Formel zu benutzen:

$$R = \frac{\left\{\frac{1}{\varrho^2} + \left(\frac{d}{d\omega}\frac{1}{\varrho}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{\varrho^3}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{d^2}{d\omega^2}\frac{1}{\varrho}\right)}.$$

2) *Harmonia mensurarum* (Cambridge, 1722) S. 85.

parabolische Spirale genannt[1]); mehr verbreitet ist jedoch der von Côtes angewandte Name Lituus, welcher durch Sacchi in Tromba[2]) übersetzt wurde. Da Gleichung (6) für $\varphi = \infty$ ergiebt, $\varrho = 0$, so ist der Pol ein asymptotischer Punkt der Kurve; der Punkt mit den Koordinaten $\varphi = \frac{1}{2}$, $\varrho = a\sqrt{2}$, ist ebenso wie sein symmetrischer ein Wendepunkt, u. s. w. — Spezialisieren wir das in Nr. 188 angegebene Verfahren, so sehen wir: **Der Lituus gehört einem System mit den Charakteristiken $\mu = 1$, $\nu = 2$ an.** Schliefslich ergiebt sich als unmittelbare Folgerung der Gleichung (6) folgender Satz: „Ist eine Schar konzentrischer Kreise gegeben und eine durch ihren gemeinsamen Mittelpunkt O gehende Gerade OX, und man bestimmt auf der Peripherie eines Kreises, dessen auf OX liegender Radius OA sein möge, einen Punkt M derart, dafs der Sektor $AOM = \frac{1}{2}a^2$ wird, so ist der Ort der Punkte M ein Lituus, wie er durch Gleichung (6) dargestellt wird“[3]).

Sechstes Kapitel.

Die logarithmische Spirale, sowie einige davon abgeleitete Kurven.

191. In einem an P. Mersenne gerichteten Briefe vom 12. Sept. 1638 teilt Descartes seinem Korrespondenten, der ihn ersucht hatte „plus particulierement expliquer la nature de la spirale qui représente le plan egalement incliné“ als Antwort folgende Eigenschaft jener Kurve mit: „Si A est le centre de la terre et que $ANBCD$ soit la spirale, ayant tiré les droites AB, AC, AD et semblables, il y a même proportion entre la courbe ANB et la droite AB, qu'entre la courbe $ANBC$ et la droite AC ou $ANBC$ et AD, et ainsi des autres. Et si on tire les tangentes DE, CF, BG etc., les angles ADE, ACF, ABG etc. seront egaux“[4]).

Die Eigenschaft, durch welche Descartes die neue Spirale charakterisiert, übersetzt sich leicht in die Gleichung

$$\frac{s}{\varrho} = a,$$

1) Schlömilch, *Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis,* I. Th., III. Aufl. (Leipzig 1878) S. 106.

2) *Sulla geometria analitica delle curve piane* (Pavia 1854) S. 9. Die Begründung dieser Bezeichnungen ergiebt sich offenbar daraus, dafs man gewöhnlich von der hier behandelten Kurve nur den einen, positiven Werten von ϱ entsprechenden, Zweig betrachtet, der die Gestalt eines Krummstabes oder einer am unteren Ende eingerollten ehernen Trompete hat.

3) Laisant, *Nouv. Corr. Mathém.* Question 251, 1877, S. 87—88, wo die Kurve mit dem wenig bedeutsamen Namen Spirale polaire bezeichnet wird.

4) *Oeuvres de Descartes,* ed. Cousin, VII. (Paris 1824) S. 336—37, ed. Adam et Tannery II. (Paris 1898) S. 360.

wo ϱ der vom Punkte A ausgehende Radius vector, s der Kurvenbogen und a eine Konstante ist. Differenzieren wir die vorige Gleichung und setzen für ds seinen Wert $\sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\omega^2}$, so erhalten wir

$$d\omega = \sqrt{a^2 - 1}\,\frac{d\varrho}{\varrho},$$

und daher durch Integrieren

$$\varrho = c e^{\frac{\omega}{\sqrt{a^2-1}}}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

wo c eine beliebige Konstante ist. Dies ist die Polargleichung der fraglichen Spirale, wegen ihrer Form wurde die Kurve selbst von Varignon[1]) die logarithmische Spirale genannt, und dieser Name ist ihr geblieben[2]). Nennen wir μ den Winkel zwischen Tangente und Radius vector, so erhalten wir, indem allgemein $\operatorname{tg}\mu = \varrho : \frac{d\varrho}{d\omega}$, in diesem Falle

$$\operatorname{tg}\mu = \sqrt{a^2 - 1}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

μ ist also konstant, wie auch Descartes in der oben angeführten Stelle bemerkt hat. **Die logarithmische Spirale ist also die schräge (gleichwinklige) Traktorie eines Strahlenbüschels**; daher wird sie auch mit dem Namen gleichwinklige Spirale belegt[3]), und deswegen behauptet Joh. Bernoulli: „ipsamet etiam esset vera loxodromia[4]), si terra plana foret". Diese Eigenschaft der logarithmischen Spirale zeigt uns auch, dafs, um von einem beliebigen Punkte P der Ebene an sie die Tangente zu ziehen, es genügt (wenn O der Pol ist), über OP einen Kreis zu beschreiben, der den Winkel μ als Peripheriewinkel fafst; dieser schneidet die Kurve in den Berührungspunkten der gesuchten Tangenten. Hieraus folgt: **Die Berührungspunkte der von einem beliebigen Punkte der Ebene an eine logarithmische Spirale gezogenen Tangenten liegen auf einem Kreise, der durch den Punkt und den Pol geht.** Jede logarithmische Spirale gehört also einem System an, dessen beide Charakteristiken gleich eins sind.

Aus der Gleichung (1) ergeben sich alsbald einige Folgerungen, die hervorgehoben zu werden verdienen. Zunächst, wenn ω in $-\infty$ übergeht, wird ϱ zu 0, und somit ist der Pol O oder **das Auge der Spirale ein asymptotischer Punkt.** — Betrachten wir vier Punkte

1) Vgl. die Nr. **189** genannte Abhandlung, von der wir ausführlicher im Kap. 1 des folgenden Abschnittes reden werden.

2) Weniger angewendet ist der Name „Proportionale Spirale" (Hoffmann, *Math. Wörterbuch,* IV, S. 319).

3) Withworth, *La spirale équiangle. Ses propriétés prouvées géométriquement* (Nouv. Ann. 2. Ser. VIII, 1869 und IX, 1870); französische Übersetzung einer Abh. in *The Messenger of math.* I, 1862.

4) Bekanntlich nennt man Loxodrome eine sphärische Kurve, die alle Meridiane unter demselben Winkel schneidet. Daher ist die stereographische Projektion einer Loxodrome eine logarithmische Spirale.

A, B, C, D der Kurve, die den Werten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ von ω entsprechen derart, dafs $\beta - \alpha = \delta - \gamma$. Infolge der Gleichung (1) ist dann

$$\frac{OB}{OA} = e^{\frac{\beta-\alpha}{\sqrt{a^2-1}}}, \qquad \frac{OD}{OC} = e^{\frac{\delta-\gamma}{\sqrt{a^2-1}}},$$

und daher wegen der gemachten Voraussetzung

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC};$$

hieraus folgt, dafs die beiden Dreiecke AOB und COD einander ähnlich sind. Wenn man also zwei Punkte M, N der Spirale kennt und konstruiert über ON das dem Dreiecke OMN ähnliche Dreieck ONP, so ist P ein dritter Punkt der Kurve; daraus kann man einen vierten, dann einen fünften u. s. w. ableiten (s. Taf. XIV, Fig. 112). Diese Konstruktion beruht im Grunde darauf, dafs die in gleichen Winkelabständen liegenden Vectoren eine geometrische Proportion bilden; ist insbesondere der Winkelabstand gleich 2π, so haben wir: **Die auf jedem vom Auge der Spirale ausgehenden Strahle liegenden Vectoren der logarithmischen Spirale bilden eine geometrische Progression**[1]. Auch hieraus ergiebt sich, namentlich wenn der Quotient q dieser letzteren Progression gegeben ist, eine Methode die Spirale punktweise zu zeichnen. Für q besteht die Beziehung

$$q = e^{2\pi \operatorname{ctg} \mu};$$ [2]

da diese Gröfse zur Zeichnung der Spirale ausreicht, so sieht man, dafs die Konstante c nur den Mafsstab, bezw. eine bestimmte der unendlich vielen einander ähnlichen Windungen bezeichnet, jedoch auf die Gestalt keinen Einflufs hat. Auch auf andere Weise läfst sich erkennen, **dafs mit Variation der Konstanten c die Gleichung (1) unendlich viele unter sich identische Kurven darstellt.** Betrachtet man nämlich die Kurve

$$\varrho = c_1 e^{\frac{\omega}{\sqrt{a^2-1}}},$$

und setzt nun

$$c_1 = c e^{\frac{\alpha}{\sqrt{a^2-1}}},$$

so ist dadurch der Winkel α vollständig bestimmt, und man hat alsdann

$$\varrho = c e^{\frac{\omega+\alpha}{\sqrt{a^2-1}}};$$

1) Bei der archimedischen Spirale bilden sie eine arithmetische Progression.

2) Eben dieser Quotient ist bei den in der Natur an Konchylien vorkommenden Spiralen (nach Beobachtungen des Übersetzers) eine ganze oder einfache rationale Zahl.

setzt man dann $\omega + \alpha = \omega_1$, so erhält man die Gleichung

$$\varrho = c e^{\frac{\omega_1}{\sqrt{a^2-1}}},$$

welche mit (1) verglichen die Richtigkeit unserer Behauptung darthut.

Aus dieser folgt unmittelbar: **Die logarithmische Spirale wird durch jede Inversion, deren Centrum das Auge der Spirale ist, in eine gleiche Kurve verwandelt.** Setzen wir nämlich $\varrho \cdot \varrho_1 = k^2$, so wird Gleichung (1) zu

$$k^2 = c \varrho_1 e^{\frac{\omega}{\sqrt{a^2-1}}},$$

und wenn wir $\omega_1 = -\omega$ setzen

$$\varrho_1 = \frac{k^2}{c} e^{\frac{\omega_1}{\sqrt{a^2-1}}},$$

welche eine der (1) gleiche Kurve darstellt.

192. Zu der logarithmischen Spirale gelangte Evangelista Torricelli seinerseits, indem er von anderen Betrachtungen ausging. In welchem Jahre er seine Entdeckung gemacht hat, ist mit Sicherheit nicht bekannt; da er jedoch im Jahre 1647 in der Blüte seines Alters starb (er war erst 39 Jahre alt), so ist wahrscheinlich, daſs es ungefähr zur selben Zeit wie bei Descartes gewesen sei[1]). Der berühmte Schüler Galilei's gab nicht nur zwei Erzeugungsweisen für die neue Kurve an, eine geometrische[2]) und eine mechanische[3]), sondern entdeckte auch die Rektifikation und Quadratur, so daſs, wenn Fermat, Neil und Heuraët den Ruhm genieſsen, als erste eine algebraische

---

1) Über diese Untersuchungen Torricellis liefert Mitteilungen der *Racconto d'alcune proposizioni proposte e passate scambievolmente fra matematici di Francia e me dall' anno 1640 in quà,* veröffentlicht von Fabroni im I. B. (Pisis, 1788, S. 345—72) von *Vitae Italorum doctrina excellentium qui Saeculis XVII et XVIII floruerunt.*

2) Folgendes ist der Wortlaut, wie er in dem citierten *Racconto* sich findet: „Eine Gerade AC werde durch B in irgend einer Weise geteilt; man errichte die Senkrechte BD als mittlere Proportionale zwischen AB und BC; auſserdem teile man den Winkel DBC durch BE, so daſs dieses die mittlere Proportionale zwischen DB und BC wird. Von neuem teile man den Winkel DBC durch BF, so daſs dies die mittlere Proportionale zwischen DB und BE wird, und so fahre man fort, die Winkel zu teilen durch Linien, die immer die mittlere Proportionale sind. So erhält man viele Punkte wie A, D, F, E, C u.s.w., durch welche eine Linie hindurch geht, welche die geometrische Spirale genannt wird und welche unter anderen die Eigenschaft hat, die, bevor sie das Centrum B erreicht, unzählig viele Windungen um dasselbe macht."

3) Angegeben im *Index* der Werke Torricelli's, der den nach seinem Tode herausgegebenen *Lezioni accademiche di Evangelista Torricelli* (Florenz 1715) vorausgeht, mit folgenden Worten: „In spiralibus vero quarum radii, temporibus aequalibus in geometrica ratione procedunt, ostendetur ipsam spiralium lineam, licet ex infinitis numero revolutionibus constet, antequam ad suum centrum perveniat, suae tangenti aequalem esse" (a. a. O. S. 41).

Kurve rektifiziert zu haben (s. Nr. **187**), Torricelli das Verdienst hat, zuerst eine mathematisch definierte Kurve rektifiziert zu haben[1]); es ist ja wahr, daſs die Rektifizierung der logarithmischen Spirale eine unmittelbare Folgerung der Gleichung $s = a\varrho$ ist, durch welche Descartes sie definierte, jedoch ist sie dies nicht, wenn man von einer der Torricelli'schen Definitionen ausgeht. Immerhin ist der Beweis der Sätze über die Rektifikation, die man Torricelli verdankt, hier nicht unwichtig. Wir beachten zu dem Zwecke, daſs, weil $s = a\varrho$, und wegen (2)

$$\cos\mu = \frac{1}{a} \qquad (2')$$

ist, wir haben

$$s = \frac{\varrho}{\cos\mu}; \qquad (3)$$

folglich: **Zieht man in einem Punkte M der logarithmischen Spirale die Tangente und ist T ihr Schnittpunkt mit der im Pole O zum Vector OM errichteteten Senkrechten, so ist MT gleich der Länge des ganzen Spiralenbogens vom Pole bis zum Punkte M**[2]). Dies ist der eine der Torricelli'schen Sätze, der um so mehr beachtenswert ist, weil die Spirale in unendlich vielen Windungen den Pol umkreist. — Um den zweiten Satz darzustellen, bemerken wir, daſs aus (1) sich ergiebt

$$\int\limits_{\omega=-\infty}^{\omega} \frac{1}{2}\varrho^2 \cdot d\omega = \frac{c^2}{2}\int\limits_{-\infty}^{\omega} e^{\frac{2\omega}{\sqrt{a^2-1}}} \cdot d\omega = \frac{\sqrt{a^2-1}}{4}\,\varrho^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\varrho\cdot\varrho\operatorname{tg}\mu;$$

folglich: **Die Fläche des** (bei der Konstruktion im vorigen Satze entstehenden) **Dreiecks OMT ist doppelt so groſs, als die vom Vector beschriebene Fläche, wenn er aus der Lage OM rückwärts die unendlich vielen Windungen um den Pol durchläuft.** Dies ist der zweite der angekündigten Sätze.

Zu weiteren Sätzen gelangt man durch die Bemerkung, daſs die Subnormale S_n, die Subtangente S_t und der Krümmungsradius R der logarithmischen Spirale ausgedrückt werden bezw. durch

$$S_t = \varrho\operatorname{tg}\mu, \qquad S_n = \frac{\varrho}{\operatorname{tg}\mu}, \qquad R = \frac{\varrho}{\sin\mu}. \qquad (4)$$

Werden diese Gleichungen in geeigneter Weise miteinander und mit (3) kombiniert, so erhält man weiter

$$R = s\operatorname{ctg}\mu, \qquad (5)$$

$$\varrho^2 + S_t^2 = s^2, \qquad \varrho^2 + S_n^2 = R^2. \qquad (6)$$

---

1) Vgl. G. Loria, *Evangelista Torricelli e la prima rettificazione di una curva* (Lincei Rend. 5e Serie, VI, 2. Sem. 1897).

2) Halten wir die Gerade TM fest und rollen die Spirale weiter, so bleibt, da der Winkel $OTM = 90^\circ - \mu$ sich nicht ändert, O auf der Geraden TO (s. die Fig. 112); folglich: **Wenn eine logarithmische Spirale auf einer Geraden ohne zu gleiten rollt, so beschreibt der Pol eine gerade Linie.**

(5) ist die natürliche Gleichung der log. Spirale; diese sagt in geeigneter Weise interpretiert aus: **Wenn eine logarithmische Spirale auf einer Geraden rollt, so ist der Ort der Krümmungscentren für die einzelnen Berührungspunkte eine gerade Linie**[1]. Von den Gleichungen (6) drückt die erste wiederum den Torricelli'schen Satz über die Rektifikation aus, während die zweite besagt, **dafs bei der log. Spirale das Krümmungscentrum für irgend einen Punkt im Endpunkte der betreffenden Subnormale liegt.** Bezeichnen wir nun mit ϱ_1, ω_1 die Koordinaten des Krümmungscentrums für den Punkt mit den den Koordinaten ϱ, ω, so erhalten wir

$$\varrho_1 = \frac{\varrho}{\sin\mu}, \qquad \omega_1 = \frac{\pi}{2} + \omega;$$

eliminieren wir ϱ und ω aus diesen Gleichungen und aus (1′) $\varrho = c e^{\omega \operatorname{ctg} \mu}$, welches die gegebene Spirale darstellt, so bekommen wir

$$\varrho_1 = \frac{c}{\sin\mu \cdot e^{\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\mu}} e^{\omega_1 \operatorname{ctg}\mu},$$

welche Gleichung, wegen der S. 450 gemachten allgemeinen Bemerkung, eine andere der gegebenen gleiche log. Spirale darstellt. Wir sind daher zu dem Schlusse berechtigt: **Die logarithmische Spirale ist eine Kurve, die ihren sämtlichen successiven Evoluten gleich ist**[2].

Ist C der Krümmungsmittelpunkt der log. Spirale für den Punkt $M(\varrho, \omega)$, und $C'(\varrho', \omega')$ der zu C in Bezug auf M symmetrische Punkt, so heifst der Ort der Punkte C' die Antevolute der gegebenen Kurve. Da nun OM die Mittellinie des Dreiecks COC' ist, so haben wir

$$2R^2 + 2\varrho^2 = S_n^2 + \varrho'^2,$$

daher wegen (4)

$$\varrho' = \varrho\sqrt{4 + \operatorname{ctg}^2\mu} = c\sqrt{4 + \operatorname{ctg}^2\mu}\, e^{\omega \operatorname{ctg}\mu}.$$

Es ist ferner

$$MC' = MC = \frac{\varrho}{\sin\mu}, \qquad \frac{MC'}{\sin(\omega - \omega')} = \frac{\varrho}{\cos(\omega - \omega' + \mu)},$$

daher
$$\sin\mu \cdot \sin(\omega - \omega') = \cos(\mu + \omega - \omega'),$$

oder
$$2 \operatorname{tg}\mu \cdot \operatorname{tg}(\omega - \omega') = 1.$$

Daraus folgt
$$\omega = \omega' + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{ctg}\mu}{2}\right),$$

und daher erhält man schliefslich als Gleichung des Ortes der Punkte C'

$$\varrho' = c\sqrt{4 + \operatorname{ctg}^2\mu} \cdot e^{\operatorname{ctg}\mu \cdot \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{ctg}\mu}{2}\right)} e^{\omega' \operatorname{ctg}\mu},$$

1) Mannheim, *Recherches géométriques relatives au lieu des positions successives des centres de courbure d'une courbe qui roule sur une droite* (Liouvilles Journ. 2e Ser. IV, 1859, S. 95).

2) Unter den reellen log. Spiralen giebt es solche, die ihre eigenen Evoluten sind; solche Kurven heifsen logarithmische Selbstevoluten: m. s. G. Scheffers, *Einführung in die Theorie der Curven* (Leipzig 1901) S. 71.

welche wieder eine log. Spirale darstellt; folglich: **Die logarithmische Spirale ist eine Kurve, die ihrer Antevolute gleich ist.**

Diesen Satz verdanken wir ebenso wie die vorigen Jak. Bernoulli[1]); er bemerkte ferner, dafs, wenn man ein Licht in das Auge der Spirale bringt, auch die Brennlinie durch Reflexion (Katakaustika), sowie die durch Refraktion (Diakaustika), sowie die sog. Antikaustika und Perikaustika wiederum ihr gleiche log. Spiralen sind[2]). Entzückt und begeistert von dieser Eigenschaft der log. Spirale, sich immer wieder selbst zu erzeugen, schrieb der berühmte Geometer: „Cum autem ob proprietatem tam singularem tamque admirabilem mire mihi placeat spira haec mirabilis, sic ut ejus contemplatione satiari vix queam, cogitavi illam ad varias res symbolice repraesentandas non inconcinne adhiberi posse. Quoniam enim semper sibi similem et eandem spiram gignit, utcumque volvatur, evolvatur, radiet; hinc poterit esse vel sobolis parentibus per omnia similis Emblema; Simillima Filia Matri: vel (si rem aeternae veritatis Fidei mysteriis accomodare non est prohibitum) ipsius aeternae generationis Filii, qui patris velut Imago, et ab illo ut Lumen a Lumine emanans eidem ὁμόσιος existit, qualiscumque adumbratio. Aut, si mavis, quia curva nostra mirabilis in ipsa mutatione semper sibi constantissime manet similis et numero, eadem poterit esse vel fortitudinis et constantiae in adversitatibus; vel etiam carnis nostrae post varias alterationes, et tandem ipsam quoque mortem ejusdem numero resurecturae symbolum; adeo quidem, ut si Archimedem imitandi hodiernum consuetudo obtineret, libenter Spiram hanc tumulo meo juberem incidi cum epigrapho: *Eadem mutata resurgo.*“ [3])

Für die Untersuchung der log. Spirale erweisen sich die Gleichungen in Polarkoordinaten (1) oder (1'), sowie die natürliche Gleichung (5) als die geeignetsten. Dennoch möge auch eine Folgerung angeführt werden, die man aus der kartesischen Gleichung ziehen kann.

---

1) S. den Aufsatz *Lineae cycloidales, evolutae, antevolutae, causticae, anticausticae, pericausticae. Earum usus et simplex relatio ad se invicem. Spira mirabilis* (Acta erud. Mai 1692). Die von Bernoulli angegebenen Reproduktionen der log. Spirale sind nicht die einzig existierenden; von denen, die ihm entgangen sind, erwähnen wir folgende von Hâton de la Goupillière entdeckte (*De la courbe qui est elle même sa propre developpée,* Liouvilles Journ. 2. Ser. XI, 1866): „Wenn man eine Kurve sucht, deren Fufspunktkurve eine ihr selbst ähnliche ist, nur um einen gewissen Winkel gedreht, so gelangt man zu einer log. Spirale.“ Eine weitere ergiebt sich aus folgendem Satze: „Die Aberrationskurve einer log. Spirale ist eine andere log. Spirale“ (F. J. van den Berg, *Over krommingskegelsnede van vlakke kromme lynen,* Amsterd. Verh. 3. Ser. IX, 1892).

2) Vgl. die hübsche Monographie von A. Michalitschke, *Die archimedische, die hyperbolische und die logarithmische Spirale,* II. Aufl. Prag 1891.

3) Die eigentliche Quelle, aus der diese Sätze unmittelbar fliefsen, haben Klein und Lie (Math. Ann. II) entdeckt: Die Spirale ist die Bahnkurve für eine Schaar von linearen Transformationen ihrer Ebene.

Aus Gl. (1') ergiebt sich, wenn logarithmiert wird

$$\frac{1}{2}\log\left[(x+iy)(x-iy)\right] = \log c + \operatorname{ctg}\mu \cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},$$

oder

$$\frac{1}{2}\log\left[(x+iy)(x-iy)\right] = \log c + \frac{\operatorname{ctg}\mu}{2i}\log\frac{iy+x}{iy-x};$$

wenn man nun $x+iy=\xi$, $x-iy=\eta$ setzt, so erhalten wir eine Gleichung von folgender Form

$$\xi^{\frac{1-\alpha i}{2}}\cdot\eta^{\frac{1+\alpha i}{2}} = Const., \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

die uns zeigt, dafs die log. Spirale eine spezielle, interscendente binomische Kurve ist (vgl. Nr. **120**); wir werden in Nr. **228** sehen, wie wichtig diese Beobachtung ist, welche die log. Spirale mit anderen allgemeineren Kurven verknüpft.

193. Mit der Beschreibung eines von John Collins[1]) erfundenen Instrumentes zur Zeichnung der logarithmischen Spirale wollen wir uns nicht aufhalten und dieses Kapitel damit beschliefsen, dafs wir einige von ihr abgeleitete Kurven erwähnen:

I. Wir betrachten die beiden durch folgende Gleichungen dargestellten Spiralen:

$$\varrho_1 = ce^{\omega \operatorname{ctg}\mu}, \qquad \varrho_2 = ce^{-\omega\operatorname{ctg}\mu};$$

offenbar sind diese zwei gleiche zueinander in Bezug auf die Polaraxe symmetrische Kurven. Setzen wir nun $\varrho = \varrho_1 \pm \varrho_2$, so erhalten wir zwei neue Kurven, die wie folgt dargestellt werden

$$\varrho = c\,\mathfrak{Cos}\,(\omega\operatorname{tg}\mu) \;\ldots\; (8) \qquad \varrho = c\,\mathfrak{Sin}\,(\omega\operatorname{tg}\mu) \;\ldots\; (9)$$

H. Dittrich, der sie zuerst betrachtet hat[2]), nannte die erste Summenspirale und die zweite Differenzenspirale[3]); er bediente sich derselben, um die hyperbolischen Funktionen geometrisch darzustellen; augenscheinlich sind diese Kurven auf hyperbolischem Gebiete die Analoga zu den Rhodoneen (Nr. **134**); wir werden ihnen (in Nr. **211**) von einem anderen Ausgangspunkte her wieder begegnen.

II. Wenn $z = x+iy$ und $Z = X+iY$ zwei komplexe Variabelen sind und man setzt

$$Z = \frac{z+1}{z-1},$$

so wird dadurch zwischen den Punkten (x, y) und (X, Y) eine isogonale, involutorische Korrespondenz hergestellt. Da nun

$$X+iY = \frac{x+iy+1}{x+iy-1}, \qquad X-iY = \frac{x-iy+1}{x-iy-1},$$

---

1) *Correspondence of scientific men of the seventeenth century etc.* (Oxford 1841). Vgl. A. Favaro, *Notizia storica sulle applicazioni della spirale logaritmica* (Bibl. mathem. 1891).

2) *Die logarithmische Spirale* (Progr. Breslau, 1872).

3) Aubry (*De l'usage des figures de l'espace pour la définition et la transformation de certaines courbes*, Journ. de math. spéc. 4. Ser. V, 1896, S. 29) bezeichnet sie mit dem Namen Spirale tractrice.

so folgt daraus

$$X^2 + Y^2 = \frac{(x+1)^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2}, \qquad \text{arc tg}\,\frac{Y}{X} = \text{arc tg}\,\frac{y}{x+1} - \text{arc tg}\,\frac{y}{x-1}.$$

Nennen wir jetzt R, Ω die Polarkoordinaten des Punktes (X, Y); in der z-Ebene betrachten wir nun die Punkte $(\pm 1, 0)$ und nennen ϱ_1, ϱ_2 die Abstände derselben von dem ursprünglichen Punkte (x, y); schliefslich seien ω_1 und ω_2 die Winkel, welche die x-Axe mit der Verbindungslinie jener beiden festen Punkte mit diesem beweglichen bildet: die beiden letzten Gleichungen können dann folgendermafsen geschrieben werden

$$R = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}, \qquad \Omega = \omega_1 - \omega_2.$$

Folglich erhält man, wenn man die oben definierte Transformation bei der logarithmischen Spirale

$$R = \frac{a_1}{a_2} e^{b\,\Omega}$$

ausführt, die neue, durch folgende Gleichung dargestellte Kurve

$$\frac{\varrho_1}{a_1 e^{b\,\omega_1}} = \frac{\varrho_2}{a_2 e^{b\,\omega_2}}; \qquad (10)$$

die die beiden festen Punkte $(\pm 1, 0)$ als asymptotische Punkte hat; sie heifst die logarithmische Doppelspirale[1]).

III. Wenn man die Vectoren einer log. Spirale $\varrho = a e^{m\omega}$ um eine konstante Länge b verlängert, so erhält man eine neue Linie, dargestellt durch die Gleichung

$$\varrho = a e^{m\omega} + b. \qquad (11)$$

Sie wurde 1840 von dem Konchyliologen C. F. Naumann vorgeschlagen, um die Orthogonalprojektion des Konchylienhauses auf eine zur Spindel senkrechte Ebene darzustellen, daher der Name Konchospirale, mit welchem sie bezeichnet wird. Vom mathematischen Standpunkte aus bietet die Konchospirale ziemlich geringes Interesse; dennoch mögen zwei Umstände nicht unerwähnt bleiben. Erstens: da die Gleichung (11) ergiebt

$$\lim_{\omega = -\infty} (\varrho - b) = 0,$$

so ist der Kreis mit dem Centrum im Auge der Spirale und dem Radius b ein asymptotischer Kreis für die Kurve. Zweitens: Bei Variation der Konstanten a, b, m stellt die Gleichung (11) ∞^3 Kurven dar, unter denen sich schon bekannte Kurven finden; für $b = 0$ z. B. hat man die ∞^2 logarithmischen Spiralen und für $a = 0$ oder $m = 0$

---

1) Holzmüller, *Ueber die logarithmische Abbildung und die aus ihr entspringenden orthogonalen Curvensysteme* (Zeitschr. f. M. XVI, 1871) und *Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften* (Leipzig 1882) S. 65.

∞^1 Kreise. Ferner aber, wenn $a = -b = \frac{\alpha}{m}$ gesetzt wird, so wird (11)

$$\varrho = \frac{\alpha}{m} e^{m\omega} - \frac{\alpha}{m} = \frac{\alpha}{m}\left(1 + m\omega + \frac{m^2\omega^2}{2!} + \cdots\cdots - 1\right)$$
$$= \alpha\omega + \frac{m\alpha\omega^2}{2!} + \cdots\cdots;$$

läſst man jetzt m gegen 0 konvergieren, so erhält man die Gleichung $\varrho = a\omega$, welche die Archimedische Spirale darstellt; schlieſslich, wenn man $b = -\lambda a$ setzt, so wird die Gleichung (11)

$$\frac{\varrho}{a} = e^{m\omega} - \lambda,$$

läſst man a unendlich groſs werden, so erhalten wir

$$\omega = \frac{1}{m}\log\lambda$$

die Gleichung einer durch den Anfang gehenden Geraden[1]).

Siebentes Kapitel.

Die Klothoide.

194. Die natürliche Gleichung der logarithmischen Spirale (Nr. **192**) drückt algebraisch aus, daſs sie eine Linie von der Art ist, daſs die Krümmung in einem beliebigen Punkte umgekehrt proportional dem Bogen ist. Diese Bemerkung führt natürlich zu der Frage nach der Kurve, bei welcher die Krümmung in einem beliebigen Punkte direkt proportional dem Bogen ist. Auf diese Frage wird schon in einem hinterlassenen Aufsatze von Jak. Bernoulli hingewiesen, sie wird jedoch nicht weiter untersucht[2]); die Untersuchung läſst sich aber leicht mit Hilfe der in Note II (am Ende des Buches) angegebenen allgemeinen Methode zur Bestimmung der gewöhnlichen Darstellung einer durch ihre natürliche Gleichung gegebenen Kurve ausführen. Da nach der Annahme

$$R \cdot s = a^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

so hat man $\quad f(s) = \frac{a^2}{s}, \quad \varphi = \int \frac{ds}{f(s)} = \frac{s^2}{2a^2};$

---

1) Weitere Einzelheiten über die fragliche Kurve und ihre Anwendungen s. in der Dissertation von A. H. Grabau, *Ueber die Naumann'sche Conchospirale und ihre Bedeutung für die Conchyliometrie* (Leipzig 1872).

2) *Invenire curvam, cujus curvedo in singulis punctis est proportionalis longitudini arcus; id est quae ab appenso pondere flectitur in rectam* (Jac. Bernoulli opera p. 1084—86).

daher umgekehrt $s = a\sqrt{2\varphi}$, deswegen ist

$$x = \int_0^{\varphi} \frac{a}{\sqrt{2\varphi}} \cos\varphi \cdot d\varphi, \qquad y = \int_0^{\varphi} \frac{a}{\sqrt{2\varphi}} \sin\varphi \cdot d\varphi.$$

Setzt man $\varphi = \frac{\pi v^2}{2}$, so werden diese Gleichungen zu

$$x = a\sqrt{\pi}\int_0^{v} \cos\frac{\pi v^2}{2} \cdot dv, \quad y = a\sqrt{\pi}\int_0^{v} \sin\frac{\pi v^2}{2} \cdot dv, \text{ und } s = a\sqrt{\pi}\, v. \quad (2)$$

Die hier auftretenden Integrale sind die sogenannten[1]) Fresnel'schen Integrale, die in der mathematischen Theorie des Lichtes vorkommen; dann hat auch der französische Physiker A. Cornu[2]), um eine deutliche geometrische Darstellung der Diffraktionserscheinungen zu erhalten, zuerst die durch die Gleichungen (2) dargestellte Kurve betrachtet; jedoch viel später erst bemerkte E. Cesàro[3]), dafs sich diese Kurve der durch Gleichung (1) ausgedrückten Eigenschaft erfreut.

Die Gleichungen (2) zeigen, dafs für $v = 0$, $x = y = s = 0$ und daher — wegen Gl. (1) — $R = \infty$ ist; **folglich ist der Anfangspunkt ein Wendepunkt der Klothoide.** Ebenfalls zeigen die Gleichungen (2), dafs gleichen und entgegengesetzten Werten von v auch gleiche und entgegengesetzte Werte von x und y entsprechen, **folglich ist die Kurve symmetrisch in Bezug auf den Ursprung.** Lassen wir nun v unendlich grofs werden, so sehen wir, weil

$$\int_0^{\infty} \cos\frac{\pi v^2}{2} \cdot dv = \int_0^{\infty} \sin\frac{\pi v^2}{2} \cdot dv = \frac{1}{2}$$

ist[4]), **dafs der Punkt** $A\left(\frac{a\sqrt{\pi}}{2}, \frac{a\sqrt{\pi}}{2}\right)$ **ein asymptotischer Punkt der Kurve ist.** Ein anderer derartiger Punkt ist der zu A in Bezug auf den Ursprung symmetrische Punkt A'. Die Kurve besteht demnach aus zwei sich im Ursprunge treffenden zueinander in Bezug auf diesen symmetrischen Spiralen (Taf. XIV, Fig. 113). Diese Gestalt veranlafste Cesàro ihr den Namen Klothoide[5]) zu geben, den die Kurve behalten dürfte.

---

1) „Sogenannten", weil G. Vacca (Revue de Mathématiques VII, 1901, S. 104) bemerkt hat, dafs sie schon von Euler 1781 untersucht wurden (vgl. *Inst. Calculi Integr.* IV, 1794, S. 339—343).

2) *Etudes sur la diffraction: methode géométrique pour la discussion des problèmes de diffraction* (C. R. LXXVIII, 1874; Journ. de Physique, III, 1874).

3) *Les lignes barycentriques* (Nouv. Ann. 3. Ser. V, 1886); *Sulla curva rappresentation dei fenomeni di diffrazione* (Nuovo Cimento, 3. Ser. XXVIII, 1890; C. R. CX, 1890).

4) S. z. B. Serret, *Calcul intégral*, II. Aufl. (Paris 1880) S. 136.

5) Aufser der in der vorvorigen Note citierten Abhandlung, siehe auch die *Lezioni di geometria intrinseca* (Neapel 1896) S. 15, und *Elementi di calcolo infinitesimale* (Neapel 1899) S. 334.

Ist ε der Kontingenzwinkel, so ist bekanntlich $R = \frac{ds}{d\varepsilon}$ und daher ist (1) gleichbedeutend mit

$$s \cdot ds = a^2 \cdot d\varepsilon,$$

und nach Integration $$s^2 = 2a^2\varepsilon,$$

welche von ähnlicher Form ist, wie die kanonische Gleichung der Parabel. Das zeigt uns, dafs die Klothoide sich nicht unterscheidet von einer Kurve, die schon lange Zeit vorher von A. Peters[1]) und K. C. F. Krause[2]) untersucht worden ist, und von letzterem (aus leicht begreiflichem Grunde) mit dem Namen „parabola originaria longitudinaris“ belegt worden war.

Die Klothoide erfreut sich vielerlei Eigenschaften, von denen die meisten durch Cesàro bemerkt worden sind; wir beschränken uns darauf folgende anzuführen:

Der Schwerpunkt eines Klothoidenbogens ist der innere Ähnlichkeitspunkt der beiden Schmiegungskreise in den Endpunkten des Bogens. Die Klothoide ist die einzige Kurve, bei welcher der Schwerpunkt eines beliebigen Bogens auf der Verbindungslinie der Krümmungsmittelpunkte für die Endpunkte des Bogens liegt.

Die natürliche Gleichung der logarithmischen Spirale und der Klothoide zeigt, dafs diese beiden Kurven Spezialfälle der durch die Gleichung

$$R = ks^m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

charakterisierten Kurven sind[3]); wir werden in Nr. **209** sehen, dafs zu derselben Kategorie noch eine andere bemerkenswerte Kurve (nämlich die Kreisevolvente) gehört. Diese Kurven haben die Eigentümlichkeit, dafs ihre Evoluten Kurven sind, die derselben Gattung angehören. Wenden wir nämlich die in Kap. 3 des Abschnitt VII aufgestellten Formeln an[4]), welche die natürlichen Koordinaten der Punkte einer Kurve mit denjenigen der entsprechenden Punkte ihrer Evolute verknüpften, so erkennen wir, dafs die natürliche Gleichung der Evolute von (3) erhalten wird, wenn man aus den beiden folgenden Gleichungen s eliminiert

$$R_1 = mk^2 s^{2m-1}, \qquad s_1 = ks^m;$$

1) *Neue Curvenlehre* (Dresden 1835) S. 173.

2) *Nova theoria linearum curvarum* (München 1835) S. 79.

3) H. Onnen, *Discussion d'un système de spirales d'après leurs équations essentielles* (Arch. néerlandaises X, 1875) und G. Pirondini, *Intorno a una famiglia notevole di linee piane* (Giorn. di Matem. XXX, 1892). Ein halbes Jahrhundert vorher war auf diese Kurven Puiseux gestofsen (s. den II. Teil der *Problèmes sur les developpées et les developpantes des courbes planes,* Liouvilles Journ. IX, 1844).

4) Wir empfehlen dem Leser davon alsbald Kenntnis zu nehmen, da wir dieselben im Verlaufe dieses Abschnittes gelegentlich mehrfach anwenden werden.

daher ist $$R_1 = mk^{\frac{1}{m}} s_1^{\frac{2m-1}{m}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$
und diese Gleichung ist also von der Form (3). — Die dem Fall $m = -1$ entsprechende Evolute der Klothoide (1) ist in Fig. 114, Taf. XIV Beispiels halber dargestellt.

Achtes Kapitel.

Die Cykloiden.

195. Der geometrische Begriff der Bewegung, den wir bei der Definition der Quadratrix des Dinostratus (Nr. **176**) und der Archimedischen Spirale (Nr. **182**) auftreten sahen, ist der Ursprung einer grofsen Reihe wichtiger Kurven, denen dieses Kapitel sowie die folgenden vier gewidmet sind.

Wenn ein Kreis ohne zu gleiten auf einer festen Geraden, der Basis, rollt, so beschreibt jeder Punkt seiner Ebene eine Linie, die man Cykloide oder Radlinie nennt, oder genauer eine gemeine Cykloide, wenn der erzeugende Punkt auf der Peripherie des bewegten Kreises liegt, eine verlängerte, wenn er aufserhalb, eine verkürzte wenn er innerhalb derselben liegt. Wer hat zuerst diese Linie betrachtet? Diese Frage ist schwer zu beantworten; denn der Begriff dieser Linie entsteht sehr leicht, z. B. wenn man die Bewegung eines Wagenrades betrachtet, und ein Ansporn zu dieser Betrachtung kann in dem Umstande gefunden werden, dafs, wenn man geometrisch die gemeine Cykloide konstruieren könnte, man ohne weiteres jeden Kreis rektifizieren könnte, und die Teilung eines beliebigen Kreisbogens in Teile, die gewissen Bedingungen genügen sollen, auf die analoge Aufgabe für eine Gerade zurückgeführt hätte. Nichts also hindert uns, anzunehmen, dafs die Alten die Cykloide gekannt haben. Eine Stelle bei Jamblicus[1]), wo die Rede von einer „Linie doppelter Bewegung“ ist, erfunden von Karpus von Antiochien, um den Kreis zu quadrieren, ist als sich auf unsere Kurve beziehend interpretiert worden[2]). Jedoch genügt diese nicht, um die Cykloide unter die seit Alters her bekannten Kurven zu rechnen; wir können daher nicht umhin, andere neuere Namen als mit der Entdeckung dieser Kurve verknüpft anzuführen[3]). Abgesehen von dem Kardinal von Cusa, der von

---

1) *Comment. in Aristotelis phys. libros quattuor priores*, ed. Diels, S. 60.

2) P. Tannery, *Pour l'histoire des lignes et surfaces courbes dans l'antiquité*, §. II (Bull. des Sc. math. et astr. 2. Ser. VIII, 1884).

3) Vgl. S. Günther, *War die Zykloide bereits im 16. Jahrhundert bekannt?* (Bibl. math., 1887).

Wallis[1]) auf Grund von Zeugnissen ziemlich zweifelhaften Wertes unter die Entdecker der Cykloide gerechnet wird, treffen wir zunächst auf Karl von Bouvelles, der im Jahre 1501 ihr Auftreten bei dem Problem der Quadratur des Kreises bemerkte[2]) und Galileo Galilei, der ungefähr 100 Jahre später (1599) die gemeine Cykloide betrachtete, ihr den Namen gab, mit dem wir sie heute bezeichnen und vergebens versucht hat ihre Fläche zu bestimmen, indem er sich dabei der Wage bediente[3]).

Diese Gelehrten gehören der Periode an, die wir als die prähistorische Periode der Cykloide bezeichnen können; ihre eigentliche Geschichte beginnt etwa 1625 und genau genommen, als P. Mersenne im Jahre 1628, weil es ihm nicht gelang, die Eigenschaften der Cykloide aufzudecken (deren Definition er wahrscheinlich von Schülern Galilei's erfahren hatte) Roberval aufforderte, sie zu untersuchen. Dieser Geometer fand nun 1634, dafs die ganze Fläche der gemeinen Cykloide (von ihm Trochoide, von τρόχος Rad, genannt) gleich dem Dreifachen der Fläche des erzeugenden Kreises sei: ein höchst beachtenswerter Satz, der die Blicke der mathematischen Welt auf die Cykloide zu lenken vermochte und alsbald (1638) von Descartes und Fermat bestätigt wurde. Kurz darauf gelang Wren die Rektifikation dieser Kurve und etwa um dieselbe Zeit entdeckte Pascal an ihr — er nannte sie Roulette — so viele und so elegante Eigenschaften, dafs er es für angemessen hielt, den Beweis derselben als Thema eines öffentlichen Wettbewerbes auszusetzen (1658). Welches das Resultat desselben gewesen und welches die Gründe, weshalb Wallis und P. La Loubère (die einzigen Bewerber) die ausgesetzte Prämie nicht erhielten, das hat Pascal weitläufig erzählt[4]); wir werden uns weder damit aufhalten, noch auch

---

1) *An extract of a letter, of May 4, 1697, concerning the Cycloïd known to Cardinal Cusanno, about the year 1450; and to Carolus Bovillus about the year 1500* (Phil. Trans. 1697, S. 561).

2) Bovillus, *Geometriae introductionis libri sex* (Parisiis 1501). Die betreffende Stelle ist in Maupin, *Opinions et curiosités touchant les mathématiques* (Paris 1898, S. 11) abgedruckt.

3) „Quella linea arcuata sono più di cinquant anni che mi venne in mente il descriverla, e l'ammirai per una curvita graziosissima per adattarla agli archi di un ponte. Feci sopra di essa e sopra lo spazio da lei e dalla sua corda compreso diversi tentativi per dimostrarne qualche passione, e parve da principio che tale spazio potesse essere triplo del cerchio che lo descrive ma non fu cosi(?), benchè la differenza non sia molta.“ Auszug aus einem Briefe von G. Galilei an B. Cavalieri vom 24. Febr. 1640 abgedruckt in *Le opere di Galileo Galei*, ed. Albèri, *Supplemento* (Florenz 1856) S. 366. Vgl. auch Fabbroni, *Vitae Italorum doctrina excellentium*, II. (Pisis 1788) S. 12.

4) *Histoire de la Roulette, appellée autrement Trochoïde ou Cycloïde, ou l'on rapporte, par quels degrés on est arrivé à la connaissance de cette ligne* (Oeuvres de B. Pascal, V, La Haye 1779, S. 135—214).

wollen wir in die Klagen der Besiegten mit einstimmen; wenn wir auf diese öffentliche Herausforderung hinweisen, so geschieht das, um hervorzuheben, dafs diese der Cykloide eine ungemeine Berühmtheit verlieh und wahrscheinlich nicht zuletzt die Ursache war, dafs so viele hervorragende Geometer des 17. Jahrhunderts sich mit ihr beschäftigten: diese bezeichnen die erste Periode in der Geschichte unserer Kurve[1]).

Die Erfindung der Infinitesimalrechnung lieferte neue Methoden zur Untersuchung der Cykloide: die wichtigen von Huygens, Leibniz und Joh. Bernoulli entdeckten Sätze über die Quadratur zeigten, wie viel noch zu thun übrig blieb, ehe man die Untersuchung ihrer Eigenschaften erschöpft hatte; dann waren es Fragen der Naturphilosophie, bei denen die gemeine Cykloide auftrat, und die von Huygens und anderen angegeben wurden[2]), welche diese zweite Periode der Geschichte der Cykloide verlängerten und bewirkten, dafs sie nicht weniger wichtig erscheint als die erste.

In den obigen Zeilen, in denen die allmähliche Entwickelung der Theorie der Cykloide in grofsen Zügen wiedergegeben wurde, ist zu gleicher Zeit das in diesem Kapitel zu entwickelnde Programm vorgezeichnet, nämlich die Darlegung der hervorragendsten Eigenschaften der Cykloiden mit Angabe ihrer Entdecker, so dafs der obige historische Überblick durch bestimmte und präzise Angaben beleuchtet wird.

196. Wir beginnen mit der Aufsuchung der Gleichung der Cykloide, sowohl der gemeinen (Galilei'schen) als auch der anderen (Roberval'schen oder Descartes'schen?). Es sei C der Mittelpunkt, r der Radius des bewegten Kreises und d der Abstand des erzeugenden Punktes P von C; wir nehmen ferner die Basis als x-Axe und das von der Anfangslage des Punktes P auf diese gefällte Lot als y-Axe. Ist nun (s. Taf. XIV, Fig. 115 a, b, c) P' eine beliebige Lage des erzeugenden Punktes, C' die entsprechende des Mittelpunktes, K' der Berührungspunkt der entsprechenden Lage des bewegten Kreises mit der x-Axe, und schliefslich O' die augenblickliche Lage desjenigen Punktes der Peripherie des rollenden Kreises, der ursprünglich sich in dem Koordinatenanfange O befand, so ist offenbar $O'K' = OK'$. Jetzt ziehen wir den Durchmesser $K'C'$ und projizieren auf ihn den Punkt P' in N'; dann ist ersichtlich

$$x = OK' - N'P', \quad y = C'K' - C'N';$$

bezeichnen wir nun den Winkel $O'C'K'$ mit φ, so ist klar, dafs

1) In diese Periode gehört ein lebhafter Prioritätsstreit zwischen Torricelli und Roberval; der Leser findet die Einzelheiten im II. B. der *Vorlesungen* von M. Cantor, sowie in der *Histoire des mathématiques* von Montucla (II. 2. Aufl. S. 52—73).

2) Vgl. Poppe, *Ausführliche Geschichte der Anwendungen aller krummen Linien etc.* (Nürnberg 1802) S. 122—124.

$$\text{arc}\, O'K' = r\varphi, \qquad N'P' = d\sin\varphi, \qquad C'N' = d\cos\varphi,$$

daher
$$x = r\varphi - d\sin\varphi, \qquad y = r - d\cos\varphi. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Damit haben wir die parametrische Darstellung für alle drei Cykloiden; im Falle der gemeinen Cykloide ($d = r$) wird diese zu

$$x = r(\varphi - \sin\varphi), \qquad y = r(1 - \cos\varphi).\ ^{1)} \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

Lassen wir die Axen sich um einen Winkel $-\lambda$ drehen, und nehmen wir dann den Anfangspunkt in geeigneter Weise, so können wir die Gl. (1) durch folgende Gleichungen von symmetrischer Form ersetzen

$$x = d\sin\psi - \psi\cdot r\cos\lambda, \qquad y = d\cos\psi - \psi\cdot r\sin\lambda,$$

oder auch

$$x = d\sin\psi - p\psi, \qquad y = d\cos\psi - q\psi;$$

in diesem letzteren Falle ist $\sqrt{p^2 + q^2}$ der Radius des erzeugenden Kreises, und daher ist die Cykloide eine verlängerte, gemeine oder verkürzte, jenachdem $\sqrt{p^2 + q^2} \gtreqless d$ ist.

Die Gleichungen (1) bieten im allgemeinen das bequemste Mittel, die Cykloiden darzustellen; zuweilen kann sich aber die Gleichung in x, y als nützlich erweisen, die man erhält, wenn man φ aus den Gleichungen (1) eliminiert; sie ist

$$x = r\,\text{arc}\cos\frac{r-y}{d} - \sqrt{(d+r-y)(d-r+y)}, \quad . \quad . \quad (2)$$

welche im Falle $d = r$ wird zu[2])

$$x = r\,\text{arc}\cos\frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

Wir bemerken alsbald, dafs aus (2) sich ergiebt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(d+r-y)(d-r+y)}}{y},$$

somit lautet die Gleichung der Tangente an die Cykloide im Punkte (x, y)

$$\frac{Y-y}{X-x} = \frac{\sqrt{(d+r-y)(d-r+y)}}{y}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

---

1) Es folgt daraus, dafs bei der konformen Abbildung, die durch die Funktion $z = 1 + w - e^w$ definiert ist, der Geraden $u = 0$ die gemeine, durch den Kreis mit dem Radius 1, erzeugte Cykloide entspricht $x = 1 - \cos v$, $y = v - \sin v$; vgl. Amstein, *Quelques exemples de réprésentation conforme* (Bull. de Soc. Vaudoise XVI, 1882).

2) Schreiben wir die Gleichung (2′) folgendermafsen

$$x = \int\frac{dy}{\sqrt{2ry - y^2}} - \sqrt{2ry - y^2},$$

so findet man eine von Leibniz entdeckte und ziemlich berühmte Gleichung; s. einen Brief an Huygens vom 11./21. Juli 1690 (*Leibniz* ed. Gerhardt, II, S. 43—44) und einen an Wallis vom 19./29. März 1697 (das. IV, S. 14), aufserdem einen 1686 in den *Acta eruditorum* veröffentlichten Aufsatz mit dem Titel *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* (das. V, S. 231).

Daraus folgt, dafs die Berührungspunkte der vom Punkte $P(X, Y)$ an die Cykloide gezogenen Tangenten auf einer Kurve liegen, deren Gleichung ist

$$(X-x)^2(d+r-y)(d-r+y)-y^2(Y-y)^2=0\,. \quad . \quad (4)$$

Da diese im allgemeinen eine Kurve vierter Ordnung mit P als Doppelpunkt ist[1]), so folgt: **Die Berührungspunkte der von einem beliebigen Punkte ihrer Ebene an die verlängerte oder verkürzte Cykloide gezogenen Tangenten liegen auf einer Kurve vierter Ordnung, die jenen Punkt zum Doppelpunkte hat**; dies zeigt ferner: **Jede verlängerte oder verkürzte Cykloide gehört einem Systeme an mit den Charakteristiken $\mu=2$, $\nu=2$.** — Im Falle der gemeinen Cykloide wird aber die Gleichung (4)

$$(X-x)^2(2r-y)-y(Y-y)^2=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4')$$

folglich: **Die Berührungspunkte der von einem beliebigen Punkte ihrer Ebene an die gemeine Cykloide gezogenen Tangenten liegen auf einer Kurve dritter Ordnung, die jenen Punkt zum Doppelpunkte hat; jede gemeine Cykloide gehört einem System an mit den Charakteristiken $\mu=2$, $\nu=1$.**

Um eine gute Konstruktion für die Tangente oder Normale in einem Punkte der Cykloide zu erhalten, beachten wir, dafs aus Gl. (1) sich ergiebt

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\varphi}:\frac{dx}{d\varphi}=\frac{d\sin\varphi}{r-d\cos\varphi}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

diese Funktion liefert die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Tangente im Punkte P' (mit dem Parameter φ) der Cykloide mit der x-Axe bildet, oder auch des Winkels Θ, den die Normale in diesem Punkte P' mit der y-Axe bildet. Wenn wir nun (s. Taf. XIV, Fig. 115 *a, b, c*) die Gerade $P'K'$ ziehen und mit ψ den Winkel $P'K'N'$ bezeichnen, so erhalten wir aus dem Dreiecke $K'N'P'$

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{N'P'}{N'K'}=\frac{d\sin\varphi}{r-d\cos\varphi};$$

also ist $\psi=\Theta$. Folglich bildet die durch P' gehende Normale mit der Geraden $K'N'$ einen Winkel gleich $P'K'N'$, fällt daher mit $P'K'$ zusammen. **Um also die Normale in einem beliebigen Punkte der Cykloide zu konstruieren, genügt es, diesen Punkt mit demjenigen zu verbinden, in welchem die entsprechende Lage des erzeugenden Kreises die Basis berührt**[2]).

---

1) Der Punkt $P(X, Y)$ ist eine Spitze, wenn er einer der Geraden $Y=0$, $Y=r\pm d$ angehört.

2) Diese Konstruktion findet sich in einem ungemein wichtigen Briefe von Descartes an Mersenne vom 23. August 1638 (*Oeuvres de Descartes*, ed. Cousin, VII, Paris 1824, S. 88; ed. Tannery et Adam, II, Paris 1898, S. 307—311). Für die gemeine Cykloide findet sie sich schon in dem berühmten *Methodus ad dis-*

197. Besehen wir uns die Gleichungen (1), so erkennen wir, dafs, wenn wir in ihnen φ in $\varphi + 2k\pi$ verwandeln (wo k eine ganze Zahl ist) y sich nicht verändert, und x nur um $2k\pi r$ zunimmt; dies zeigt: **Wird eine Cykloide einer translatorischen Bewegung in der Richtung der Basis von der Gröfse $2k\pi r$ unterworfen, so fällt die Kurve wieder mit sich selbst zusammen.** Die Kurve besteht aus unzähligen einander kongruenten Teilen; um die Gestalt eines einzelnen derselben zu erkennen, genügt es z. B. φ zwischen 0 und 2π, oder zwischen $-\pi$ und $+\pi$ variieren zu lassen. — Die Gleichungen (1) und (2) zeigen, dafs die Punkte, in denen die Cykloide die Basis schneidet, durch $\varphi = \arccos \frac{r}{d}$ gegeben sind; diese Punkte sind nur dann reell, wenn $r \leq d$; **folglich treffen nur die gemeine und die verlängerte Cycloide ihre Basis.** Die Maximal- und Minimalwerte von y sind $r \pm d$; **folglich liegt die Kurve (1) vollständig innerhalb des von den Geraden $y = r + d$ und $y = r - d$ begrenzten Streifens.**

Um die Doppelpunkte, falls solche existieren, aufzufinden, mufs man solche Wertepaare φ, ψ aufsuchen, denen gleiche Werte sowohl von x als auch y entsprechen; es entstehen also die Beziehungen

$$r\varphi - d \sin \varphi = r\psi - d \sin \psi, \qquad \cos \varphi = \cos \psi;$$

schliefsen wir, weil nichtssagend, die Lösung $\varphi = \psi$ aus, so ergiebt sich wegen der zweiten Beziehung nur noch die zweite $\psi = -\varphi$, welche die erste Beziehung verwandelt in

$$r\varphi - d \sin \varphi = 0.$$

Die Lösung $\varphi = 0$ ist auszuschliefsen, weil sie nichts anderes als die Anfangslage des bewegten Punktes liefert; zur Bestimmung des φ bleibt also nur die Gleichung

$$\frac{\sin \varphi}{\varphi} = \frac{r}{d};$$

da nun immer $\frac{\sin \varphi}{\varphi} \leq 1$ ist, so mufs, damit diese Gleichung reelle Wurzeln habe, $r \leq d$ sein, **folglich haben die verkürzten Cykloiden keine Doppelpunkte.** Im Falle $\frac{r}{d} < 1$ läfst die vorige Gleichung zwei reelle, einander gleiche aber entgegengesetzte Wurzeln zu; Gleichung (5) zeigt dann, dafs die entsprechenden Tangenten gleiche Winkel mit

---

quirendam maximam et minimam von Fermat, dem Descartes am 10. Jan. 1638 mitgeteilt (*Oeuvres de Fermat* I, S. 136, III, S. 144; vgl. den Brief v. Fermat an P. Mersenne vom 22. Okt. 1638, das. II, S. 171). Über dasselbe Thema siehe Roberval, *Observations sur la composition des mouvements* (Mém. de l'Acad. des Sciences VI, 1730) S. 58, ebenso einige Briefe von R. de Sluse an Pascal und Oldenburg, datiert vom 6. Jul., 2. Aug. u. 13. Sept. 1858, ferner vom 29. Apr. u. 26. Mai 1659, veröffentlicht alle von C. Le Paige im XVIII. B. des *Bullettino di Bibliografia e Storia etc.*

der y-Axe bilden, während (1) und (1′) erkennen lassen, dafs für ihren gemeinsamen Berührungspunkt $x = 0$ ist. **Die verlängerte Cykloide hat demnach unzählig viele Doppelpunkte, deren Abscissen Vielfache vom Umfange des rollenden Kreises sind.** Im Grenzfalle $r = d$ fallen jene Tangenten zusammen, **folglich hat die gemeine Cykloide unzählig viele Spitzen.**

Noch eine Gestalteigenschaft der Cykloide ergiebt sich aus der Bemerkung, dafs der Krümmungsradius derselben im allgemeinen durch die Formel gegeben wird

$$R = \frac{[r^2 + d^2 - 2rd\cos\varphi]^{\frac{3}{2}}}{d(r\cos\varphi - d)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

und im Falle der gemeinen Cykloide durch

$$R = 4r \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6')$$

Aus (6) geht hervor, dafs Wendepunkte der Kurve die durch die Gleichung $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{r-d}{r+d}}$ bestimmten Punkte sind; damit diese nun reelle Wurzeln habe, mufs $r \leqq d$ sein, folglich: **Die verlängerten Cykloiden haben keine Wendepunkte**; im Falle $d = r$, sind diejenigen Punkte, in denen $R = 0$ die, für welche $\varphi \equiv 0$ (*mod.* 2π); dies sind die Spitzen; **demnach sind nur die verkürzten Cykloiden mit Wendepunkten versehen.** Aus unserer Diskussion ergiebt sich, dafs man die verkürzte, gemeine, verlängerte Cykloide in einer anschaulicheren Berechnungsweise, Wendepunkts-, Spitzen- und Knotenpunkt-Cykloide nennen könnte.

198. Bezeichnen wir mit ds_c das Bogendifferenzial der durch Gleichung (1) dargestellten Cykloide, so haben wir

$$ds_c = d\varphi \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Wir setzen nun $\qquad r + d = \frac{a}{2}, \quad |r - d| = \frac{b}{2}$

und erhalten $\qquad ds_c = \frac{d\varphi}{2}\sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2\frac{\varphi}{2}},$

und, wenn wir $\varphi = 2\psi$ setzen,

$$ds_c = d\psi \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2\psi}.$$

Betrachten wir jetzt die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

oder $\qquad x = a\cos\psi, \quad y = b\sin\psi,$

so ist deren Bogen s_e im Differenzial

$$ds_e = d\psi \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2\psi},$$

demnach ist $ds_c = ds_e$. Diese beachtenswerte Beziehung zwischen einem Cykloiden- und Ellipsen-Bogen ist von Blaise Pascal entdeckt worden und kann kurz wiedergegeben werden, indem man sagt: **Die Rektifikation einer beliebigen Cykloide hängt im allgemeinen von der Rektifikation einer Ellipse ab**[1]. Wenn es sich jedoch um eine gemeine Cykloide handelt, so erfordert die Rektifikation nur die Anwendung der Kreisfunktionen; für $d = r$ wird nämlich Gl. (7) zu

$$ds_c = 2r \sin\frac{\varphi}{2} \cdot d\varphi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7')$$

welche zwischen 0 und φ integriert ergiebt

$$s_c = 4r\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right) = 8r\sin^2\frac{\varphi}{4} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Um die Länge des zwischen zwei Spitzen gelegenen Cykloidenbogens zu erhalten, genügt es hierin $\varphi = 2\pi$ einzusetzen; man erhält dann als Resultat $8r$, und somit kommen wir zu dem folgenden Satze von Wren: **Der zwischen zwei aufeinander folgenden Spitzen gelegene Bogen einer gemeinen Cykloide ist gleich dem vierfachen Durchmesser des erzeugenden Kreises**[2].

Die von der Ordinate der Kurve (1) beschriebene Fläche S, wenn φ von 0 bis 2π variiert, wird gegeben durch

$$S = 2\int_0^\pi y \cdot dx = 2\int_0^\pi (r - d\cos\varphi)^2 \cdot d\varphi$$

$$= \left|(2r^2 + d^2)\varphi - 4dr\sin\varphi + \frac{d^2 \sin 2\varphi}{2}\right|_0^\pi = (2r^2 + d^2)\pi = 2\pi r^2 + \pi d^2.$$

Die Fläche ist also gleich dem doppelten Inhalte des rollenden Kreises vermehrt um den Inhalt des Kreises, der den Abstand des erzeugenden Punktes vom Mittelpunkte des rollenden zum Radius hat. Setzt man im speziellen $d = r$, so erhält man den Satz von Roberval, welcher besagt: **Bei der gemeinen Cykloide ist die Fläche zwischen der Basis und dem von zwei aufeinander folgenden Spitzen begrenzten Bogen gleich dem Dreifachen des rollenden Kreises**[3].

---

1) *Dimensions des lignes courbes de toutes les roulettes* (Oeuvres de B. Pascal V, La Haye 1779, S. 411). Nach Wallis, *Tractatus duo.* (*Opera mathematica,* Oxoniae 1695, S. 538) wurde der Satz von Wren 1658 entdeckt. Vgl. auch Giannini, *Opuscula mathematica* (Parma 1773) S. 85, und Küpper, *Uebungsaufgaben für Schüler* (Archiv der Math. XXVII, 1856).

2) S. Wallis, *Tractatus duo.* (Opera mathem. I, S. 533—541); vgl. die Note *Propositio Domini Wren, Demonstrata a Claudio Mylon die 26. Januarii 1659,* beigefügt einem Briefe, den Mylon unter dem 31. Jan. 1659 an Huygens schickte (*Oeuvres de Huygens* II, S. 335).

3) *De trochoide ejusque spatio* (Mém. de l'Acad. des Sciences VI, 1730) S. 311; s. auch einen Brief an Fermat v. 1. Juni 1638 (*Oeuvres de Fermat* II, S. 151), ebenso zwei Briefe zwischen Mersenne und Descartes gewechselt, 28. Apr. u. 27. Mai 1638 (*Oeuvres de Descartes,* ed. Cousin, VII, 1824, S. 134 u. 140; ed.

Bei der Aufstellung dieses wichtigen Satzes wurde Roberval veranlafst, die Betrachtung einer neuen, mit der Cykloide eng verbundenen Kurve einzuführen, die er zu dem Zwecke die Gefährtin der Cykloide (trochoidis comes sive socia) nannte[1]). Sie wird in folgender Weise konstruiert: Durch einen beliebigen Punkt P' der Cykloide (Taf. XIV, Fig. 115 a) ziehe man die Parallele zur Basis und trage auf ihr von P' aus in dem Sinne, in welchem die Bewegung erfolgt, die Strecke PN' gleich der Hälfte der Sehne, welche der erzeugende Kreis auf dieser Parallelen ausschneidet, ab; der Punkt N' liegt dann auf der Gefährtin der Cykloide. Die Koordinaten von N' werden offenbar ausgedrückt durch

$$x = r\varphi, \qquad y = r(1 - \cos\varphi);$$

durch Elimination von φ erhält man

$$r - y = r\cos\frac{x}{r},$$

welche Gleichung ersichtlich eine der Tschirnhausen'schen Quadratrix ähnliche Kurve (die Sinusversuslinie) darstellt; die vollständige Untersuchung derselben wollen wir auf eine andere Gelegenheit verschieben (Nr. 222), nur das wollen wir bemerken, dafs die von der Gefährtin der Cykloide und der Basis begrenzte Fläche S_1 gegeben wird durch

$$S_1 = 2r^2\int_0^\pi (1 - \cos\varphi)\,d\varphi = 2\pi r^2.$$

Sie ist also die mittlere Proportionale zwischen (πr^2), der Fläche des rollenden Kreises und derjenigen $(\pi \cdot \overline{2r}^2)$ des Kreises, der zum Radius den Durchmesser des ersteren hat. Roberval hat aufserdem bemerkt, dafs $S - S_1 = \pi r^2$. Er bediente sich ferner derselben Hilfskurve, um das durch Rotation der Cykloide (immer begrenzt zu denken zwischen zwei Spitzen) um ihre Basis erzeugte Volumen V zu ermitteln[2]). Um die von ihm erhaltenen Resultate zu bestätigen, bezeichnen wir mit V_1 das ähnlich erzeugte Volumen der Begleitkurve der Cykloide und mit U das des umbeschriebenen Cylinders. Durch Anwendung bekannter Formeln finden wir

$$V = 5\pi^2 r^3, \qquad V_1 = 3\pi^2 r^3, \qquad U = 8\pi^2 r^3.$$

Adam et Tannery II, 1898, S. 116 u. 135). Ein geometrischer sehr einfacher Beweis des Roberval'schen Satzes steht in *The mathematical and other Writings of R. L. Ellis* (Cambridge 1863) S. 224.

1) *De trochoïde etc.* S. 63 u. 306. Montucla dagegen gebraucht (*Histoire des mathématiques,* Nouv. éd. Paris 1799, II, S. 72) den Namen „petite cycloïde".

2) Anspielungen auf die Fragen der Kubatur machen Descartes in einem Briefe an P. Mersenne vom 11. Okt. 1638 (*Oeuvres de Descartes*, ed. Cousin, VII, 1824, S. 450; ed. Adam et Tannery II, 1898, S. 395) und Fermat in einem Briefe an denselben vom 1. April 1640 (*Oeuvres de Fermat* II, S. 191). Ebenfalls bezieht sich darauf die Prop. XX des *Tractatus Mechanicorum* von Wallis (1670) (*Opera mathematica* I, S. 815—835).

Daher ist $\frac{V}{U} = \frac{5}{8}$, $\frac{V_1}{U} = \frac{3}{8}$, $V + V_1 = U$,

wie auch der französische Geometer erhalten hat. Sind daher g und g_1 die Ordinaten der Schwerpunkte der Flächen S und S_1, so hat man nach dem Guldin'schen Satze

$$V = 2\pi g \cdot S, \qquad V_1 = 2\pi g_1 \cdot S_1,$$

folglich ist $g = \frac{5}{6} r$, $g_1 = \frac{3}{4} r$.

Wir überlassen es dem Leser in ähnlicher Weise (wie es Roberval 1649 gethan hat) das durch Rotation der Cykloide um ihre Mittellinie erzeugte Volumen zu berechnen, sowie den Schwerpunkt des Bogens zu bestimmen[1]) und kehren zur Quadratur der gemeinen Cykloide zurück, um einige wichtige darauf bezügliche Sätze anzuführen.

199. Derjenige ältesten Datums wurde von Huygens[2]) entdeckt. Um ihn darzulegen, beachten wir vor allem, dafs die Gleichungen (1′) ergeben

$$\int x \cdot dy = r^2 \int (\varphi \sin\varphi - \sin^2\varphi)\, d\varphi$$
$$= r^2 \left\{ -\varphi\cos\varphi + \sin\varphi - \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi \right\} + Const.$$

Zeichnen wir nun den erzeugenden Kreis in der Lage, in welcher er den Kulminationspunkt A der Cykloide berührt (Taf. XV, Fig. 116), und sei B sein Mittelpunkt und H der Berührungspunkt mit der Basis; durch den Mittelpunkt G des Radius AB die Parallele zur Basis der Cykloide, welche die Kurve in L und die y-Axe in L' schneidet; sei dann noch A' der Schnitt dieser Axe mit der durch A zus Basis gezogenen Parallelen, so haben wir

$$\text{Fläche } A'L'LA = \int_{y=\frac{3r}{2}}^{y=2r} x \cdot dy$$

$$= r^2 \left| -\varphi\cos\varphi + \sin\varphi - \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi \right|_{\varphi=\frac{2\pi}{3}}^{\varphi=\pi} = \frac{\pi r^2}{2} - \frac{3\sqrt{3}\, r^2}{8};$$

folglich ist die Fläche $AGDLA = \frac{3\sqrt{3}\, r^2}{8}$, und das Segment $ADLMEA = \frac{3\sqrt{3}\, r^2}{4}$. Letzteres bedeutet aber die Fläche des einem

1) Saint-Germain, *Receuil complementaire d'exercises sur la mécanique rationelle* (Paris 1889) S. 56.

2) Dieser Satz wurde zuerst von Huygens an Ism. Bouillaud durch Brief vom 25. Juni 1658 mitgeteilt (*Oeuvres de Huygens* II, S. 200) und nachher an Carcavy (Brief v. 16. Jan. 1659), das. S. 315; veröffentlicht wurde er durch Pascal in der o. a. *Histoire de la roulette.*

Kreise mit dem Radius r einbeschriebenen regelmäſsigen Sechsecks; demnach ist die Cykloidenzone $ADLMEA$ exakt quadrierbar.

Dies bemerkenswerte von Huygens erlangte Resultat veranlaſste Leibniz nach weiteren zu suchen, und das nicht vergeblich. Er fand nämlich folgendes[1]): Zieht man durch den Mittelpunkt B des erzeugenden Kreises in der Lage, in welcher er den Kulminationspunkt A berührt, die Parallele zur Basis, welche den Kreis, die Cykloide und die y-Axe bezw. in E, F und B' schneidet (Taf. XV, Fig. 117), so ist das von der Geraden AF und dem entsprechenden Cykloidenbogen begrenzte Segment gleich dem Dreiecke ABE. Man hat nämlich

$$\text{Segment } AFDA = \text{Trapezfläche } AA'BFA - \text{Fläche } AA'B'FDA$$
$$= \frac{r}{2}\left(\pi r + r\frac{\pi}{2} - r\right) - r^2 \Big| -\varphi\cos\varphi + \sin\varphi - \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}2\varphi\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$= \frac{1}{2}r^2 = \triangle AEB,$$

wie behauptet war.

Die beiden einzeln soeben bewiesenen Sätze führten Joh. Bernoulli zur Auffindung eines anderen Satzes, der diese beiden als Spezialfälle in sich schlieſst; er gelangte nämlich zur Entdeckung unendlich vieler exakt quadrierbarer Flächen bei der gemeinen Cykloide[2]). Um darzulegen, wie diese bestimmt werden, betrachten wir wiederum den rollenden Kreis in der Lage, in der er die Cykloide im Kulminationspunkte A berührt; sei H der Mittelpunkt (Taf. XV, Fig. 118) und F der Berührungspunkt der Basis; es seien I und K Punkte des Durchmessers AH derart, daſs $AK = HI = \eta$; durch K und I ziehen wir die Parallelen zur Basis $D'DM\overline{D}$ und $B'BL\overline{B}$ und wollen nun die Fläche der Segmente $BCDB$ und $BC\overline{D}\overline{B}$ berechnen, wo C ein beliebiger Punkt des Bogens BD sein möge. Die den Punkten $B, D, \overline{D}$ entsprechenden Werte des Winkels φ bezeichnen wir mit $\varphi_0, \Phi, \overline{\Phi}$, und die entsprechenden Koordinaten mit $x_0, y_0, X, Y, \overline{X}, \overline{Y}$; dann haben wir:

$$\cos\varphi_0 = -\frac{\eta}{r}, \qquad \sin\varphi_0 = \frac{\sqrt{r^2-\eta^2}}{r};$$
$$\cos\Phi = \cos\overline{\Phi} = -\frac{r-\eta}{r}, \quad \sin\Phi = -\sin\overline{\Phi} = \frac{\sqrt{2r\eta-\eta^2}}{r}.$$

1) *Extrait d'une lettre de M. Leibniz écrite d'Hannovre à l'auteur du Journal touchant la quadrature d'une portion de la roulette* (Journ. des Savants 1678), oder *Leibniz,* ed. Gerhardt, V, S. 116—17). Vgl. auch einen Brief von Leibniz an Oldenburg v. 15. Juli 1674 (Das. I, S. 52), ebenso die zwischen Leibniz und dem Marquis de l'Hôpital gewechselten Briefe v. 30. Sept., 1. Dez. 1695 u. 15. Jan. 1696 (Das. II, S. 299, 304, 311).

2) *Cycloidis primariae segmenta innumera quadraturae determinatio etc.* (Acta erud. Juli 1699; *Joh. Bernoulli Opera* I, S. 322—327).

Nun ergiebt sich aus der Figur und dem zu Anfang dieser Nr. aufgestellten allgemeinen Ausdrucke für $\int x \cdot dy$:

$$\text{Fläche } BCDB = \text{Trapez } BB'D'B - \text{Fläche } BB'D'CB$$

$$= \frac{(Y-y_0)(X-x_0)}{2} - \int\limits_{y=r+y}^{y=2r-y} x \cdot dy = \frac{(r-2\eta)(X+x_0)}{2}$$

$$- \left| -\varphi\cos\varphi + \sin\varphi - \tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{4}\sin 2\varphi \right|_{\varphi=\varphi_0}^{\varphi=\Phi},$$

und nach einigen Reduktionen

$$\text{Fläche } BCDB = \frac{(y+r)\sqrt{r^2-\eta^2}}{2} - \frac{(2r-\eta)\sqrt{2r\eta-\eta^2}}{2}.$$

Ähnlich ergiebt sich

$$\text{Fläche } BC\overline{D}B = \frac{(\eta+r)\sqrt{r^2-\eta^2}}{2} + \frac{(2r-\eta)\sqrt{2r\eta-\eta^2}}{2}.$$

Verbindet man aber F mit den Punkten L und M, so hat man

$$\text{Dreieck } FIL \;= \tfrac{1}{2}(r+\eta)\sqrt{r^2-\eta^2},$$

$$\text{Dreieck } FMK = \tfrac{1}{2}(2r-\eta)\sqrt{2r\eta-\eta^2};$$

folglich ist

$$\left.\begin{array}{l}\text{Fläche } BCDB \\ \text{Fläche } BCD\overline{D}B\end{array}\right\} = \text{Dreieck } FIL \mp \text{Dreieck } FMK. \quad . \quad (9)$$

Diese Doppelbeziehung enthält den Satz, durch welchen Joh. Bernoulli die beiden vorigen von Huygens und Leibniz verallgemeinerte. Er sowohl, wie auch sein Bruder Jakob, stellten noch weitere ähnliche Untersuchungen an, auf welche näher einzugehen uns versagt ist[1]); wir wollen nur andeuten, dafs sie zur Entdeckung einer ähnlichen Relation wie (1) führten, die für alle Cykloiden verlängerte und verkürzte Gültigkeit hat[2]).

200. Zu anderen beachtenswerten Eigenschaften der gemeinen Cykloide führen Betrachtungen über ihre Krümmung; da nämlich [m. s. die Gl. (6'), (8) und (1')]

$$R = 4R\sin\frac{\varphi}{2}, \qquad s = 1 + r\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right), \qquad y = 2r\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

so folgt

$$R^2 + (s-4r)^2 = \overline{4r}^2 \;\ldots\; (10) \qquad R^2 = 8r\cdot y. \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Verlegen wir den Anfang des Bogens, so wird die Gleichung (10) zu $R^2 + s^2 = (4r)^2$. Dies ist die natürliche kanonische Gleichung der gemeinen Cykloide; in geeigneter Weise interpretiert, besagt sie: **Wenn eine Cykloide auf einer festen Geraden rollt, so ist der Ort**

1) *Jac. Bernoulli Opera,* S. 1129—1134; *Joh. Bernoulli Opera* I, S. 328—335.
2) Acta Erudit. Juni 1700; *Joh. Bernoulli Opera* I, S. 330.

der Krümmungscentren für die aufeinander folgenden Berührungspunkte ein Kreis, dessen Radius viermal so grofs ist als der des erzeugenden Kreises[1]. Die Gleichung (11) hingegen besagt: **Der Krümmungsradius in einem beliebigen Punkte der gemeinen Cykloide ist die mittlere Proportionale zwischen der zugehörigen Ordinate und einer konstanten Gröfse:** eine weitere charakteristische Eigenschaft der Cykloide[2].

Sind x_1, y_1 die Koordinaten des Mittelpunktes der Krümmung im Cykloidenpunkte (φ), so findet man leicht

$$x_1 = r(\varphi + \sin\varphi), \quad y_1 = -r(1 - \cos\varphi); \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

wenn man nun die Koordinatentransformation, die durch die Formeln

$$x_1 = x' + \pi r, \quad y_1 = y' - 2r$$

definiert wird, ausführt und einen Winkel ψ einführt, der mit φ durch die Beziehung $\varphi = \pi + \psi$ verknüpft ist, so verwandeln sich die vorigen Gleichungen in

$$x' = r(\psi - \sin\psi), \quad y' = r(1 - \cos\psi),$$

und diese mit (1′) verglichen beweisen: **Die Evolute einer gemeinen Cykloide ist eine ihr gleiche Kurve**[3].

Das zwischen dem Kurvenpunkte und dem Schnitte mit der Basis gelegene Stück N der Normalen zur Cykloide wird gegeben durch

$$N = y\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = 2r\sin\frac{\varphi}{2},$$

weshalb $R = 2N$. **Der Krümmungsradius ist also doppelt so grofs als die Normale; die sämtlichen Krümmungsradien werden durch eine feste Gerade (die Basis) halbiert;** auch diese Eigentümlichkeit kommt ausschliefslich der gemeinen Cykloide zu[4].

Schliefslich wollen wir noch beweisen: **Jede Parallelprojektion einer Cylinder-Schraubenlinie auf die Basisebene ist eine Cykloide, und zwar eine gemeine, verkürzte oder verlängerte, jenachdem die Neigung der Projektionsstrahlen gegen die Erzeugenden des Cylinders gleich, kleiner oder gröfser als die Steigung der Schraubenlinie ist**[5].

---

1) Mannheim, *Recherches géométriques sur le lieu des positions successives des centres de courbure d'une courbe qui roule sur une droite* (Liouvilles Journ. 2. Ser. IV, 1859) S. 99.

2) Tisserand, *Recueil complémentaire d'exercises sur le calcul infinitésimal* (Paris) II. Aufl. S. 251.

3) Huygens, *Horologium oscillatorium* (1673) 3. Teil, Prop. VI.

4) Cesàro, *Lezioni di geometria intrinseca* (Neapel 1896) S. 24.

5) Wer zuerst diesen Satz bemerkt hat, wissen wir nicht. Für den Fall der gemeinen Cykloide spricht Montucla davon (*Histoire des math.* Nouv. éd. Paris 1799, II, S. 78) als von einer von ihm gefundenen Sache und leitet daraus ab, dafs die Cykloide sich ins Unendliche erstrecke, während es scheint, dafs man früher nur den zwischen zwei aufeinander folgenden Spitzen liegenden Teil betrachtet hat.

Betrachtet man nämlich die Schraubenlinie

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = r\,\mathrm{cotg}\,\mu\cdot\varphi$$

und projiziert diese in den durch die Winkel α, β, γ definierten Richtungen, so erhält man den Cylinder dargestellt durch die Gleichungen

$$\frac{x - r\cos\varphi}{\cos\alpha} = \frac{y - r\sin\varphi}{\cos\beta} = \frac{z - r\,\mathrm{ctg}\,\mu\cdot\varphi}{\cos\gamma}.$$

Setzen wir hierzu $z = 0$, so erhalten wir die beiden folgenden Gleichungen für die Darstellung der Projektionskurve

$$x = r\cos\varphi - r\,\mathrm{ctg}\,\mu\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\cdot\varphi, \quad y = r\sin\varphi - r\,\mathrm{ctg}\,\mu\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\cdot\varphi,$$

welche thatsächlich einer Cykloide angehören (s. Nr. **196**). Der Radius des erzeugenden Kreises ist $= r\,\mathrm{ctg}\,\mu\,\frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta}}{\cos^2\gamma} = r\,\mathrm{ctg}\,\mu\cdot\mathrm{tg}\,\gamma$, daher ist die Cykloide eine verkürzte, gemeine oder verlängerte, jenachdem $r\,\mathrm{ctg}\,\mu\cdot\mathrm{tg}\,\gamma \gtreqless r$ ist, d. h. jenachdem $\gamma \lesseqgtr \mu$ ist, wie der Satz eben behauptet.

Die für die gemeine Cykloide hier bewiesenen geometrischen Eigenschaften — es sind bei weitem nicht die einzigen, die sie besitzt[1]) — zeigen hinlänglich, welch eine bemerkenswerte Kurve sie ist, und erklären hinlänglich die Häufigkeit der seit dem 17. Jahrhundert an ihr angestellten Untersuchungen. Jedoch wuchs die Wertschätzung derselben noch ungemein, als Huygens bemerkte[2]), dafs sie die Tautochrone (von ταὐτός χρόνος, dieselbe Zeit) im leeren Raume sei[3]), indem er entdeckt hatte, dafs die Kurve von der Eigen-

---

1) Unter den von uns übergangenen Sätzen erwähnen wir besonders den von Jac. Bernoulli in der Note *De evolutione successiva et alternante curvae cujus quoque etc.* dargelegten (Opera IV, S. 98); dieser wurde weiter untersucht von Legendre (*Exercises de calcul intégral* II, Paris 1817), von Poisson (Journ. de l'Éc. pol. XVIII, Cah.) und verallgemeinert von G. Mainardi (*Sullo sviluppo imperfetto continuo di una curva piana* (Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto, VII, 1837). — Von Problemen, die durch die Cykloide gelöst werden, möge folgendes erwähnt werden: „Eine Kurve zu finden, die durch zwei gegebene Punkte geht und mit den zugehörigen Normalen und dem Bogen der Evolute ein Viereck von kleinstem Flächeninhalt begrenzt“ (Kneser, *Lehrbuch der Variationsrechnung*, Braunschweig 1900, S. 203).

2) *Horologium oscillatorium* II. Teil. Prop. XXV. M. s. auch de la Hire, *Traité de mécanique*, IX, 1666—1699. Ein sehr einfacher Beweis für den Tautochronismus der Cykloide findet sich in *The math. and other Writings of R. L. Ellis* (Cambridge 1863) S. 326; vgl. auch Lehmann, *Theorie der Cycloide als Tautochrona. Diskussion nach der antiken geometrischen Methode* (Crelle's Journ. VI, 1830).

3) Joh. Bernoulli wendet hingegen den Namen linea tachystoptota an (Brief an Leibniz v. 16. Juni 1696; *Leibniz*, ed. Gerhardt, III, S. 291) und Jac. Bernoulli den Namen curva oligochrona (Acta erud. Mai 1697; *Opera* S. 768—778).

schaft, dafs ein schwerer Punkt, der sie durchläuft, immer in derselben Zeit den tiefsten Punkt erreicht, gleichgültig, von welchem Punkte er ausgehe, eine gemeine Cykloide mit horizontaler Basis sei, jedoch mit der Konkavität nach oben gerichtet. Doch nicht genug damit! Joh. Bernoulli[1]) stellte in den *Acta eruditorum* vom Juni 1696 und dann in einem *Programma editum Groningae A^o 1697* als „problema novum, ad cujus solutionem mathematici invitantur“ folgendes: „Datis in plano verticali duobus punctis A et B, assignari mobili M viam AMB, per quam gravitate sua descendens, et moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad altrum punctum B“. Die lösende Kurve (in jenem Programm als linea celerrimi descensus bezeichnet) und heute Brachistochrone genannt (von βϱάχιστος χϱόνος, kürzeste Zeit) ist nun eine gemeine Cykloide, und nicht, wie Galilei glaubte[2]), ein Kreisbogen: bewiesen wurde dieses von Leibniz, Jak. Bernoulli, dem Marquis de l'Hôpital und Newton[3]).

Ferner: Betrachtet man bei der Bewegung eines Punktes auf einer Cykloide die Horizontale durch den Ausgangspunkt, die durch den tiefsten Punkt und diejenige, die den Abstand dieser beiden halbiert, so ist die Zeit, die der bewegte Punkt gebraucht, um von der ersten Lage zur dritten zu gelangen, gleich der, welche er gebraucht, um von der zweiten in die dritte Lage zu kommen[4]); dies wird dadurch ausgedrückt, dafs man sagt: die Cykloide ist eine mesochrone Kurve[5]).

Schliefslich ist die Cykloide noch mit den Anfängen der Theorie der synchronen Kurven verknüpft; Joh. Bernoulli stellte nämlich in den *Acta eruditorum* vom Mai 1697 folgende Aufgabe[6]): „Quaeritur in plano verticali curva PB, quam synchronam appellare liceat, ad cujus singula puncta B, grave ex A descendens per cycloides conterminans AB aequali tempore perveniret“. Später wurde der Begriff der synchronen Kurven bedeutend verallgemeinert: man betrachtete nämlich eine Familie von Kurven, gelegen in einer vertikalen Ebene, ausgehend von einem Punkte A, und untersuchte den Ort der Positionen, den im selben Augenblicke die Punkte einnehmen, welche die gegebenen Kurven unter dem Einflusse gegebener Kräfte durchlaufen,

1) *Joh. Bernoulli opera* I, S. 155—161 u. 166—169.

2) *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze.* Giornata III, Prop. 36, Scolio (*Opere di Galileo Galilei* VIII, Milano 1811, S. 353).

3) Die ersten drei Lösungen des Problems von Bernoulli finden sich in den Acta erudit. Mai 1697, die letzte anonym in der Nr. 224 der Phil. Trans. (Jan. 1697). S. auch *Leibniz,* ed. Gerhard, III, S. 290, und *Is. Newtonii opuscula* I. (Lausannae et Genevae 1744) S. 285.

4) Serret, *Des methodes en géométrie* (Paris 1855) S. 132.

5) Brocard, *Note de bibliographie des courbes géométriques* (Bar-le-Duc 1897) S. 201.

6) *Joh. Bernoulli opera* I, S. 192.

wenn sie zu gleicher Zeit von A ausgegangen sind[1]). Die Behandlung dieser Aufgabe, sowie die Probleme der tautochronen und brachistochronen Kurven — sei es in der ursprünglichen Form oder unter der Annahme, dafs die Bewegung in einem resistenten Medium erfolge — überschreitet jedoch die dieser Arbeit gesteckten Grenzen[2]).

201. Die Definition der Cykloide ist verschiedener Verallgemeinerungen fähig; einige derselben, die schon in der Periode auftraten, in welcher diese Kurve besonders eifrig untersucht wurde, mögen hier erwähnt werden. Fermat bezeichnete in einem Briefe an Carcavy vom Jahre 1660[3]), den dieser dem Huygens unter dem 6. März desselben Jahres mitteilte[4]), eine Eigenschaft einer Kurve, die schon seit 20 Jahren allgemein bekannt war, indem P. Lalouběre davon in dem Anhange seines Werkes *Veterum Geometria promota in septem de Cycloide libris* (Tolosae 1640) gesprochen hatte[5]). Es sind Kurven, die affin zur gemeinen Cyloide sind, indem sie durch Gleichungen von folgender Form dargestellt werden:

$$x = kr(\varphi - \sin\varphi), \qquad y = r(1 - \cos\varphi), \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

wo k eine gegebene Zahl ist. Wenn $k > 1$, so haben wir es — nach der Fermat'schen Bezeichnungsweise — mit verlängerten, wenn $k < 1$ aber mit verkürzten Cykloiden zu thun. Fermat hat bemerkt, **dafs die verlängerten Cykloiden durch Kreisbögen, die verkürzten dagegen durch Parabelbögen rektifizierbar sind.** Um dies nachzuweisen, beachten wir, dafs aus (13) sich ergiebt

$$ds = r \cdot d\varphi \sqrt{(k^2+1) - 2k^2\cos\varphi + (k^2-1)\cos^2\varphi};$$

setzen wir $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = u$, so können wir schreiben

$$ds = \frac{4ru \cdot du\sqrt{1+k^2u^2}}{(1+u^2)^2};$$

und, wenn wir statt u eine neue Variabele z einführen, derart, dafs $z^2 = 1 + k^2u^2$, so erhalten wir

$$ds = \frac{4k^2rz^2 \cdot dz}{(k^2 - z^2 - 1)^2}.$$

---

1) S. die beiden von Euler hinterlassenen Abhandlungen, abgedruckt im IX. B. (1824) der *Mém. de l'Acad. des Sciences de St. Petersbourg.*

2) Der Leser, welcher genauere Berichte wünscht, nehme Lacroix, *Traité de calcul differentiel et de calcul intégral* II. (Paris 1798) S. 696; Pascal, *Calcolo delle variazioni e calcolo delle differenze finite* (Milano 1897) S. 172; Saint-Germain, *Recueil complémentaire d'exercises sur la mécanique rationnelle* (Paris 1898) S. 292 u. 298; u. s. w. Aufserdem verweisen wir auf die historischen Arbeiten von C. Ohrtmann, *Das Problem der Tautochronen* (Berlin 1872) und F. Amodeo, *Monografia delle curve tautocrone* (Avellino 1883).

3) *Oeuvres de Fermat* II, S. 445—48.

4) *Oeuvres de Huygens* III, S. 39—40.

5) Vgl. *Oeuvres de Fermat* I, S. 202, und III, S. 175.

Integrieren wir in Teilen, so ergiebt sich

$$\frac{s}{2k^2r} = -\frac{z^2}{z^2+k^2-1} + \int \frac{dz}{z^2+k^2-1},$$

und wenn die noch unterbliebene Integration ausgeführt wird,

$$\frac{s}{2k^2r} = \begin{cases} -\frac{z^2}{z^2+k^2-1} + \frac{1}{2\sqrt{1-k^2}} \log \frac{z-\sqrt{1-k^2}}{z+\sqrt{1-k^2}}, & \text{wenn } k<1, \\ -\frac{z^2}{z^2+k^2-1} + \frac{1}{\sqrt{k^2-1}} \operatorname{arc\,tg} \frac{z}{\sqrt{k^2-1}}, & \text{wenn } k>1. \end{cases}$$

Da nun, wenn $k<1$, man es mit verkürzten, wenn $k>1$, mit verlängerten Fermat'schen Cykloiden zu thun hat, so kann man hieraus den oben ausgesprochenen Satz erschliefsen[1]).

Den Fermat'schen Cykloiden begegnet man in Fragen der darstellenden Geometrie[2]). Bemerkenswert ist die Thatsache, dafs, wahrscheinlich ohne die Beobachtungen des berühmten Tolosanischen Senators zu kennen, Laisant diese Kurven wieder auffand, als er die Entstehungsweise der gemeinen Cykloide verallgemeinerte[3]). Laisant bemerkte nämlich: wenn ein Punkt sich auf der Peripherie einer Ellipse mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt, während diese selbst sich in einer mit einer Axe parallelen Richtung gleichförmigen Bewegung befindet, so ist die Trajektorie der resultierenden zusammengesetzten Bewegung eine Kurve, die durch zwei Gleichungen von folgendem Typus darstellbar ist:

$$x = \frac{r}{a^2}(\varphi - \sin\varphi), \quad y = r\cos\varphi; \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

aus diesen geht hervor, dafs die Kurve für $a=1$ eine gemeine, jedoch für $a \neq 1$ eine Fermat'sche Cykloide ist. Laisant nannte sie elliptische Cykloide zum Unterschiede von der ähnlich vermittelst einer Hyperbel erzeugten Kurve, die er hyperbolische Cykloide nannte, und die durch folgende Gleichungen dargestellt wird:

$$x = \frac{r}{a^2}(\varphi - \mathfrak{Sin}\,\varphi), \quad y = r\,\mathfrak{Cos}\,\varphi. \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

202. Unter dem 6. Mai 1674 schrieb Michelangelo Ricci an Huygens: „Man nehme eine Gerade AB von beliebiger Länge (Taf. XV, Fig. 119), an die sich zwei gleiche und ähnlich gelegene Halbkreise AGE, BCD anschliefsen, deren Durchmesser AE und BD senkrecht

1) Dieser Satz wurde von B. Tortolini im J. 1839 wiedergefunden; man sehe die Abh. *Sul metodo inverso delle tangenti* im Giornale arcadico und übersetzt in Crelles Journ. XXVI, 1843; vgl. auch Tortolini, *Rivista bibliografica. Sugli archi di cicloide* (Ann. di Matem. VI, 1865).

2) F. J., *Exercises de géométrie déscriptive* (III. éd. Paris 1893) S. 545.

3) *Essai sur les fonctions hyperboliques* (Paris 1874) S. 56 ff. S. auch S. Günther, *Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunctionen* (Halle a. S. 1881) S. 243 ff.

auf AB stehen; dann nehme man auf der Peripherie des letzteren die Punkte C, C u. s. w., ziehe durch diese die Parallelen zu AB und bestimme auf diesen die Punkte F, F u. s. w. derart, daſs der Bogen BCD sich verhält zu DC, DC u. s. w. wie AB zu CF, CF u. s. w.; die Punkte F, F u. s. w. liegen dann auf einer Linie, die eine primäre Cykloide ist, wenn AB gleich der Peripherie BCD, eine sekundäre, wenn man AB davon verschieden annimmt. Dieselbe Kurve $DFF\ldots A$, gleichsam Diagonale des krummlinigen Parallelogramms $DCC\ldots BAGE$ teilt dieses in zwei gleiche Teile; hieraus folgt, daſs das krummlinige Dreieck $AFF\ldots DCC\ldots B$ die Hälfte von diesem, als auch von dem Rechtecke $AEDB$ ist. Zieht man die Gerade AD, so ist der krummlinige Teil $ADFF\ldots A$ gleich der erzeugenden Figur $BCC\ldots D$." [1])

Um die Gleichung der sekundären Cykloide von Ricci zu finden, nehmen wir AB als x-Axe, AE als y-Axe, setzen $AB = a$, $BD = 2r$, $\sphericalangle DOC = \omega$ (O sei der Mittelpunkt des Halbkreises BCD). Dann finden wir alsbald

$$x = a - r \sin \omega - \frac{a\omega}{\pi}, \qquad y = r + r \cos \omega;$$

oder, wenn wir $\omega = \pi - \varphi$, $a = \pi R$ setzen,

$$x = R\varphi - r \sin \varphi, \qquad y = r - r \cos \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Dies ist die gesuchte analytische Darstellung; da für $R = r$ Gl. (16) mit (1') übereinstimmt, so ist ersichtlich, daſs die gemeine Cykloide ein Spezialfall dieser neuen Kurve ist. Aus der Gleichung (16) ergiebt sich ferner:

$$\text{Fläche } ABDFF\ldots A = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} y \cdot dx = \int_0^\pi (r - r \cos \varphi)(R - r \cos \varphi)\, d\varphi$$

$$= Rr\int_0^\pi d\varphi - 2Rr\int_0^\pi \cos\varphi \cdot d\varphi + r^2 \int_0^\pi \cos^2\varphi \cdot d\varphi = \pi\left(Rr + \frac{r^2}{2}\right),$$

und daher

$$\text{Fläche } ABCC\ldots DFF\ldots A = \pi Rr = \frac{1}{2}\pi R 2r = \frac{1}{2} a \cdot 2r$$

$$= \frac{1}{2} \text{ Rechteck } ABDE = \frac{1}{2} ABCC\ldots DGEA.$$

Dieser Satz ist der wichtigste der von Ricci ausgesprochenen; die übrigen sind Folgerungen hieraus. Sie scheinen der Allgemeinheit unbekannt geblieben zu sein, bis zu dem Zeitpunkte (1897), als der oben erwähnte Brief ans Tageslicht kam zugleich mit denen, die den wissenschaftlichen Briefwechsel von Huygens betreffen. Jedoch die Kurve, auf die sich die Sätze beziehen, blieb nicht ganz unbekannt. Wenn man nämlich die Normalen der durch Gl. (1') dargestellten

1) *Oeuvres de Huygens* VII, S. 381.

Cykloide in einem konstanten Verhältnisse k teilt, so erhält man eine Kurve von folgender analytischer Darstellung:

$$x = \frac{r}{1+k}\left\{(1+k)\varphi - \sin\varphi\right\}, \qquad y = \frac{r}{1+k}(1-\cos\varphi);$$

da diese von der Form (16) ist, so stellt sie eine sekundäre Cykloide von Ricci dar. Von solchen Betrachtungen ausgehend stiefs Mannheim[1]) auf diese Kurven, von denen er zeigte, dafs sie durch Ellipsenbogen rektifizierbar seien, welche Thatsache sich auch leicht aus der Gleichung (16) nachweisen läfst[1]). Ferner fand Clairaut[2]) bei der Behandlung gewisser Fragen aus der Mechanik, dafs eine solche geliefert wird von dem Endpunkte eines Kreisradius, wenn der Mittelpunkt gleichförmig eine Gerade durchläuft, und der Radius sich gleichförmig um den Mittelpunkt dreht. Eine solche Kurve kann offenbar dargestellt werden durch zwei Gleichungen von folgendem Typus

$$x = at + b - r\sin(\alpha t + \beta), \qquad y = r - r\cos(\alpha t + \beta)$$

und diese sind leicht auf die Form (16) zu reduzieren. Es möge bemerkt werden, dafs Clairaut, nachdem er die lösende Kurve in der obigen Weise definiert hat, hinzufügt: „tout le monde reconnaitra dans cette description la cycloide allongée ou accourcie“.

Die neue Cykloide erfreut sich nicht hervorragender Eigenschaften[3]), wir verlassen daher die Kurve, um uns zu anderen wichtigeren Verallgemeinerungen der gemeinen Cykloide zu wenden.

Zuvor möge hier noch folgendes bemerkt werden: Alle Cykloiden (gemeine, verlängerte und verkürzte) können auch durch die Bewegung eines Punktes erzeugt werden, der mit gleichförmiger Geschwindigkeit die Peripherie eines Kreises durchläuft, während der Kreis selbst auch mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Geraden gleitet. Setzt man nun voraus, dafs die Geschwindigkeiten der beiden Bewegungs-Komponenten nicht mehr konstant, sondern variabel nach gewissen Gesetzen sind, so erhält man Kurven, die thatsächlich Verallgemeinerungen der Cykloiden sind. Sie wurden als solche von Varignon in einer der Pariser Akademie unterm 31. März 1693 vorgelegten Abhandlung[4]) untersucht.

---

1) Nouv. Ann. Question 699, gelöst im IV. Bde. (1865) der 2. Ser. S. 55. S. auch die Abhandl. von Mannheim, *Recherches géométriques sur les longueurs comparées de différentes courbes* (Journ. de l'École polyt. Heft XL, 1863).

2) A. Clairaut, *Solutions de quelques problèmes de dynamique par rapport aux tractions* (Mém. de Paris 1736).

3) Der Leser wird noch leicht nachweisen, dafs sie seinem Systeme mit den Charakteristiken $\mu = 2$, $\nu = 2$ angehört.

4) *Des cycloïdes ou roulettes à l'infini, traitées à la manière des lignes géométriques* (Mém. de Paris X).

Neuntes Kapitel.

Die Epicykloiden, Hypocykloiden und die Kreisevolventen.

203. Der Gedanke, welcher von der Konchoide des Nikomedes zur Pascalschen Schnecke führte, nämlich die Idee, an Stelle der geradlinigen Basis einen Kreis (vgl. Nr. **69**) zu setzen, führte auch zu den neuen cykloidischen Kurven, denen dieses Kapitel gewidmet ist. Diese Idee, die sich hier ziemlich von selbst aufdrängt, indem man die Rollbewegung eines Kreises auf einem festen Kreis betrachtet, geht mindestens bis in die Zeit Hipparchs zurück, der sich derselben bediente, um eine plausibele Erklärung der himmlischen Bewegungen zu geben (System der Epicyklen).

Wenn ein Kreis auf einem festen Kreise rollt, so kann er ihn dabei immer entweder von aufsen, oder immer von innen berühren; im ersteren Falle erzeugt ein beliebiger Punkt seiner Ebene eine Epicykloide (Epitrochoide oder äufsere Epicykloide), im zweiten eine Hypocykloide (Hypotrochoide oder innere Epicykloide); die Beiwörter gemeine, geschweifte oder verkürzte und verschlungene oder verlängerte[1]) werden benutzt, um anzudeuten, dafs der erzeugende Punkt auf der Peripherie innerhalb oder aufserhalb des rollenden Kreises liegt, oder anders gesagt, dafs der feste Kreis und der durch den erzeugenden Punkt um den Mittelpunkt des bewegten beschriebene Kreis durch die Peripherie des rollenden getrennt, resp. nicht getrennt werden. Dieselben Beiwörter fügt man auch bisweilen dem Namen Pericykloide bei, wenn der bewegte Kreis mit seiner Innenseite den festen von aufsen berührt und gröfser ist als dieser[2]). Die Epi- und Hypocykloiden werden zweckmäfsig auch mit dem gemeinsamen Namen cyklische Kurven belegt[3]).

Die älteste Betrachtung dieser Kurven findet sich in dem Werke Albrecht Dürer's[4]) *Underweysung der Messung mit dem Zyrkel und rychtscheyd* (Nürnberg 1525), woselbst eine spezielle Epicykloide als Spinnenlinie benannt und mit Hilfe eines besonderen Instru-

---

1) Nach E. Wölffing müfsten die Bezeichnungen „verlängert“ und „verkürzt“ aufgegeben werden, da sie von den Schriftstellern in verschiedenem Sinne gebraucht worden.

2) Die Pericykloiden sind daher Epicykloiden.

3) Weifsenborn, *Die cyclischen Curven methodisch uud mit besonderer Rücksicht auf Constructionen u. s. w.* (Eisenach 1856). Perigal schlug für die cyklischen Kurven den Namen Bicircloids vor (vgl. Drach, *Phil. Mag.* 2. Ser. XXXIV, 1849). Über andere Namen s. *Intermédiaire* VI, 1899, S. 266.

4) S. auch *Alberti Dureri Institutionum geometricarum libri quatuor* (Arnhem 1606) S. 37.

mentes konstruiert wird[1]). Jedoch scheinen die Worte des genialen deutschen Malers auf die Mathematiker keinen Eindruck gemacht zu haben; zum wenigsten war es mindestens 100 Jahre später, als sie unter anderm Himmelstriche Früchte zeitigten; es war nämlich ein Franzose — de La Hire — der die erste methodische Abhandlung über sie schrieb. Dennoch scheint es, dafs er in der Bestimmung dieser Kurve und der Entdeckung ihrer Anwendung auf Zahnräder, die die geringste Reibung darbieten, in Frankreich einen scharfsinnigen Vorläufer gehabt habe, denn in der Vorrede zu seinem *Traité de Mécanique* weist La Hire auf ein Rad hin, „dont la prémière invention étoit due à Mr. Desargues, qui étoit un des plus excellents géomètres de notre siècle“[2]). Ebenfalls sagt La Hire im Anfange seines *Traité des épicycloïdes et de leurs usages dans les mécaniques*, indem er auf denselben Gegenstand zurückkommt: „mais je n'ai point su, que cet excellent géomètre (Desargues) eut jamais rien expliqué de sa construction et comme il n'étoit pas appliqué à cette partie de la Géométrie, je crois qu'il en avait seulement déterminé la figure mécaniquement“[3]), und diese Vermutung scheint zweifellos unannehmbar für jeden, der den hohen Wert und die Originalität der Ansichten Desargues' als Geometer anerkennt. Auf jeden Fall ist es sicher, dafs die Epicykloiden und ihre wichtigsten Anwendungen in Frankreich um die Mitte des 17. Jahrhunderts bekannt gewesen sind. Dort wird wahrscheinlich auch Römer von ihnen Kenntnis erhalten haben, der einer der ersten Mitarbeiter Cassinis in dem zu Paris im Jahre 1667[4]) gegründeten grofsen Observatorium war, auf welchen viele, dem Beispiele von Leibniz[5]) folgend, die Erfindung dieser Kurven und die Entdeckung des Auftretens derselben in der praktischen Mechanik zurückführen; jedoch, wenn wir auch zugeben wollen, dafs Römer im Jahre 1674 zu den beiden Kurvenarten gelangt sei, so gebührt die Priorität immerhin dem Desargues, der 1662 zu Grabe getragen war. Dem La Hire hingegen gebührt der Ruhm, die geometrischen Untersuchungen dieser Kurven begonnen zu haben, indem er eine ziemliche Anzahl eleganter Sätze bewies, welche sich auf die Tangenten, die Rektifikation und Quadratur beziehen;

---

1) Ein anderer ähnlicher Apparat, der Epicyklograph, ist von Ridolfi beschrieben worden, *Di alcuni usi delle epicicloidi e di uno strumento per la loro descrizione e specialmente per quella dell' ellisse* (Firenze 1844) S. 43.

2) *Mém. de l'Académie des Sciences depuis 1666 jusqu'à 1699*, IX. (Paris 1730). Vgl. *Oeuvres de Desargues réunies et analysées par Poudra* (Paris 1864) S. 31. Dieser wichtigen Anwendung bei Verzahnungen verdankt eine Vorrichtung zum Zeichnen der cyklischen Kurven den Namen Odontograph.

3) *Mém. de l'Ac. des Sc. depuis 1666 jusqu'à 1699*, IX, S. 222.

4) R. Wolf, *Geschichte der Astronomie* (München 1877) S. 453.

5) Vgl. den Brief an Joh. Bernoulli v. 18. Jan. 1698 und 1. Febr. 1707 (*Leibniz*, ed. Gerhardt, III, S. 477 u. 811)

wir werden ihnen im Verlaufe unserer Betrachtungen, mit denen wir nun beginnen werden, begegnen[1]).

204. Wir bezeichnen mit R den Radius des festen, mit r den des beweglichen Kreises, mit h den Abstand des erzeugenden Punktes P vom Mittelpunkte Ω des letzteren[2]). Als Koordinatenanfang nehmen wir das Centrum O (s. Taf. XV, Fig. 120 a, b) des festen Kreises, als x-Axe eine Gerade, die durch den Berührungspunkt A des festen Kreises mit dem beweglichen geht, wenn dieser sich in solcher Lage befindet, dafs P gerade auf der Centrale $O\Omega$ liegt[3]). Wir betrachten alsdann den beweglichen Kreis in einer anderen beliebigen Lage; es sei jetzt Ω' sein Mittelpunkt, B der Berührungspunkt mit dem festen Kreise, P' die entsprechende Lage des erzeugenden Punktes und A' der Endpunkt des Radius $\Omega P'$. Dann haben wir ersichtlich

$$\text{arc}\, ALB = \text{arc}\, A'AB;$$

setzen wir nun $\sphericalangle BOA = \varphi$, $B\Omega'A' = \psi$, so ist

$$r\varphi = R\psi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Beachten wir nun, dafs die Gerade OP' und die gebrochene Linie $O\Omega'P'$ dieselben Endpunkte haben, so ist die Projektion von $OP' =$ Proj. $O\Omega'$ + Proj. $\Omega'P'$; wir projizieren nun senkrecht auf die beiden Axen: es ist jedoch hierbei der Fall der Epicykloide von dem der Hypocykloide zu trennen. Für die Epicykloide (Fig. 120 a) haben wir dann

$$O\Omega' = R + r, \quad \text{Winkel zwischen } P'\Omega' \text{ und } Ox = \varphi + \psi - \pi.$$

Dagegen ist für die Hypocykloide (Fig. 113 b)

$$O\Omega' = R - r, \quad \text{Winkel zwischen } P'\Omega' \text{ und } Ox = \varphi - \psi.$$

Demnach bestehen für die Epicykloide die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= (R + r) \cos\varphi - h \cos(\varphi + \psi), \\ y &= (R + r) - h \sin(\varphi + \psi) \end{aligned}\right\}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2_e)$$

dagegen haben wir für die Hypocykloiden

$$\left.\begin{aligned} x &= (R - r) \cos\varphi + h \cos(\varphi - \psi), \\ y &= (R - r) + h \sin(\varphi - \psi) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2_h)$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit (1) liefern die analytische Dar-

1) Eine reichhaltige Liste der bezüglichen Arbeiten wurde von E. Wölffing aufgestellt im *Intermédiaire* V, 1898, S. 235, und VI, 1899, S. 11; s. ferner den *Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den cyklischen Kurven* desselben Verf. (Bibl. Math. 3. Reihe, II, 1901).

2) h ist positiv zu nehmen, wenn P auf den von Ω nach A hin gehenden Strahl fällt, negativ, wenn es nach entgegengesetzter Richtung fällt.

3) Damit macht man allerdings eine beschränkende Annahme, um die gewöhnlichen Formeln zu erhalten; es ist jedoch leicht sich davon zu befreien, wie Weifsenborn a. O. gezeigt hat.

stellung aller cykloidischen Kurven; es ist im allgemeinen zweckmäfsig, einen der beiden Winkel φ und ψ zu eliminieren. Eliminieren wir ψ, so werden die Gleichungen (2)

$$\left.\begin{aligned} x &= (R + r)\cos\varphi - h\cos\left(\frac{R+r}{r}\varphi\right), \\ y &= (R + r)\sin\varphi - h\sin\left(\frac{R+r}{r}\varphi\right); \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (3_e)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= (R - r)\cos\varphi + h\cos\left(\frac{R-r}{r}\varphi\right), \\ y &= (R - r)\sin\varphi - h\sin\left(\frac{R-r}{r}\varphi\right). \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (3_h)$$

Die beiden durch diese Gleichungen dargestellten Kurven wollen wir mit $\mathfrak{E}(R, r, h)$ bezw. $\mathfrak{H}(R, r, h)$ bezeichnen. Wenn $R < r$, so wechseln die positiven Richtungen der Koordinatenaxe und die (3_h) werden zu

$$x = (r - R)\cos\varphi - h\cos\left(\frac{r-R}{r}\varphi\right),$$

$$y = (r - R)\sin\varphi - h\sin\left(\frac{r-R}{r}\varphi\right).$$

Eliminieren wir hingegen φ, indem wir setzen

$$\frac{r}{R} = n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

(n heifst dann der Modulus der Kurve), so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \frac{n+1}{n}\cos n\psi - \frac{h}{r}\cos(n+1)\psi, \\ \frac{y}{r} &= \frac{n+1}{n}\sin n\psi - \frac{h}{r}\sin(n+1)\psi. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (4_e)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \frac{1-n}{n}\cos n\psi + \frac{h}{r}\cos(1-n)\psi, \\ \frac{y}{r} &= \frac{1-n}{n}\sin n\psi - \frac{h}{r}\sin(1-n)\psi, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (4_h)$$

man kann sich merken, dafs (4_h) aus (4_e) entsteht, indem man r, ψ, n in $-r$, $-\psi$, $-n$ verwandelt; damit sind wir in der Lage, Folgerungen aus den Gl. (4_e) sogleich auf die Gl. (4_h) auszudehnen.

Aus den so gefundenen Gleichungen ergiebt sich leicht eine Folgerung von grofser Wichtigkeit. In (3_e) führen wir nun an Stelle der R, r, h andere Konstanten R_1, r_1, h_1 ein, die mit den ersteren durch folgende Beziehungen verknüpft sind

$$R_1 = \frac{hR}{r}, \quad r_1 = \frac{h(R+r)}{r}, \quad h_1 = R + r; \quad . \; . \; . \; . \quad (5)$$

infolgedessen ist $R_1 < r_1$, und jene werden dann

$$x = h_1\cos\varphi + (R_1 - r_1)\cos\frac{r_1\varphi}{r_1 - R_1},$$

$$y = h_1\sin\varphi + (R_1 - r_1)\sin\frac{r_1\varphi}{r_1 - R_1};$$

und wenn wir

$$\frac{r_1}{R_1 - r_1}\varphi = \varphi_1, \quad x_1 = -x, \quad y_1 = -y$$

setzen, so können wir schreiben

$$x_1 = (R_1 - r_1)\cos\varphi_1 - h_1 \cos\left(\frac{R_1 - r_1}{r_1}\varphi_1\right),$$
$$y = (R_1 - r_1)\sin\varphi_1 - h_1 \sin\left(\frac{R_1 - r_1}{r_1}\varphi_1\right).$$

Vergleichen wir diese mit der Gleichung (3_h), so erkennt man, dafs die durch sie dargestellte Kurve symbolisch mit $\mathfrak{H}(R_1, r_1, h_1)$ bezeichnet werden darf. Folglich: **Die Epicykloide $\mathfrak{E}(R, r, h)$ unterscheidet sich nicht von der Epicykloide $\mathfrak{E}(R_1, r_1, h_1)$, wenn die Beziehungsgleichungen (5) bestehen.** In ähnlicher Weise ergiebt sich: **Wenn die Beziehungen**

$$R_1 = \frac{hR}{r}, \quad r_1 = \frac{h(r-R)}{r}, \quad h_1 = r - R \quad . \quad . \quad . \quad (5')$$

bestehen, so ist die Hypocykloide $\mathfrak{H}(R, r, h)$ identisch mit der Hypocykloide $\mathfrak{H}(R_1, r_1, h_1)$. Wenn $R < r$, so ist in diesen Formeln das Vorzeichen der Differenz umzukehren. Betrachten wir den Modulus $n_1 = \frac{r_1}{R_1}$, so hat man, wenn die Gleichungen (5) bestehen, $n_1 = n + 1$, und wenn (5') bestehen, $n_1 = n - 1$. Im Falle der gemeinen Epi- und Hypocykloiden ist $h = r$; die Gleichungen (5) werden dann $R_1 = R$, $r_1 = h_1 = R + r$, während (5') sich verwandeln in $R_1 = R$, $r_1 = h_1 = r - R$. Man gelangt so zu der doppelten Erzeugung der Epi- und Hypocykloiden, die von La Hire und Euler[1]) bemerkt worden ist; der ähnliche allgemeine Satz wurde von mehreren entdeckt und verschiedentlich bewiesen[2]).

Weitere Folgerungen, die sich aus der gefundenen analytischen Darstellung der cyklischen Kurven ergeben, betreffen die Gestalt der-

---

1) *De duplici genesi tam epicycloïdum quam hypocycloïdum* (Acta Petrop. pro anno 1781, Pars I, 1784). Derselbe Satz wurde von Daniel Bernoulli bemerkt und dem Goldbach von Nicolaus Bernoulli in einem Briefe vom 2. Jun. 1725 mitgeteilt. Goldbach lieferte einen Beweis desselben in seiner Antwort vom 18. Sept. 1725 (P. H. Fufs, *Correspondance mathématique et phys. de quelques célèbres géomètres du XVIII Siècle,* II, St. Pétersburg 1843, S. 168—170.

2) Gildemeister, *De lineis curvis epicycloidibus et hypocycloidibus,* Diss. Marburg, 1866; Bellermann, *Epicykloiden und Hypocykloiden,* Diss. Jena, 1867; Fouret, *Sur la double génération des epicycloïdes planes* (Nouv. Ann., 2. Ser. VIII, 1869). Vgl. Proctor, *A treatise ou the cycloid and all forms of cycloidal curves* (London 1878) S. 154—157; Vietor, *Die Polkreispaare einer Cycloide* (Zeitschr. f. Math. XXV, 1880), und Chr. Wiener, *Doppelte Entstehungsweise der geschweiften und verschlungenen cyklischen Curven* (Das. XXVI, 1881, u. XXVII, 1882). — Schilling, in einer sogleich zu nennenden Arbeit (Zeitschr. f. Math. XLIV, 1899) unterscheidet die zwei Erzeugungsarten als solche mit bedecktem und freiem Centrum, jenachdem die Fläche des rollenden Kreises den Mittelpunkt des festen bedeckt oder freiläfst.

selben. Ähnliche Betrachtungen, wie die in Nr. **197**, führen uns zu dem Schlusse, dafs die gemeinen Epicykloiden im allgemeinen unendlich viele Spitzen auf der Peripherie des Basiskreises haben; die verlängerten besitzen unzählig viele Doppelpunkte, die verkürzten unzählig viele Wendepunkte; alle (reellen) Punkte der Kurve (3_e) liegen in dem von den Kreisen um O mit den Radien $|R+r+h|$, die der Kurve (3_h) innerhalb des von den Kreisen mit den Radien $|R-r+h|$ begrenzten Kreisringes.

205. Die Erzeugung der Epicykloiden erhält gröfsere Klarheit und führt zu neuen Folgerungen, wenn man sie als Grenzfall einer gewissen Bewegung eines Polygons $ABCD\ldots.$ auffafst, welches sich in der Ebene derart umlegt, dafs seine Seiten mit den (im allgemeinen gleichgrofsen) Seiten eines festen Polygons $A'B'C'D'\ldots$ zusammenfallen[1]). Betrachten wir die Polygone in der Lage, dafs die Seite AB des ersteren mit der Seite $A'B'$ zusammenfällt; man stelle sich nun vor, wie das bewegliche Polygon sich um den Eckpunkt B' dreht, bis seine Seite BC sich auf $B'C'$ gelegt hat; ein unveränderlich mit dem ersteren verbundener Punkt P beschreibt dann einen Kreisbogen PP_1 mit dem Mittelpunkte B' und dem Radius $B'P$, und es wird der Winkel $PB'P_1 = CB'C'$ sein. Kippen wir nun das Polygon ein zweites Mal um die Ecke C', so dafs eine Ecke D auf D' fällt, so beschreibt der Punkt P_1 einen zweiten Kreisbogen mit dem Radius $C'D_1$ um den Mittelpunkt C'. Indem wir so fortfahren, erkennen wir, dafs die Bahn des Punktes P aus einer Reihe von Kreisbogen besteht, deren Mittelpunkte in den Ecken des festen Polygons liegen. Nehmen wir jetzt an, dafs die Seiten der Polygone unendlich klein sind, so erhalten wir eine Bewegung, die durch das Abrollen einer beweglichen Kurve auf einer festen definiert ist, und die Bahn des Punktes P (eine sogenannte Roulette oder Rollkurve; vgl. Nr. **212**) wird die Enveloppe einer Reihe von Kreisen sein, die ihren Mittelpunkt auf der festen Kurve haben. Da nun die Enveloppe in jedem ihrer Punkte die Tangente, und also auch die Normale mit der Eingehüllten gemeinsam hat, und weil die Normale der Eingehüllten (nämlich des Kreises) durch den (Mittelpunkt, d. h. den) Berührungspunkt der entsprechenden Lage der bewegten Kurve mit der festen geht, so hat man hiermit eine sehr einfache Methode, die Normale in jedem Punkte der Bahnlinie zu finden; es ist dies eine beachtenswerte Bemerkung von Huygens[2]), die als einfachsten

1) R. Hennig, *Beitrag zur Theorie der ebenen Rouletten* (Crelles Journ. LXV, 1866); daselbst werden die beiden Linien durch die Rollen innerhalb und aufserhalb derselben Kurve auf derselben Basis erzeugt werden, als die Glieder einer zweiseitigen oder Doppel-Roulette betrachtet); Schlömilch, *Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis,* II. Tl. 2. Aufl. (Leipzig 1874) S. 320 ff.

2) *Horologium oscillatorium,* Pars I, Prop. 15. (Bekanntlich trägt die Widmung dieses berühmten Werkes das Datum des 25. März 1673.)

Fall die von Descartes entdeckte Konstruktion der Normale an die Cykloide (s. Nr. **196**) in sich schliefst. Fassen wir die vorigen Betrachtungen zusammen, so haben wir gesehen: **Jede Rollkurve kann als Enveloppe eines Kreises mit variabelem Radius, dessen Mittelpunkt eine feste Kurve durchläuft, aufgefafst werden.**

Für die Epi- und Hypocykloiden können wir diesen Satz auch durch folgende Berechnung bestätigen und besser präzisieren[1]). Wir nehmen, wie vorhin, den Mittelpunkt O des festen Kreises als Koordinatenanfang und als x-Axe die Gerade, welche den Mittelpunkt Ω des rollenden Kreises enthält, wenn er die Lage hat, dafs auch der erzeugende Punkt P in diese Gerade hineinfällt (Taf. XV, Fig. 112 a, b). Dann betrachten wir den rollenden Kreis in einer beliebigen Lage, und wir suchen die Enveloppe des Kreises mit dem Mittelpunkte Ω' und dem Radius $\Omega' P'$. Behalten wir die früheren Bezeichnungen bei, so sehen wir, dafs die Gleichung des eingehüllten Kreises ist

$$(x - R\cos\varphi)^2 + (y - R\sin\varphi)^2 = h^2 + r^2 - 2hr\cos\psi$$

oder wegen (1)

$$x^2 + y^2 + R^2 - 2Rx\cos\frac{r\psi}{R} - 2Ry\sin\frac{r\psi}{R} = h^2 + r^2 - 2hr\cos\psi. \quad (6)$$

Differenzieren wir diese nach ψ, so ergiebt sich

$$x\sin\frac{r\psi}{R} - y\cos\frac{r\psi}{R} = h\sin\psi\,. \quad \dots\dots \quad (7)$$

Vermittelst (6) und (7) können wir x und y in Funktionen von ψ ausdrücken; zu dem Zwecke setzen wir

$$x - R\cos\frac{r\psi}{R} = \xi, \qquad y - R\sin\frac{r\psi}{R} = \eta\,. \quad \dots \quad (8)$$

Die Gleichungen (6) und (7) werden dann

$$\xi^2 + \eta^2 = h^2 + r^2 + 2hr\cos\psi\,..\,(6') \qquad \xi\sin\frac{r\psi}{R} - \eta\cos\frac{r\psi}{R} = h\sin\psi\,.\,(7')$$

Der Gleichung (6′) wird genügt, wenn man setzt

$$\xi = \cos\lambda\sqrt{h^2 + r^2 - 2hr\cos\psi}, \qquad \eta = \sin\lambda\sqrt{h^2 + r^2 - 2hr\cos\psi} \quad (9)$$

und die verwandeln die (7′) in folgende

$$\sin\left(\frac{r\psi}{R} - \lambda\right) = \frac{h\sin\psi}{\sqrt{h^2 + r^2 - 2hr\cos\psi}};$$

und dem entsprechend

$$\cos\left(\frac{r\psi}{R} - \lambda\right) = \varepsilon\frac{r - h\cos\psi}{\sqrt{h^2 + r^2 - 2hr\cos\psi}},$$

(wo $\varepsilon = \pm 1$) oder wegen Gleichung (9)

$$\xi\cos\frac{r\psi}{R} + \eta\sin\frac{r\psi}{R} = \varepsilon(r - h\cos\psi)\,. \quad \dots\dots \quad (10)$$

---

1) O. Wetzell, *Die cyclischen Curven als Einhüllungscurven eines beweglichen Kreises* (Diss. Marburg, 1880).

Lösen wir (7′) und (10) bezw. nach ξ und η auf, so erhält man

$$\xi = a \sin\psi \sin\frac{r\psi}{R} + \varepsilon(r - h\cos\psi)\cos\frac{r\psi}{R},$$

$$\eta = - a \sin\psi \cos\frac{r\psi}{R} + \varepsilon(r - h\cos\psi)\sin\frac{r\psi}{R},$$

d. h. wegen der Gleichung (8)

$$\left.\begin{aligned} x &= (R+\varepsilon r)\cos\frac{r\psi}{R} - h\varepsilon\cos\frac{(R+\varepsilon r)\psi}{R} \\ y &= (R+\varepsilon r)\sin\frac{r\psi}{R} - a\sin\frac{(R+\varepsilon r)\psi}{R} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Dies ist die analytische Darstellung der Enveloppe, sie zeigt, dafs diese aus zwei verschiedenen cyklischen Kurven besteht, entsprechend den beiden Werten ± 1, die man für ε nehmen kann.

Die Epicykloiden sind noch einer zweiten Erzeugungsweise als Enveloppen fähig; es ist nämlich leicht zu beweisen (und wir überlassen es dem Leser), „wenn zwei Punkte die Peripherie eines Kreises mit Winkelgeschwindigkeiten durchlaufen, die in konstantem Verhältnisse stehen (vgl. den Spezialfall in Nr. **75**), so ist die Enveloppe der verbindenden Geraden eine Epicykloide[1])“. Bemerkenswert ist ferner, dafs eine ähnliche Kurve entsteht, wenn man alle diese Verbindungsgeraden in demselben Verhältnisse teilt[2]).

Nicht weniger bemerkenswert ist die in folgendem Satze angegebene Erzeugungsweise: **Wenn zwei aufeinander folgende Seiten OE_1, OE_2 eines Gelenk-Parallelogramms sich gleichförmig (aber mit verschiedener Geschwindigkeit ω_1, ω_2) um den Eckpunkt O drehen, so beschreibt die vierte Ecke eine Epicykloide oder Hypocykloide[3]).** Um dies zu beweisen, beachten wir, dafs man immer annehmen kann, dafs zu Anfang die beiden Seiten OE_1 und OE_2 in eine Gerade zusammenfallen; diese nehmen wir als x-Axe, setzen $OE = l_1$, $OE_2 = l_2$, und, was ja gestattet ist, $\sphericalangle E_1Ox = t\omega_1$, $\sphericalangle E_2Ox = t\omega_2$, wo t eine beliebige Variabele (die Zeit) ist; sind dann z_1, z_2, z die komplexen

1) Vgl. auch K. Schwering, *Theorie und Anwendung der Liniencoordinaten* (Leipzig 1884) S. 77 ff.

2) Eckhardt, *Einige Sätze über die Epicycloide und Hypocycloide* (Zeitschrift f. Math. XV, 1870). Als Spezialfall würde sich ergeben, „dafs bei einer Uhr mit gleichlangen Zeigern, die Enveloppe der Verbindungslinien der Endpunkte entsprechender Zeigerstellungen eine Hypocykloide ist“; sind die Zeiger verschieden lang, so würde die Enveloppe die Evolute einer Epicykloide sein (s. *Intermédiaire* II, 1895, S. 9 u. 396).

3) Diese Erzeugungsweise wurde von Bellermann in der S. 483, Note 2 citierten *Dissertation* angegeben und in einem Spezialfalle von Neuberg (*Sur la cycloïde,* Nouv. corr. math. V, 1879); F. Schilling benutzte diese neuerdings zur Konstruktion von Apparaten zur Zeichnung aller cyklischen Kurven; s. die Abh. *Ueber neue kinematische Modelle, sowie eine neue Einführung in die Theorie der cyclischen Curven* (Zeitschrift f. Math. XLIV, 1899).

Zahlen, die in gewohnter Weise die Punkte E_1, E_2, M darstellen, so haben wir

$$z_1 = l_1 e^{i\omega_1 t}, \quad z_2 = l_2 e^{i\omega_2 t}, \quad z = z_1 + z_2,$$

und daher

$$z = l_1 e^{i\omega_1 t} + l_2 e^{i\omega_2 t}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Trennen wir das Reelle und Imaginäre, so ergiebt sich

$$x = l_1 \cos \omega_1 t + l_2 \cos \omega_2 t, \qquad y = l_1 \sin \omega_1 t + l_2 \sin \omega_2 t$$

als analytische Darstellung des Ortes von M; die Form dieser Gleichung führt zur obigen Behauptung. — Wenn man nun (12) in folgender Weise schreibt:

$$z = \{l_1 + l_2 e^{i(\omega_2 - \omega_1)t}\} e^{i\omega_1 t}$$

und bekannte Sätze die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen betreffend anwendet, so schliefst man: **Jede Epi- oder Hypocykloide kann durch einen Punkt M erzeugt werden, der gleichförmig um einen Punkt E rotiert, welcher mit konstanter Geschwindigkeit die Peripherie eines festen Kreises durchläuft.** Dies ergiebt sich auch durch einfache Betrachtungen aus der ursprünglichen Entstehungsweise. Beachten wir schliefslich[1]), dafs der Mittelpunkt des Parallelogramms OE_1ME_2 durch die komplexe Zahl $\frac{z}{2}$ dargestellt wird, so beschreibt dieser eine zu der durch M erzeugten homothetische Kurve, nämlich eine zweite Epi- oder Hypocykloide[2]).

206. Die Polargleichung der Epi- bezw. Hypocykloiden ergiebt sich als von so komplizierter Form, dafs sie sozusagen keinen Vorteil bietet, selbst wenn man sich auf die gemeinen beschränkt. Nützlich erweist sich dagegen in manchen Fällen die polare Differential-Gleichung derselben Kurve. Um sie zu erhalten, beachten wir, dafs,

---

1) Reincke, *Ueber cyclische Curven, dargestellt als geometrischen Ort des Mittelpunktes derjenigen Geraden, welche zwei auf zwei concentrischen Kreisen gleichförmig bewegte Punkte in jedem Moment verbindet* (Programm Malchin 1892).

2) Die Gleichung (12), mittelst derer man jede Epicykloide darstellen kann, ist ein Spezialfall von folgender:

$$z = l_0 + l_1 e^{i\omega_1 t} + \cdots l_n e^{i\omega_n t},$$

wo $l_0, l_1 \ldots l_n, \omega_1 \ldots \omega_n$ reelle gegebene Zahlen sind und t eine unabhängige Variabele. Die durch sie dargestellten Kurven wurden von Bellermann (o. a. Diss., wo der Name Cykloiden höherer Ordnung angewendet wird) und Eichler betrachtet (*Die Darstellung der cyklischen Curven und ihre Bedeutung für die Schwingungstheorie,* Hamb. Mitt., Teil II, 1890), der auch ihre Erzeugung vermittelst eines gegliederten Polygons angab, die ähnlich der oben angegebenen für die Epicykloiden vermittelst eines Gelenkparallelogramms ist. Wir bemerken auch, dafs man, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, immer $l_0 = 0$ annehmen darf; daraus können wir ableiten, dafs „jede Kurve der fraglichen Art als Ort der Schwerpunkte eines Polygons angesehen werden kann, von welchem n Ecken gleichförmig konzentrische Kreise durchlaufen". Unter den fraglichen Kurven finden sich viele bei Untersuchungen aus der Optik und Mechanik.

wenn man $\psi = \varphi$ und $h = r$ setzt, die Gleichungen (4_e) werden zu:

$$\frac{x}{r} = \frac{n+1}{n}\cos n\varphi - \cos(n+1)\varphi, \quad \frac{y}{r} = \frac{n+1}{n}\sin n\varphi - \sin(n+1)\varphi;$$

daraus ergiebt sich

$$\frac{\varrho^2}{r^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 + 1 - \frac{2(n+1)}{n}\cos\varphi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Da nun andererseits

$$\omega = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},$$

so hat man

$$d\omega = \frac{x \cdot dy - y \cdot dx}{x^2 + y^2} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{x}{r} & \frac{dx}{r} \\ \frac{y}{r} & \frac{dy}{r} \end{vmatrix}}{\frac{\varrho^2}{r^2}} = \frac{r^2}{\varrho^2}\,\frac{(n+1)(2n+1)}{n}\,(1-\cos\varphi)\,d\varphi.$$

Differenzieren wir die Gleichung (13), so erhalten wir

$$d\varrho = \frac{n+1}{n}\,\frac{r^2}{\varrho}\sin\varphi \cdot d\varphi,$$

infolgedessen wird die vorige Gleichung zu

$$\frac{d\omega}{d\varrho} = \frac{2n+1}{\varrho}\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}},$$

oder auch wegen Gleichung (13)

$$d\omega = \frac{d\varrho}{\varrho}\sqrt{\frac{\varrho^2 - \frac{r^2}{n^2}}{\frac{r^2}{n^2} - \frac{\varrho^2}{(2n+1)^2}}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Dies ist die angekündigte Differenzial-Gleichung.

Wir wollen sie auf die Untersuchung der von einem Punkte $A(\varrho_0, \omega_0)$ an die Epicykloide gezogenen Tangenten anwenden. Ist $P(\varrho, \omega)$ der Berührungspunkt einer derselben, und μ der Winkel der Tangente mit dem Radius vector des Berührungspunktes, so ergiebt sich aus dem Dreiecke OAP

$$\varrho = \varrho_0\frac{\sin(\omega_0 - \omega + \mu)}{\sin\mu} = \varrho_0[\sin(\omega_0 - \omega)\cdot \operatorname{ctg}\mu + \cos(\omega_0 - \omega)].$$

Es ist aber $\operatorname{tg}\mu = \varrho\frac{d\omega}{d\varrho}$, und daher

$$\varrho = \varrho_0\left[\sin(\omega_0 - \omega)\cdot\frac{d\varrho}{\varrho \cdot d\omega} + \cos(\omega_0 - \omega)\right]\cdot{}^{1)} \quad . \quad . \quad (15)$$

1) Auf diese Formel kann man immer zurückgreifen, wenn es sich darum handelt, von einem Punkte die Tangente an eine Kurve zu ziehen, die in Polarkoordinaten dargestellt ist. Man kann daraus ableiten, dafs die Kurve einem algebraischen System angehört, allemal wenn eine algebraische Gleichung von folgender Form statt hat $f\left(\frac{d\varrho}{d\omega}, \varrho, \cos\omega, \sin\omega\right) = 0$. So kann man z. B. beweisen, dafs die Varignon'sche Isochrone (Nr. **186**) einem algebraischen System angehört.

Setzen wir hier an Stelle von $\varrho \frac{d\omega}{d\varrho}$ seinen durch (14) gegebenen Ausdruck, gehen dann zu kartesischen Koordinaten über, so ergiebt sich daraus

$$\left\{\frac{x^2+y^2-(x_0 x+y_0 y)}{y_0 x - x_0 y}\right\}^2 = \frac{\frac{r^2}{n^2} - \frac{x^2+y^2}{(2n+1)^2}}{x^2+y^2-\frac{r^2}{n^2}}.$$

Nun stellt diese Gleichung eine Kurve sechster Ordnung dar, die den Punkt A als Doppelpunkt hat; folglich: **Die Berührungspunkte der Tangenten, die man von einem beliebigen Punkte ihrer Ebene an eine (algebraische oder transscendente) Epi- oder Hypocykloide ziehen kann, liegen auf einer Kurve sechster Ordnung, die jenen Punkt und den Mittelpunkt des festen Kreises zu Doppelpunkten hat.** Damit ist gezeigt, dafs **jede Epicykloide einem System angehört, welches die Charakteristiken $\mu = 2$, $\nu = 4$ hat.**

Bezeichnen wir mit s den Bogen der durch die Gleichungen (3_e) dargestellten Epicykloide, so erhalten wir durch Differentiation die Gleichung

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} = \frac{R+r}{r}\sqrt{r^2+h^2-2rh\cos\frac{R\varphi}{r}}. \quad (16)$$

Wir setzen nun $r+h=a, \quad r-h=b, \quad \frac{R\varphi}{r}=\omega$

und erhalten
$$ds = \frac{2(R+r)}{R}\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2\omega}\cdot d\omega.$$

Betrachten wir dagegen die Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ und nennen deren Bogen σ, so bekommen wir, wie bekannt,

$$d\sigma = \sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2\omega}\cdot d\omega,$$

und folglich ist
$$ds = \frac{2(R+r)}{R}\cdot d\sigma.$$

Rechnen wir nun sowohl auf der Ellipse als auch auf der Epicykloide die Bogen von dem Punkte an, für welchen $\omega = 0$, so ergiebt sich folgende bemerkenswerte Relation

$$s = \frac{2(R+r)}{R}\sigma.$$

Die Rektifikation der Epi- und Hypocykloiden hängt somit, wie die der Cykloiden im allgemeinen (vgl. Nr. **198**) **von elliptischen Integralen ab** (s. auch S. 387). In dem speziellen Falle jedoch, dafs $h=r$, wird die Gleichung (16)

$$\frac{ds}{d\varphi} = 2(R+r)\sin\frac{R\varphi}{2r}$$

und giebt
$$s = Const. - \frac{4r(R+r)}{R}\cos\frac{R\varphi}{2r},$$

daher ist die Rektifikation der gemeinen Epi- und Hypocykloide elementar ausführbar.

Wählt man den Anfangspunkt des Bogens derart, daſs für $\varphi = 0$ auch $s = 0$, so hat man im besonderen

$$s = \frac{8r(R+r)}{R} \sin^2 \frac{R\varphi}{4r}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

hieraus kann man die Länge des zwischen zwei aufeinander folgenden Spitzen gelegenen Epicykloidenbogens ableiten, indem man $\varphi = \frac{2\pi r}{R}$ setzt; man erhält dann als Resultat

$$8r\left(1 + \frac{r}{R}\right) = 8r(1+n),$$

wie auch La Hire[1]) fand.

Bezeichnen wir mit dS die Fläche des Elementar-Sektors, der als Bogen das Bogenelement der Epicykloide (3_e) hat, so erhalten wir

$$\frac{dS}{R+r} = \frac{x\,dy - y\,dx}{2(R+r)} = \frac{1}{2}\left\{R + r + \frac{h^2}{r} - \frac{h(R+2r)}{r}\cos\frac{R\varphi}{r}\right\} d\varphi,$$

und daher durch Integration

$$S = \frac{R+r}{2}\left\{\left(R + r + \frac{h^2}{r}\right)\varphi - \frac{h(R+2r)}{R}\sin\frac{R\varphi}{r}\right\}; \quad . \; . \quad (18)$$

eine Konstante fügen wir nicht hinzu, da wir annehmen wollen, daſs für $\varphi = 0$ auch $S = 0$ sei. Im Spezialfalle der gemeinen Cykloiden wird der Ausdruck

$$S = \frac{(R+r)(R+2r)}{2}\left\{\varphi - \frac{r}{R}\sin\frac{R\varphi}{r}\right\} \text{ }^{2)} \quad . \; . \; . \quad (19)$$

Machen wir hiervon eine Anwendung, indem wir $\varphi = \frac{2\pi r}{R}$ setzen; wir erhalten $S = \frac{\pi r(R+r)(R+2r)}{R}$; nun hat der von den beiden, den Winkeln $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{2\pi r}{R}$ entsprechenden Radien begrenzte Sektor des festen Kreises den Flächeninhalt $\frac{1}{2}R \cdot \frac{2\pi r}{R} R = \pi r R$; der Unterschied jener beiden Sektoren beträgt also $\pi r^2\left(3 + 2\frac{r}{R}\right) = \pi r^2(3+2n)$, wie auch La Hire gefunden hat[3]).

Im Falle der gemeinen Epi- oder Hypocykloide wird der Krümmungsradius $\mathfrak{R}$ gegeben durch

$$\mathfrak{R} = \frac{4r(R+r)}{2r+R}\sin\frac{R\varphi}{2r} \cdot \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

---

1) *Mém. de l'Ac. des Sc. depuis 1666 jusqu'à 1699,* IX (Paris 1730) S. 234 u. 239

2) Newton, *Principia*, Lib. I, Prop. 49.

3) *Mém. de l'Acad. des Sciences etc.* S. 230 u. 231; vgl. auch Caswell, *The quadrature of a portion of the epicycloid* (Phil. Trans. 1695, Nr. 217), und E. Halley, *A general proposition for measuring all cycloids and epicycloids* (Das. Nr. 218).

Eliminieren wir φ aus den Gleichungen (17) und (20), so finden wir

$$\left\{\frac{Rs}{4r(R+r)}-1\right\}^2+\left\{\frac{2r+R}{4r(R+r)}\mathfrak{R}\right\}^2=1.$$

Dies ist die natürliche Gleichung der betrachteten Epicykloide[1]); in der üblichen Weise interpretiert, sagt sie aus: **Wenn eine gemeine Epicykloide auf einer festen Geraden rollt, so liegen die Krümmungscentren der aufeinander folgenden Berührungspunkte der Kurve auf einer Ellipse**[2]).

Aus der oben bewiesenen Thatsache, dafs die natürliche Gleichung einer jeden gemeinen Epicykloide von folgendem Typus ist

$$\frac{\mathfrak{R}^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

läfst sich eine wichtige Folgerung ziehen. Diese Gleichung kann nämlich durch folgende beiden ersetzt werden

$$\mathfrak{R}=a\cos\lambda, \qquad s=b\sin\lambda,$$

wo λ eine unabhängige Variabele ist. Sind nun $\mathfrak{R}_1$ und s_1 der Krümmungsradius und der Bogen der Evolute von (21), so hat man (vgl. Nr. **251**)

$$\mathfrak{R}_1=\mathfrak{R}\frac{d\mathfrak{R}}{ds}, \qquad s_1=\mathfrak{R}$$

oder wegen der vorhergehenden Gleichungen

$$\mathfrak{R}_1=-\frac{a^2}{b}\sin\lambda, \qquad s_1=a\cos\lambda.$$

Durch Elimination von λ ergiebt sich, dafs

$$\frac{\mathfrak{R}_1{}^2}{a^2}+\frac{s_1{}^2}{b^2}=\left(\frac{a}{b}\right)^2$$

die natürliche Gleichung der Evolute der Kurve (21) ist; vergleicht man sie mit (18) selbst, so schliefst man: **Die Evolute einer gemeinen Hypo- oder Epicykloide ist eine andere ihr ähnliche Kurve**[3]), eine bemerkenswerte Eigentümlichkeit, die ebenfalls von La Hire bemerkt worden ist[4]).

Aus den für die Koordinaten einer Epi- oder Hypocykloide als Funktionen eines Parameters aufgestellten Ausdrücken, die uns zu den bemerkenswerten, in dieser Nr. dargelegten Sätzen führten, lassen

---

1) Nach Aoust (*Analyse infinitésimale des courbes planes,* Paris 1873, S. 99) soll sich diese Gleichung bereits bei Riccati vorfinden. Daraus kann man wiederum die doppelte Erzeugung dieser Kurve folgern.

2) Mannheim, *Recherches géométriques rélatives au lieu des positions successives des centres de courbure d'une courbe qui roule sur une droite* (Liouvilles Journ. 2. Ser. IV, 1859) S. 99.

3) Die Evoluten der anderen Epicykloiden sind neue Kurven, die von Chr. Wiener untersucht wurden (*Die Evoluten der geschweiften und verschlungenen cyklischen Curven*, Zeitschrift f. Math. XXVII, 1882).

4) *Mém. de l'Ac. des Sciences etc.* IX, S 265.

sich noch andere Beziehungen herleiten, die wir jetzt angeben wollen. Bezeichnen wir die Ableitungen jener Ausdrücke nach φ mit Accenten, so liefern uns die Gleichungen (3_e) für den Fall $h = r$:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - R^2 &= 4r(R+r)\sin^2\frac{R\varphi}{2r}, \\ x'^2 + y'^2 &= 4(R+r)^2\sin^2\frac{R\varphi}{2r}, \\ xy' - x'y &= 2(R+r)(R+2r)\sin^2\frac{R\varphi}{2r}, \\ x'y'' - x''y' &= \frac{2(R+r)(R+2r)}{r}\sin^2\frac{R\varphi}{2R}; \end{aligned}$$

daraus folgt die Identität

$$\frac{x^2+y^2-R^2}{x'^2+y'^2} = \frac{xy'-x'y}{x'y''-x''y'},$$

oder

$$\begin{vmatrix} x & y & R^2-(x^2+y^2) \\ x' & y' & 0 \\ x'' & y'' & x'^2+y'^2 \end{vmatrix} = 0,$$

oder auch

$$\begin{vmatrix} x & y & R^2 \\ x' & y' & xx'+yy' \\ x'' & y'' & x'^2+y'^2+xx''+yy'' \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Identität ist nun einer wichtigen geometrischen Interpretation fähig. Sie sagt nämlich, dafs, wenn X, Y die laufenden Koordinaten sind, die drei Geraden

$$xX + yY = R^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha)$$

$$(X-x)x' + (Y-y)y' = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\beta)$$

$$(X-x)x'' + (Y-y)y'' = x'^2 + y'^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\gamma)$$

in einen Punkt zusammenlaufen. Nun stellt (β) die Normale im Punkte (x, y) dar; (γ) ist die Ableitung von (β), stellt also eine Gerade dar, die durch den Berührungspunkt jener Normalen mit ihrer eigenen Enveloppe geht, d. i. das dem Punkte (x, y) entsprechende Krümmungscentrum; folglich schneiden sich die Geraden (β) und (γ) in diesem Punkte. Durch denselben Punkt geht nun auch die Gerade (α); diese ist aber die Polare des Punktes (x, y) in Bezug auf den festen Kreis mit dem Radius R. Erinnern wir uns nun der Huygens'schen Konstruktion der Normalen (Nr. **205**), so können wir schliefsen: **Um das Krümmungscentrum für einen Punkt P der gemeinen Epi- oder Hypocykloide zu finden, braucht man nur den Schnittpunkt der Polaren von P in Bezug den festen Kreis mit der Verbindungslinie PA aufzusuchen, wo A den Berührungspunkt jenes Kreises mit der entsprechenden Lage des rollenden bedeutet**[1]).

1) Zehme, *Elementare und analytische Behandlung der verschiedenen Cykloiden* (Iserlohn und Elberfeld 1854). S. auch Cesàro, *Remarque de géométrie*

207. Aus den Gleichungen (3_e) in Nr. **205** ergiebt sich, dafs die Gleichung der Normalen an die Kurve dargestellt wird durch

$$\begin{aligned}&\left[(x-R\cos\varphi)-r\cos\varphi+h\cos\left(\frac{R+r}{r}\varphi\right)\right]\left(\sin\varphi-\frac{h}{r}\sin\left(\frac{R+r}{r}\varphi\right)\right)-\\&\left[(y-R\sin\varphi)-r\sin\varphi+h\sin\left(\frac{R+r}{r}\varphi\right)\right]\left(\cos\varphi-\frac{h}{r}\cos\left(\frac{R+r}{r}\varphi\right)\right)=0.\end{aligned}\qquad(22)$$

Dieser Gleichung wird offenbar genügt durch $x=R\cos\varphi$, $y=R\sin\varphi$; demnach geht die Normale durch den so bestimmten Punkt, und dieser ist nichts anderes als der Punkt B (Taf. XV, Fig. 120 a, b), in welchem der bewegliche Kreis den festen berührt; die Normale in P' ist also die Gerade $P'B$ in Übereinstimmung mit dem allgemeinen Satze von Huygens, den wir in Nr. **205** gebracht haben.

Wenn wir für den Fall der gemeinen Epicykloiden uns der Gleichungen (4_e) bedienen, so erkennen wir, dafs

$$x\sin\frac{(2n+1)\varphi}{2}-y\cos\frac{(2n+1)\varphi}{2}=\frac{2n+1}{n}r\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\quad.\quad.\quad.\quad(23)$$

$$x\cos\frac{(2n+1)\varphi}{2}+y\sin\frac{(2n+1)\varphi}{2}=\frac{n-1}{2}r\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\quad.\quad.\quad.\quad(24)$$

die Tangente bezw. die Normale der Epicykloide im Punkte (φ) darstellen. Bezeichnen wir nun mit u und v die Plücker'schen Koordinaten der Normalen, so haben wir

$$u=-\frac{2\cos\frac{(2n+1)\varphi}{2}}{(n-1)r\cos\frac{\varphi}{2}},\qquad v=-\frac{2\sin\frac{(2n+1)\varphi}{2}}{(n-1)r\cos\frac{\varphi}{2}}\cdot\quad.\quad.\quad.\quad(25)$$

Denken wir uns nun, dafs wir die Normalen zur Epicykloide in denjenigen Punkten gezogen hätten, in denen sie von Geraden, die durch den Punkt (x, y) gehen, berührt wird, so wird der Winkel φ der Gleichung (23) genügen; wenn wir demnach φ aus den Gleichungen (23) und (25) eliminieren, so werden wir die Tangential-Gleichung einer Kurve erhalten, die alle jene Normalen zu ihren Tangenten hat. Nun liefern die Gleichungen (25)

$$u^2+v^2=\frac{4}{(n-1)^2r^2\cos^2\frac{\varphi}{2}};$$

aufserdem erhält man durch Einsetzen der durch (25) gegebenen Werte von $\sin\frac{(2n+1)\varphi}{2}$ und $\cos\frac{(2n+1)\varphi}{2}$ in die Gleichung (23)

$$uy-vx=\frac{2(2n+1)}{n(n-1)}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

---

infinitésimale (Mathésis VII, 1887) und *Sur deux classes remarquables de lignes planes* (Nouv. Ann. 3. Ser. VII, 1883. — Dieselbe Frage wird auch von Dieu, *Note sur les hypocycloïdes* (Nouv. Ann. XIX, 1860) und von Henning im §. 1 des *Beitrag zur Theorie der ebenen Rouletten* (Crelle's Journ. LXV, 1866) behandelt.

und durch Elimination von φ aus diesen beiden letzteren

$$(xu - yv)^2 = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^2 r^2 (u^2 + v^2) - \left(\frac{2(2n+1)}{n(n-1)}\right)^2.$$

Da diese Gleichung vom zweiten Grade in u und v ist, so kann man mit C. Juel[1]) den Schlufs ziehen: **Die Normalen einer Epi- oder Hypocykloide in den Punkten, in welchen sie von Geraden eines Strahlenbüschels berührt wird, sind Tangenten eines Kegelschnittes.** Nun wollen wir noch bemerken, dafs die Polare des Punktes (φ) der gemeinen Epicykloide (3_e) in Bezug auf den Kreis $x^2 + y^2 = l^2$ als Gleichung hat

$$x\left[(R+r)\cos\varphi - r\cos\frac{R+r}{r}\varphi\right] + y\left[(R+r)\sin\varphi - r\sin\frac{R+r}{r}\varphi\right] = l^2.$$

Differenzieren wir diese nach φ und kombinieren das Resultat mit der ursprünglichen Gleichung, so finden wir

$$x = \frac{l^2 \sin\frac{R+2r}{2r}\varphi}{(R+2r)\sin\frac{R\varphi}{2r}}, \qquad y = \frac{l^2 \cos\frac{R+2r}{2r}\varphi}{(R+2r)\sin\frac{R\varphi}{2r}}$$

als Gleichungen für die Darstellung der Polarreziproken jener Epicykloide in Bezug auf diesen Kreis. Führen wir nun ein Polarkoordinatensystem ein, dessen Axe mit der y-Axe zusammenfällt, indem wir $\frac{R+2r}{2r}\varphi = \frac{\pi}{2} - \omega$ setzen und den Quotienten $\frac{r}{R}$ mit n bezeichnen, so können die obigen beiden Gleichungen durch die folgende ersetzt werden

$$\varrho = \frac{l^2}{(2n+1)R} \frac{1}{\sin\frac{\omega}{2n+1}};$$

da diese eine uns schon bekannte Kurve darstellt (vgl. Nr. **137**), so schliefsen wir: **Die Polarreziproke einer Epi- oder Hypocykloide in Bezug auf einen mit dem Basiskreise konzentrischen Kreis ist eine Ährenkurve**[2]).

Benutzen wir die Gleichungen (23), so sehen wir, dafs das vom Mittelpunkte des Basiskreises auf die Tangente gefällte Lot dargestellt wird durch die Gleichung

$$x\cos\frac{(2n+1)\varphi}{2} + y\sin\frac{(2n+1)\varphi}{2} = 0,$$

daher sind die Koordinaten des Fufspunktes jenes Lotes

$$x = \frac{2n+1}{2} r\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{(2n+1)\varphi}{2}; \quad y = -\frac{(2n+1)}{2} r\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{(2n+1)\varphi}{2};$$

---

1) *Intermédiaire* I, 1894, S. 22 u. 243; II, 1895, S. 208.

2) S. Jeřabek, *Courbes polaires réciproques des épicycloïdes et hypocycloïdes* (Mathésis, 2. Ser. IX, 1899).

führen wir auch hier Polarkoordinaten ein, indem wir $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\frac{(2n+1)\varphi}{2} = \omega$ setzen, so erkennen wir, dafs der Ort des genannten Fufspunktes als Gleichung hat

$$\varrho = \frac{2n+1}{2} r \cos \frac{\omega}{2n+1},$$

und folglich: **Die Fufspunktkurve einer gemeinen Epi- oder Hypocykloide in Bezug auf das Centrum des Basiskreises ist eine Rhodonee**[1]).

Die oben dargelegten Sätze[2]) zeigen, wie bemerkenswert gerade die Epi- und Hypocykloiden sind, bei denen $h = r$ ist. Es giebt jedoch noch einen anderen speziellen Wert von h, der besonders vermerkt zu werden verdient, nämlich $h = R - r$; in diesem Falle werden die Gleichungen (3_h) zu

$$x = (R-r)\left[\cos\varphi + \cos\left(\frac{R-r}{r}\varphi\right)\right], \quad y = (R-r)\left[\sin\varphi - \sin\left(\frac{R-r}{r}\varphi\right)\right],$$

oder auch

$$x = 2(R-r)\cos\frac{R\varphi}{2r}\cdot\cos\frac{(2r-R)\varphi}{2r}, \quad y = 2(R-r)\cos\frac{R\varphi}{2r}\cdot\sin\frac{(2r-R)\varphi}{2r}.$$

Nun folgt aus diesen

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{(2r-R)\varphi}{2r}, \qquad \sqrt{x^2+y^2} = 2(R-r)\cos\frac{R\varphi}{2r};$$

wenn wir daher Polarkoordinaten einführen, indem wir

$$\omega = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}, \qquad \varrho = \sqrt{x^2+y^2}$$

setzen, so bekommen wir

$$\omega = \frac{(2r-R)\varphi}{2r}, \qquad \varrho = 2(R-r)\cos\frac{R\varphi}{2r},$$

und nach Elimination von φ

$$\varrho = 2(R-r)\cos\frac{R\omega}{2r-R}.$$

Da diese Gleichung eine allgemeine Rhodonee (vgl. Nr. **134**) darstellt, so ist bewiesen: **Jede Rhodonee kann durch Rollen eines Kreises auf einem anderen festen Kreise erzeugt werden,** indem man sie entweder als Epicykloide oder als Hypocykloide betrachten kann; es ist dies eine wichtige Thatsache, die 1752 von G. B. Suardi empirisch bemerkt[3]), 1844 von Luigi Ridolfi[4]) bewiesen und 20 Jahre darauf

1) Bellavitis, *Sulla derivazione delle curve* (Annali di Tortolini, III, 1852); Böklen, *Einige geometrische Sätze über Kurven* (Zeitschrift f. Math. III, 1855).

2) Denselben kann man noch folgenden hinzufügen: „Rollt eine gemeine Epi- oder Hypocykloide auf einer geraden Linie, so beschreibt deren Mittelpunkt eine Ellipse“ (G. Bellermann, *Ueber Rouletten, welche entstehen, wenn eine Cykloide auf einer anderen rollt,* Berlin 1892, S. 14).

3) *Nuovi strumenti per la descrizione di diverse curve antiche e moderne, e di molte altre* (Brescia 1752).

4) S. die Note 1, S. 480 citierte Schrift, S. 11.

von Durège[1]) wieder aufgefunden wurde, sowie später noch von neuem durch E. W. Hyde[2]).

208. Alle unsere bisherigen Betrachtungen bestehen zu Recht, welches auch der Wert des Modulus sein möge; wenn man jedoch über den Wert desselben gewisse Annahmen macht, gelangt man zu neuen Eigenschaften der Epi- und Hypocykloiden. Beachten wir zunächst, dafs aus (3_e) sich ergiebt

$$x \pm iy = (R+r)e^{\pm i\varphi} - he^{\pm i\frac{R+r}{r}\varphi}.$$

Wenn nun der Modulus rational ist, so wird $\frac{R+r}{r}$ ein Bruch sein, der soweit als möglich gekürzt mit $\frac{p}{q}$ bezeichnet werden kann $(p>q)$. Setzt man nun $e^{i\varphi}=\lambda^q$, $x+iy=\xi$, $x-iy=\eta$, so werden die vorigen Gleichungen

$$\xi=(R+r)\lambda^q-h\lambda^p, \quad \eta=(R+r)\lambda^{-q}-h\lambda^{-p}=\frac{(R+r)\lambda^{p-q}-h}{\lambda^p}; \quad (26)$$

diese neue parametrische Darstellung zeigt, dafs man in diesem Falle es mit einer algebraischen Kurve von der Ordnung $2p$ zu thun hat; demnach: **Alle Epi- und Hypocykloiden mit rationalem Modulus sind algebraische Kurven.** Jene parametrische Darstellung, die analog zu derjenigen ist, der wir bei der Untersuchung der Lissajous'schen Kurven begegnet sind (s. Nr. **173**), erweist sich als vortrefflich zur Bestimmung der Plücker'schen Charakteristiken der fraglichen Kurven[3]).

Wenn wir, was noch spezieller ist, annehmen, dafs n eine positive ganze Zahl sei, so kann die Gleichung (23), falls x und y als gegeben vorausgesetzt werden, dazu dienen, die Berührungspunkte der $(2n+1)$ Tangenten zu bestimmen, die man vom Punkte (x, y) an die Kurve ziehen kann. Durch Einführung von Polarkoordinaten wird diese Bestimmung noch erleichtert. Setzen wir nämlich $x=\varrho\cos\omega$, $y=\varrho\sin\omega$, so wird die Gleichung (23) zu

$$\varrho\sin\left(\frac{2n+1}{2}\varphi-\omega\right)=\frac{2n+1}{n}r\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Setzen wir im besonderen

$$\varrho=\frac{2n+1}{n}r,$$

1) *Über eine besondere Art cyklischer Curven* (Zeitschr. f. Math. IX, 1864); daselbst werden die Rhodoneen, von diesem Standpunkte betrachtet, mit dem Namen sternförmige Cykloiden belegt.

2) *Foliate Curves* (The Analyst II, 1875).

3) S. Roberts, *Note on the Plückerian Characteristics of Epi- and Hypotrochoids and allied Curves* (Proc. of the L. M. S. IV, 1873); Elling Holst, *Ueber algebraische cycloidische Curven* (Lie's Archiv. VI, 1881); F. Morley, *On the Epicycloid* (Amer. Journ. XIII, 1891).

dann wird die letzte Gleichung

$$\sin\left(\frac{2n+1}{2}\varphi - \omega\right) = \sin\frac{\varphi}{2};$$

dieser wird genügt, wenn man setzt

$$\frac{2n+1}{2}\varphi - \omega = \frac{\varphi}{2} + 2k\pi \quad \text{oder} \quad = (2k+1)\pi - \frac{\varphi}{2},$$

oder, wenn man setzt

$$n\varphi - \omega = 2k\pi \quad \text{oder} \quad (n+1)\varphi - \omega = (2k+1)\pi,$$

d. h. wenn man nimmt

$$\varphi = \frac{\omega + 2k\pi}{n} \quad \text{oder} \quad \varphi = \frac{\omega + (2k+1)\pi}{n+1}.$$

Bei der ersteren dieser Formeln wird es genügen, dem k die Werte $0, 1, 2 \ldots, n-1$ zu erteilen, bei der zweiten die Werte $0, 1, 2 \ldots . n$; man erhält so zwei Gruppen, die eine von n, die andere von $n+1$ Tangenten der Epicykloide, jede gebildet von einem regulären Büschel. Also: **Die Tangenten einer Epi- oder Hypocykloide mit ganzzahligem Modulus n laufen zu je n und je $n+1$ in einen Punkt eines Kreises zusammen, indem sie in jedem Punkte desselben ein reguläres Büschel bilden; jener Kreis ist mit dem Basiskreise der Kurve konzentrisch, und sein Radius steht mit dem Radius des rollenden Kreises im Verhältnisse $(2n+1):n$.**[1] Es ist dies eine bemerkenswerte Verallgemeinerung einer bekannten Eigenschaft der dreispitzigen Hypocykloide (s. S. 152)[1]).

Unter den algebraischen Epicykloiden finden sich mehrere uns schon bekannte Kurven, die wir an dieser Stelle aufzählen wollen:

I. Es sei $r = h = \frac{R}{2}$. Die Gleichungen (3_h) werden dann: $x = R\cos\varphi$, $y = 0$ und stellen dann den mit der x-Axe zusammenfallenden Durchmesser des Basiskreises dar; daraus folgt: **Wenn ein Kreis sich so bewegt, dafs er immer einen anderen vom doppelten Radius von innen berührt, so beschreibt ein beliebiger Punkt der Peripherie einen Durchmesser des festen Kreises.** Dieser merkwürdige Satz, der sich im *Traité des epicycloïdes* von de la Hire[2]) findet, wurde vielfach diesem Geometer zugeschrieben; er wurde jedoch, soviel man weifs, schon früher bemerkt[3]), nicht blofs in einer Arbeit von Tacquet, 1651 gedruckt, sowie in einer von Cardano, 1572 gedruckt, sondern auch in dem berühmten Werke von Copernicus,

1) Dieser elegante Satz ist implicite enthalten in einer Abhandlung von P. Serret, *Sur les équilatères d'ordre quelconque* (Comptes R. CXI, 1895).

2) *Mém. de l'Acad. des Sciences etc.* IX, S. 254.

3) C. Le Paige, *Sur un théorème attribué à La Hire* (Bibl. math. 1887); M. Curtze, *Ueber einen De La Hire zugeschriebenen Lehrsatz* (Das. 1888).

De revolutionibus orbium coelestium, das bekanntlich 1543 veröffentlicht wurde, und noch früher bei Nasîr Eddîn[1]).

II. Für $\boldsymbol{R = 2r}$ (**$\boldsymbol{h}$ beliebig**) werden die Gleichungen (3_h) zu $x = (r + h)\cos\varphi$, $y = (r - h)\sin\varphi$, und stellen eine Ellipse dar; auf dieser Beobachtung beruht die Konstruktion eines besonderen Ellipsographen[2]).

III. Wenn $\boldsymbol{R = r}$, werden die Gleichungen (3_e) $x = 2r\cos\varphi - h\sin 2\varphi$, $y = 2r\sin\varphi - h\sin 2\varphi$, oder auch

$$x - h = 2\cos\varphi\cdot(r - h\cos\varphi)\,, \qquad y = 2\sin\varphi\,(r - h\cos\varphi)\,;$$

führen wir jetzt Polarkoordinaten ein, indem wir $x - h = \varrho\cos\omega$, $y = \varrho\cdot\sin\omega$ setzen, so erhalten wir

$$\varrho = 2(r - h\cos\varphi)\,, \qquad \omega = \varphi\,,$$

somit nach Elimination von φ

$$\varrho = 2(r - h\cos\omega)\,,$$

welches (vgl. S. 137) eine Pascal'sche Schnecke darstellt[3]). Wenn im besonderen $h = r$, so sieht man, **dafs die Kardioide eine spezielle Epicykloide ist**; diese Auffassung der Kardioide stammt, wenn nicht von einem früheren, von G. Cramer[4]) her; jedoch die spezielle Epicykloide, die dem Falle $R = r = h$ entspricht, wurde viel früher, nämlich 1678 vom Abt de Vaumesle[5]) betrachtet; es waren auch die von ihm gemachten Mitteilungen, die Huygens veranlafsten, sich mit den Epicykloiden im allgemeinen zu befassen[6]).

IV. Für $\boldsymbol{R = 3r}$, $\boldsymbol{h = r}$ werden die Gleichungen (3_h) zu

$$x = r(2\cos\varphi + \cos 2\varphi)\,, \qquad y = r(2\sin\varphi - \sin 2\varphi)\,,$$

und stellen (vgl. S. 150) die dreispitzige Hypocykloide dar.

V. Für $\boldsymbol{R = 4r}$, $\boldsymbol{h = r}$ werden (3_h)

$$x = 3r\cos\varphi + r\cos 3\varphi\,, \qquad y = 3r\sin\varphi - r\sin 3\varphi\,,$$

oder auch $\quad \frac{x}{r} = 4\cos^3\varphi\,, \quad \frac{y}{r} = -4\sin^3\varphi\,,$

demnach durch Elimination von φ

$$\left(\frac{x}{4r}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{4r}\right)^{\frac{2}{3}} = 1\,,$$

welches eine reguläre Astroide darstellt (s. S. 227)[7]).

1) Vgl. P. Tannery, *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne* (Paris 1893) S. 348—349.

2) Ridolfi, a. a. O. S. 25.

3) Salmon-Fiedler, *Analytische Geom. der höh. eb. Curven* (Leipzig 1873) S. 345.

4) *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Genève 1750) S. 431.

5) S. den Brief an Huygens v. 29. Okt. und 19. Nov. 1678, sowie 31. Juli 1679 (*Oeuvres de Huygens* VIII, S. 117, 127, 189); daselbst werden die fraglichen Kurven circulare Cycloiden genannt.

6) *Oeuvres de Huygens* VIII, S. 117, Note 6.

7) Die Bemerkung, dafs die reguläre Astroide als spezielle Hypocykloide

Die Epicykloiden können auch zur Teilung eines Winkels in gleiche Teile benutzt werden[1]), sie finden vielfache Anwendung in der Kunst[2]), sowie bei physikalischen Fragen[3]) und Problemen der Mechanik[4]), mit denen wir uns aber nicht aufhalten wollen.

209. Nichts hindert uns bei der Allgemeinheit der Definition der Epi- und Hypocykloiden anzunehmen, dafs der Radius entweder des Basiskreises oder der des rollenden Kreises unendlich grofs sei[5]). Im ersteren Falle kommen wir nämlich auf die Cykloiden zurück, im zweiten Falle erhalten wir eine neue Kurve, deren Untersuchung den Schlufs dieses Kapitels ausmachen wird.

Wenn der erzeugende Punkt auf der bewegten Geraden liegt, so ist die entstehende Kurve nichts anderes als die gewöhnliche Kreisevolvente[6]), andernfalls eine verlängerte oder verkürzte Evolvente, jenachdem der erzeugende Punkt auf derselben Seite oder auf der entgegengesetzten Seite der Geraden liegt wie das Centrum des Basiskreises[7]). Die Gleichungen dieser Evolventen könnten wir durch einen Grenzübergang aus den früheren Gleichungen (3_e) erhalten[8]); wir ziehen es jedoch vor, sie direkt zu entwickeln. Wir werden annehmen, dafs der erzeugende Punkt von einer solchen Lage P ausgehe, dafs die

---

angesehen werden kann, scheint zuerst von C. Sturm gemacht zu sein; s. die Question 39 der Nouv. Ann. gelöst 1843 von Breton (de Champ).

1) Ridolfi, a. a. O. S. 13—17; van Leeuwen, *Nieuw Arch. voor Wiskunde,* VII, 1881; Proctor, o. a. O. S. 246.

2) Poppe, *Ausführliche Geschichte der Anwendung aller krummen Linien etc.* (Nürnberg 1802) S. 124 u. 210.

3) Blumenthal, *Die Bewegung der Ionen beim Zeemann'schen Phänomen* (Zeitschr. für Math. XLV, 1900).

4) Schon seit Newtons Zeiten (s. *Principia*, Lib. I, Sect. X) war es bekannt, dafs die Epicykloiden Probleme des Tautochronismus im resistenten Medium lösten; jedoch das allgemeinere Problem dieser Art ist das von Hâton de la Goupillière aufgestellte in der Note: *Theorème sur le tautochronisme des epicycloides quand on a égard au frottement* (Liouvilles Journ. 2. Ser. XIII, 1868).

5) Die entstehenden Kurven werden von Reuleaux (*Verh. des Ver. zur Bef. des Gewerbefl.* LV, 1876) Orthocykloiden resp. Cykloorthoiden genannt.

6) Diese Kurve — von der De La Hire in seinem *Traité des roulettes* spricht (Mém. de l'Ac. des Sciences, 1706, S. 369) — wurde methodisch behandelt von Diderot in der Abh. *Examen de la développante du cercle,* welcher den zweiten Teil seiner *Mémoires sur différents sujets mathématiques* (Paris 1748) bildet.

7) Diese Kurven kommen in der angewandten Mathematik bei Fragen aus der Mechanik vor, z. B. bei der Lösung folgender Aufgabe: „Eine Ebene dreht sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit um eine zu ihr senkrechte Axe. Einer ihrer Punkte bewegt sich infolge eines anfänglich erhaltenen Anstofses der Trägheit gemäfs; seine Bahn aufzufinden.“ (Roth, *Ueber die Bahn eines freien Teilchens auf einer sich gleichmäfsig drehenden Scheibe*, Repertorium der Physik XXII, 1886).

8) Für die gewöhnlichen Kreisevolventen s. m. z. B. Serret, *Calcul différentiel,* II. Aufl. (Paris 1879) S. 356.

Verbindungslinie mit dem Centrum O des festen Kreises auf der zugehörigen Lage g der bewegten Geraden senkrecht steht. Als Anfangspunkt nehmen wir O, als x-Axe die Gerade OP (Taf. XV, Fig. 121). Der Radius des gegebenen Kreises sei a; der Endpunkt des Radius heifse A, und es sei der Abstand $AP = h$. Ist nun g' eine andere beliebige Lage der bewegten Geraden, B ihr Berührungspunkt, so wird, wenn BA' gleich dem Bogen BA ist, A' ein Punkt der gewöhnlichen Kreisevolvente sein; errichten wir nun auf g' in A' das Lot $A'P' = h$, so wird P' ein Punkt der durch P erzeugten Evolvente sein. Wir setzen jetzt

$$\sphericalangle A'Ox = \varphi, \quad \sphericalangle BOA' = \psi, \quad OA' = \varrho;$$

dann haben wir

$$a(\varphi + \psi) = \sqrt{\varrho^2 - a^2}, \quad a = \varrho \cos\psi,$$

oder

$$\varrho = \frac{a}{\cos\psi}, \quad \varphi = \frac{\sqrt{\varrho^2 - a^2}}{a} - \psi,$$

oder auch

$$\varrho = \frac{a}{\cos\psi}, \quad \varphi = \frac{\varrho \sin\psi}{a} - \psi \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Diese Gleichungen können als eine parametrische Darstellung der gewöhnlichen Kreisevolvente angesehen werden; durch Elimination des Hilfswinkels ψ bekommt man ihre Polargleichung:

$$\varphi = \frac{\sqrt{\varrho^2 - a^2}}{a} - \operatorname{arc\,cos} \frac{a}{\varrho} \cdot {}^{1)} \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Bezeichnen wir jetzt mit ξ und η die Koordinaten des Punktes A', nämlich die Produkte $\varrho \cos\varphi$ und $\varrho \sin\varphi$, so ergeben die Gl. (1)

$$\xi = a \cos(\operatorname{tg}\psi) + a \operatorname{tg}\psi \cdot \sin(\operatorname{tg}\psi),$$
$$\eta = a \sin(\operatorname{tg}\psi) - a \operatorname{tg}\psi \cdot \cos(\operatorname{tg}\psi),$$

und wenn wir setzen $\operatorname{tg}\psi = \omega, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$

$$\xi = a \cos\omega + a\omega \sin\omega, \quad \eta = a \sin\omega - a\omega \cos\omega.$$

Weil nun die Strecke $A'P'$ parallel zum Radius OB ist, so haben wir, wenn x, y die Koordinaten von P' sind

$$x = \xi + h \cos(\varphi + \psi), \quad y = \eta + h \sin(\varphi + \psi);$$

aufserdem ist wegen (1) und (3)

$$\varphi + \psi = \operatorname{tg}\psi = \omega,$$

daher ist schliefslich

$$x = (a + h)\cos\omega + a\omega \sin\omega, \quad y = (a + h)\sin\omega - a\omega \cos\omega \, . \; (4)$$

---

1) Beachten wir, dafs die Gl. (8) S. 432 wie folgt geschrieben werden kann

$$\omega = \frac{b}{a} \frac{\sqrt{\varrho^2 - b^2}}{b} - \operatorname{arc\,cos} \frac{b}{\varrho},$$

so folgt daraus die Beziehung zwischen den von Clairaut a. O. betrachteten Kurven und den Kreisevolventen.

die analytische Darstellung aller Kreisevolventen. Wir wollen aus ihr einige Folgerungen ziehen. Zunächst ergiebt sich

$$\frac{ds}{d\omega} = \sqrt{h^2 + a^2\omega^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

und somit, wenn $h \neq 0$,

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{h^2 + a^2\omega^2} + \frac{h^2}{4a}\log\frac{\omega + \sqrt{h^2 + a^2\omega^2}}{\omega - \sqrt{h^2 + a^2\omega^2}} + Const.; \quad . \quad (6)$$

ist dagegen $h = 0$ und nimmt man als Anfangspunkt des Bogens denjenigen, für welchen $\omega = 0$ ist, so bekommt man

$$s = \frac{1}{2}a\omega^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6')$$

Beachten wir ferner, dafs

$$\frac{dx}{d\omega} = a\sin\omega - y, \qquad \frac{dy}{d\omega} = -a\cos\omega + x,$$
$$\frac{d^2x}{d\omega^2} = 2a\cos\omega - x, \qquad \frac{d^2y}{d\omega^2} = 2a\sin\omega - y,$$

so erhalten wir für den Krümmungsradius R, wenn $h \neq 0$,

$$R = \frac{(h^2 + a^2\omega^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2\omega^2 + h^2 - ah} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

und wenn $h = 0$ $\qquad R = a\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7')$

Die Gleichungen (6) und (7), indem sie R und s in Funktionen des Parameters ω liefern, genügen zur analytischen Darstellung der Kurve in natürlichen Koordinaten; eliminiert man z. B. aus (6′) und (7′) ω, so erhält man

$$R^2 = 2as, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

welches die natürliche Gleichung der gewöhnlichen Kreisevolvente ist[1]), sie zeigt, dafs die betreffende Kurve zur Klasse der in Nr. **192** bezeichneten Kurven gehört, ferner beweist sie: **Rollt eine gewöhnliche Kreisevolvente auf einer Geraden, so ist der Ort der Krümmungscentren für die aufeinander folgenden Berührungspunkte mit der Geraden eine Parabel**[2]). Beachten wir auch, dafs, wenn ε der Kontingenzwinkel ist, im allgemeinen Falle $\frac{ds}{d\varepsilon} = R$, und im vorliegenden Falle $R = \sqrt{2as}$ ist; folglich ist hier $\frac{ds}{\sqrt{s}} = \sqrt{2a} \cdot d\varepsilon$; integriert:

1) Ampère, *Mémoire sur les avantages qu'on peut tirer dans la théorie des courbes de la consideration des paraboles osculatrices* (Journ. de l'Éc. polyt. XIV Cah. 1808).

2) Mannheim, *Recherches géométriques etc.* (Liouvilles Journ. 2. Ser. IV, 1859) S. 97. Ein ähnlicher Satz wurde später von G. Bellermann (*Ueber Rouletten, welche entstehen, wenn eine Cykloide auf einer anderen rollt,* Berlin 1892, S. 17—18) angegeben; er lautet: **Rollt die Evolvente eines Kreises auf einer Geraden, so beschreibt ihr Mittelpunkt eine Parabel; rollt sie aber auf einer ihr kongruenten Kurve, so dafs sich die entsprechenden Punkte einander berühren, so beschreibt der Mittelpunkt des Kreises eine archimedische Spirale.**

$2s = a\varepsilon^2$, welche Gleichung analog der kanonischen Form der Parabel ist: daraus erklärt sich der Name parabola originaria augularis, der von Krause zur Bezeichnung der vorliegenden Kurve angewendet wurde[1]). — Eine ganz ähnlich wie auf S. 487—89 ausgeführte Rechnung führt zu dem Satze: **Die Berührungspunkte der von einem Punkte an die gewöhnliche Kreisevolvente gezogenen Tangenten liegen auf einer Pascal'schen Schnecke;** jede gewöhnliche Kreisevolvente gehört daher einem System mit den Charakteristiken $\mu = \nu = 2$ an.

Die Quadratur der gewöhnlichen Kreisevolvente liefert einen eleganten von Mannheim[2]) entdeckten Satz. Um diesen darzulegen bezeichnen wir mit $\mathfrak{T}$ den Inhalt des Dreieckes, welches die Kreistangente TM, den Kreisbogen TA und den Evolventenbogen AM zu Seiten hat (Taf. XV, Fig. 122); aus Gleichung (1) ergiebt sich nun

$$\text{Sektor } OAM = \frac{1}{2}\int_0^\varphi \varrho^2 \cdot d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^\psi \frac{d\psi}{\cos^2\psi}\left(\frac{1}{\cos^2\psi} - 1\right) = \frac{a^2}{6}\operatorname{tg}^3\psi.$$

Ist nun N der Schnittpunkt von OM mit dem Kreise, so ist

$$\text{Sektor } OAN = \frac{1}{2}a^2\varphi = \frac{a^2}{2}(\operatorname{tg}\psi - \psi), \quad \text{Sektor } TON = \frac{a^2}{2}\psi;$$

$$\text{Dreieck } OTM = \frac{1}{2}a \cdot a(\varphi + \psi) = \frac{a^2}{2}\operatorname{tg}\psi.$$

Da nun $\mathfrak{T} = \text{Sekt. } OAM - \text{Sekt. } OAN + \text{Dreieck } OTM - \text{Sekt. } TON$

ist, so ist ebenfalls $\qquad \mathfrak{T} = \frac{a^2}{6}\operatorname{tg}^3\psi.$

Nun ist wegen (6′) $\qquad \text{Bogen } AM = \frac{a^2}{2}\operatorname{tg}^2\psi,$

daher $\qquad \mathfrak{T} = \frac{1}{3}\text{ Bogen } AT \cdot \text{Bogen } AM;$

diese Gleichung besagt: **Die zwischen dem Kreisbogen, dem entsprechenden Evolventenbogen und der zugehörigen Tangente des ersteren gelegene Fläche ist gleich einem Drittel des Produktes aus der Länge jener beiden Bogen.**

Zwischen der gewöhnlichen Kreisevolvente und anderen uns schon bekannten Kurven bestehen Beziehungen, die wir nicht gänzlich mit Stillschweigen übergehen können.

a) Da im allgemeinen $\operatorname{arc}\cos x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\sin x$, so wird, wenn wir $\frac{\pi}{2} + \varphi = \omega$ setzen, die Gleichung (2) zu

$$\omega = \frac{\sqrt{\varrho^2 - a^2}}{a} + \operatorname{arc}\sin\frac{a}{\varrho}. \quad \ldots \ldots \quad (2')$$

Wir wollen diese benutzen, um die Fuſspunktkurve der Evolvente abzuleiten. Es seien (Taf. XV, Fig. 122) ϱ_1, ω_1 die Koordinaten des

1) *Novae theoriae linearum curvarum* (München 1835). S. 79.

2) S. die in obiger Note citierte Abh. S. 98.

Fufspunktes F des vom Pole auf die Tangente in $M(\varrho, \omega)$ gefällten Lotes; nennen wir den Winkel OMF μ, so haben wir

$$\omega + \omega_1 = \frac{\pi}{2} - \mu, \quad \varrho_1 = \varrho \sin \mu, \quad \sin \mu = \frac{\sqrt{\varrho^2 - a^2}}{\varrho},$$

daher

$$\cos(\omega - \omega_1) = \sin \mu = \frac{\sqrt{\varrho^2 - a^2}}{\varrho}, \qquad \varrho_1 = \sqrt{\varrho^2 - a^2}.$$

$$\omega - \omega_1 = \text{arc} \cos \frac{\sqrt{\varrho^2 - a^2}}{\varrho} = \text{arc} \sin \frac{a}{\varrho}.$$

Daraus folgt in Verbindung mit (2′), dafs

$$\omega_1 = \frac{\varrho_1}{a}, \quad \text{oder} \quad \varrho_1 = a\omega_1, \ldots \ldots \quad (9)$$

welches eine Archimedische Spirale darstellt. Also: **Die Fufspunktkurve der Evolvente eines Kreises in Bezug auf dessen Centrum ist eine Archimedische Spirale**[1]).

b) Man beschreibe einen Kreis um O mit dem Radius l, auf der Geraden OF nehme man den Punkt $P(\omega', \varrho')$ derart, dafs $OF \cdot OP = l^2$, so ist der Punkt P der Pol der Tangente MP in Bezug auf diesen Kreis, und der Ort von P ist die Polarreziproke der betrachteten Evolvente; da nun $\omega' = \omega_1$, $\varrho' \cdot \varrho_1 = l^2$, so wird die Gleichung (9) zu

$$\frac{l^2}{\varrho'} = a\omega', \quad \text{oder} \quad \varrho'\omega' = \frac{l^2}{a},$$

welches eine hyperbolische Spirale darstellt. Demnach: **Die Polarreziproke der Evolvente eines Kreises in Bezug auf einen konzentrischen ist eine hyperbolische Spirale**[2]).

c) Wir betrachten schliefslich die durch folgende Gleichungen dargestellte Cylinder-Schraubenlinie:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = h\varphi;$$

die allgemeine Gleichung der Tangente ist

$$\frac{x - r \cos \varphi}{- r \sin \varphi} = \frac{y - r \sin \varphi}{r \cos \varphi} = \frac{z - h\varphi}{h}.$$

Setzen wie darin $z = 0$, so erhalten wir

$$x = r(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi), \quad y = r(\sin \varphi - \varphi \cos \varphi).$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit (4), so schliefsen wir: **Die Schnittlinie einer abwickelbaren Schraubenfläche mit der Grundebene ist eine gewöhnliche Kreisevolvente**[3]).

---

1) Clairaut, *Mém. de l'Ac. des Sciences de Paris,* 1740. S. auch La Gournerie, *Traité de geometrie descriptive,* Art. 990.

2) Neuberg, *Nouv. Corr. math.* VI, 1880. — Eine andere minder wichtige Beziehung zwischen diesen beiden Kurven ist in der Abh. von Schiffner dargestellt, *Ueber die Tangenten der hyperbolischen Spirale* (Archiv der Math. LXVI, 1881).

3) Monge, *Géometrie descriptive* (Paris, An VII) S. 112.

Zehntes Kapitel.

Die Pseudocykloiden.

210. Wir nehmen wieder die Gleichungen (3_h) aus Nr. **204** und wollen untersuchen, ob sie auch dann eine reelle Kurve darstellen können, wenn die in ihnen auftretenden Konstanten R, r, h nicht alle reell sind[1]). Wir setzen daher zur Verallgemeinerung

$$R = R_1 + iR_2, \quad r = r_1 + ir_2, \quad h = h_1 + ih_2, \quad \varphi = (\varrho_1 + i\varrho_2)\omega,$$

wo die $R_1, R_2, \ldots\ldots \varrho_2$ reelle Konstanten sind. Der Kürze wegen wollen wir ferner setzen

$$d_1 + id_2 = (R_1 - r_1) + i(R_2 - r_2), \quad \sigma_1 + i\sigma_2 = \frac{(\varrho_1 + i\varrho_2)(d_1 + id_2)}{r_1 + ir_2}.$$

Die angezogenen Gleichungen werden dann

$$\left.\begin{aligned} x &= (d_1 + id_2)\cos(\varrho_1 + i\varrho_2)\omega + (h_1 + ih_2)\cos(\sigma_1 + i\sigma_2)\omega \\ y &= (d_1 + id_2)\sin(\varrho_1 + i\varrho_2)\omega + (h_1 + ih_2)\sin(\sigma_1 + i\sigma_2)\omega \end{aligned}\right\}. \quad (1)$$

Damit x und y für alle reellen Werte von ω reell seien, müssen die eingeführten Konstanten gewissen Bedingungsgleichungen genügen, und eine nicht schwierige Diskussion zeigt uns, dafs dies nur in folgenden beiden Fällen eintritt:

$$\text{I.} \quad d_2 = h_2 = \varrho_2 = \sigma_2 = 0.$$
$$\text{II.} \quad d_1 = h_1, \quad d_2 = h_2, \quad \varrho_1 = -\sigma_1, \quad \varrho_2 = \sigma_2 \, . \; . \; . \quad (2)$$

Man erkennt alsbald, dafs im ersten Falle $r_2 = 0$, $R_2 = 0$ und deshalb verschwindet in den Gleichungen (1) jede Spur des Imaginären, sie gehen daher auf die Gleichung (3_h) in Nr. **204** zurück, weshalb die entsprechende Kurve eine gewöhnliche Hypocykloide ist.

Im zweiten Falle hat man $d_1 - id_2 = h_1 + ih_2$, $\sigma_1 + i\sigma_2 = -(\varrho_1 - i\varrho_2)$, und die Gleichungen (1) werden dann zu

$$\left.\begin{aligned} x &= 2d_1 \cos\varrho_1\omega \cdot \operatorname{Cos}\varrho_2\omega + 2d_2 \sin\varrho_1\omega \cdot \operatorname{Sin}\varrho_2\omega \\ y &= 2d_1 \sin\varrho_1\omega \cdot \operatorname{Cos}\varrho_2\omega - 2d_2 \cos\varrho_1\omega \cdot \operatorname{Sin}\varrho_2\omega \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \quad (3)$$

Da die so dargestellten reellen Kurven durch Rollen eines komplexen Kreises auf einem ebensolchen Kreise erzeugt werden, so wurden sie von E. Cesàro und E. Wölffing Pseudocykloiden oder Pseudotrochoiden genannt.

Da im allgemeinen

$$\sigma_1 = \frac{(d_1 r_1 + d_2 r_2)\varrho_1 + (d_1 r_2 - d_2 r_2)\varrho_2}{r_1{}^2 + r_2{}^2}, \quad \sigma_2 = \frac{-(d_1 r_2 - d_2 r_1)\varrho_1 + (d_1 r_1 + d_2 r_2)}{r_1{}^2 + r_2{}^2}$$

---

1) Betreffs des Folgenden s. die wichtige Abh. von E. Wölffing, *Ueber Pseudotrochoiden* (Zeitschrift f. Math. XLIV, 1899), woselbst sich auch voll ständige bibliographische Notizen finden.

und da wegen (2) $\sigma_1 = -\varrho_1$, $\sigma_2 = \varrho_2$, so findet man

$$\left.\begin{aligned} \varrho_1(r_1 d_1 + r_2 d_2 + \overline{r_1^2 + r_2^2}) + \varrho_2(d_1 r_2 - d_2 r_1) = 0,\\ -\varrho_1(d_1 r_2 - d_2 r_1) + \varrho_2(r_1 d_1 + r_2 d_2 - \overline{r_1^2 + r_2^2}) = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (4)$$

demnach durch Elimination von ϱ_1 und ϱ_2

$$d_1^2 + d_2^2 = r_1^2 + r_2^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

oder auch
$$R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 r_1 - 2R_2 r_2 = 0. \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5')$$

Nun stellt $\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$ dafs Mafs für den Abstand des Mittelpunktes des beweglichen Kreises vom Mittelpunkte des festen dar, während $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ das Mafs für den Radius des ersteren ist; folglich: **Damit ein komplexer Kreis durch Rollen auf einem anderen eine reelle Pseudocykloide erzeuge, mufs der absolute Wert seines Radius gleich dem absoluten Werte des Abstandes seines Mittelpunktes von dem des Basiskreises sein.**

Die Gleichungen (3) lassen sich ein wenig anders schreiben. Setzt man nämlich $\mu = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}$, so geben die Gleichungen (4) und (5)

$$\mu = \frac{R_1}{R_2 - 2r_2} = \frac{R^2}{2r_2 - R_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

und, wenn man noch statt ω den Winkel $\vartheta = \varrho_1 \omega$ einführt, bekommt man:

$$\left.\begin{aligned} x = 2(R_1 - r_1)\cos\vartheta \cdot \mathfrak{Cos}\,\mu\vartheta + 2(R_2 - r_2)\sin\vartheta \cdot \mathfrak{Sin}\,\mu\vartheta\\ y = 2(R_1 - r_1)\sin\vartheta \cdot \mathfrak{Cos}\,\mu\vartheta - 2(R_2 - r_2)\cos\vartheta \cdot \mathfrak{Sin}\,\mu\vartheta \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (7)$$

wo μ durch die Gleichung (6) bestimmt ist.

Jedem die Gleichung (5′) befriedigenden Quadrupel der Werte R_1, R_2, r_1, r_2 entspricht demnach eine Pseudocykloide; daher giebt es ∞^3 verschiedene Pseudocykloiden, von denen ∞^2 von verschiedener Gestalt sind. — Ebenso wie unter den Cykloiden diejenigen bemerkenswert sind, bei denen der erzeugende Punkt auf der Peripherie des rollenden Kreises liegt, so verdienen auch unter den Pseudocykloiden diejenigen eine besondere Beachtung, bei denen $h = \pm r$. Nehmen wir zunächst $h = r$, so liefern die Gleichungen (2) $R_1 = 2r_1$, $R_2 = 0$; daher ist $R = R_1$, $r = \frac{R_1}{2} + ir_2$; die Kurve wird erzeugt durch Rollen eines komplexen Kreises auf einem reellen; sie heifsen Paracykloiden[1]) und haben zur Gleichung

$$\left.\begin{aligned} x = 2r_1 \cos\vartheta\, \mathfrak{Cos}\,\mu\vartheta - 2r_2 \sin\vartheta\, \mathfrak{Sin}\,\mu\vartheta\\ y = 2r_1 \sin\vartheta\, \mathfrak{Cos}\,\mu\vartheta + 2r_2 \cos\vartheta\, \mathfrak{Sin}\,\mu\vartheta \end{aligned}\right\}, \quad \text{wobei } \mu = -\frac{r_1}{r_2}. \quad (8)$$

Setzen wir hingegen $h + r = 0$, so ergeben die Gleichungen (2) $R_1 = 0$,

---

1) R. de Saussure, *Sur la génération des courbes par roulement* (Diss. Genève 1895) S. 41—55; *Note sur les lignes cycloidales* (Amer. Journ. XVIII, 1895).

$R_2 = 2r_2$; daher ist $R = iR_2$ und $r = r_1 + \frac{iR_2}{2}$; die Kurven werden erzeugt durch Rollen eines Kreises mit komplexem Radius auf einem festen mit rein imaginärem Radius; sie heißen Hypercykloiden[1]) und haben zur Gleichung

$$\left.\begin{aligned} x &= -2r_1 \cos\vartheta \operatorname{Cos}\mu\vartheta + 2r_2 \sin\vartheta \operatorname{Sin}\mu\vartheta \\ y &= -2r_1 \sin\vartheta \operatorname{Cos}\mu\vartheta - 2r_2 \cos\vartheta \operatorname{Sin}\mu\vartheta \end{aligned}\right\}, \text{ wobei } \mu = \frac{r_2}{r_1} \quad . \quad (9)$$

211. Die Pseudocykloiden erfreuen sich vieler Eigenschaften, die ähnlich denen der Epicykloiden, z. B. sind sie vermittelst elliptischer Integrale rektifizierbar[2]). Die Paracykloiden und Hypercykloiden besitzen jedoch noch weitere der Erwähnung werte Eigenschaften.

So erhält man aus den Gleichungen (8) und (9) als Ausdruck für den Bogen s und den Krümmungsradius $\mathfrak{R}$

$$s = \mp 2\frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2} \operatorname{Cos}\mu\vartheta, \qquad \mathfrak{R} = 2\frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1} \operatorname{Sin}\mu\vartheta.$$

Durch Elimination von ϑ ergiebt sich

$$\left(\frac{s}{r_2}\right)^2 - \left(\frac{\mathfrak{R}}{r_1}\right)^2 = \left(2\frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2}\right)^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

es ist dies die natürliche Gleichung der Paracykloiden sowohl wie der Hypercykloiden; sie sagt aus: **Rollt eine Para- oder Hypercykloide auf einer Geraden, so ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte für die aufeinander folgenden Berührungspunkte eine Hyperbel.** Vergleichen wir die Gleichung (10) mit der in Nr. **206** gefundenen natürlichen Gleichung der Epicykloiden, so können wir sagen: $\mathfrak{R}^2 = as^2 + bs + c$ **ist die natürliche Gleichung einer Epicykloide, wenn** $a < 0$, **dagegen die einer Para- oder Hypercykloide, wenn** $a > 0$[3]).

Noch eine weitere Folgerung verdient hervorgehoben zu werden. Es sei

$$\frac{\mathfrak{R}^2}{a^2} - \frac{s^2}{b^2} = 1$$

die natürliche Gleichung einer Para- oder Hypercykloide. Setzen wir, was ja gestattet ist,

$$\mathfrak{R} = a \sec\lambda, \qquad s = b \operatorname{tg}\lambda,$$

wo λ ein Parameter ist, und bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}_1$ und s_1 den Krümmungsradius und Bogen der Evolute, so finden wir durch An-

---

1) S. die vorhin citierten Aufsätze.

2) Um dies zu beweisen, kann man das S. 489 dargestellte Rechnungsverfahren anwenden.

3) E. Cesàro, *Sur deux classes remarquables des lignes planes* (Nouv. Ann. de Math. 3e Ser. VIII, 1888). Vgl. eine von demselben im *Intermédiaire* I, 1894 (S. 153) vorgelegte Frage und die Beantwortungen von C. Juel (II, S. 160), R. de Saussure (das. S. 356) und G. Tarry (das. S. 390). — In dem ausgeschlossenen Falle $a = 0$, bekommt man offenbar eine gewöhnliche Kreisevolvente.

wendung eines bekannten Verfahrens (vgl. Nr. **251**) für die Darstellung der Evolute die beiden Gleichungen

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{a^2}{b} \operatorname{tg} \lambda, \qquad s_1 = a \sec \lambda.$$

Wenn wir nun mit $\mathfrak{R}_2$ und s_2 die nämlichen Elemente der zweiten Evolute bezeichnen, so finden wir ähnlich

$$\mathfrak{R}_2 = \frac{a^3}{b^2} \sec \lambda, \qquad s_2 = \frac{a^2}{b} \operatorname{tg} \lambda;$$

durch Elimination von λ ergiebt sich als Gleichung der zweiten Evolute

$$\frac{\mathfrak{R}_2{}^2}{a^2} - \frac{s_2{}^2}{b^2} = \left(\frac{a^2}{b^2}\right)^2;$$

Daraus folgt: **So wie die gewöhnlichen Epicykloiden Kurven sind, die ihrer ersten Evolute ähnlich sind, so sind die Para- und Hypercykloiden Kurven, die ihrer zweiten Evolute ähnlich sind.** Somit erklärt es sich, dafs schon Euler auf diese Kurven traf im Verlauf seiner Untersuchungen über diejenigen Kurven beliebiger Ordnung, die ihrer Evolute ähnlich sind[1]).

Andere bemerkenswerte spezielle Pseudocykloiden entstehen, wenn man $R_2 = r_2$ oder $R_1 = r_1$ setzt. Im ersten Falle werden die Gleichungen (7)

$$x = 2(R_1 - r_1) \cos \vartheta \cdot \mathfrak{Cos}\, \mu\vartheta, \qquad y = 2(R_1 - r_1) \sin \vartheta\, \mathfrak{Cos}\, \mu\vartheta;$$

gehen wir zu Polarkoordinaten über, so erhalten wir

$$\varrho = 2(R_1 - r_1)\, \mathfrak{Cos}\, \mu\vartheta,$$

welches eine Summenspirale (Nr. **193**) darstellt. Im zweiten Falle ergeben dieselben Gleichungen (7)

$$x = 2(R_2 - r_2) \sin \vartheta\, \mathfrak{Sin}\, \mu\vartheta, \qquad y = -2(R_2 - r_2) \cos \vartheta\, \mathfrak{Sin}\, \mu\vartheta,$$

und gehen wir auch hier zu Polarkoordinaten über:

$$\varrho = 2(R_2 - r_2)\, \mathfrak{Sin}\, \mu\vartheta,$$

welches eine Differenzenspirale (Nr. **193**) darstellt. Somit haben wir zwei Erzeugungsweisen dieser Kurven. Bemerkt werden soll noch, dafs sie sich auch als Fufspunktkurve der Pseudocykloiden in Bezug auf den Mittelpunkt des festen Kreises ergeben; dies läfst sich durch ein ähnliches Verfahren nachweisen, wie das, durch welches wir dieselbe zwischen den Epicykloiden und Rhodoneen bestehende Beziehung (in Nr. **207**) nachgewiesen haben; ebenso möge nicht unerwähnt bleiben, dafs sie sich bei gewissen Problemen des Tautochronismus vorfinden[2]).

---

1) *Investigatio curvarum quae evolutae sui similes producunt* (Comm. Petrop. XII, 1750, S. 19—23) und *Investigatio curvarum, quae similes sunt suis evolutis vel primis vel secundis vel tertiis vel adeo ordinis cujuscunque* (Nova Acta Petrop. I, 1783, S. 97—106).

2) Puiseux, *Sur les courbes tautochrones* (Liouvilles Journ. IX, 1844).

Zum Schlusse führen wir an, dafs die Pseudocykloide diejenige Kurve ist, welche folgendes Problem löst: „Eine Kurve rotiert mit gleichförmiger Geschwindigkeit um eine zu ihr senkrechte Axe; auf ihr bewegt sich mit Berücksichtigung der Reibung ein Punkt infolge eines ursprünglich erhaltenen Antriebes; seine Bahn zu finden.“ Diese wird nämlich durch die beiden Gleichungen

$$x = \varrho e^{\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)t} \cos\left\{(\gamma - w)t - \chi\right\} + \varrho_1 e^{-\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)t} \cos\left\{(\gamma + w)t - \chi_1\right\},$$

$$y = \varrho e^{\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)t} \sin\left\{(\gamma - w)t - \chi\right\} - \varrho_1 e^{-\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)t} \sin\left\{(\gamma + w)t - \chi_1\right\},$$

dargestellt, wo t die unabhängige Variabele (die Zeit) darstellt. Es ist leicht nachzuweisen, dafs die fragliche Kurve auch erzeugt werden kann durch einen Punkt, der eine logarithmische Spirale durchläuft, während der Pol eine andere logarithmische Spirale beschreibt; diese neue Erzeugungsweise veranlafste Roth[1]), diese Kurve als Ephelix zu bezeichnen.

Elftes Kapitel.

Die Kurven von Delaunay und C. Sturm (Rollkurven der Ellipse).

212. Indem wir die geradlinige Basis mit dem Kreise vertauschten, kamen wir von den Cykloiden zu den Epi- und Hypocykloiden; nehmen wir an Stelle dessen eine andere Kurve und ersetzen zugleich den rollenden Kreis durch eine beliebige andere Kurve, so erhalten wir Kurven, die von den Franzosen und Engländern Rouletten genannt werden, und die wir Trochoiden, Radkurven oder Rollkurven nennen[2]). Die Betrachtung derselben geht bis in das 17. Jahrhundert zurück (vgl. die von Huygens für dieselben gegebene Konstruktion der Normalen auf S. 484); ihre methodische Untersuchung geschah jedoch erst im Anfange des folgenden Jahrhunderts, besonders durch La Hire[3]) und Nicole[4]). Man kann aufserdem annehmen, dafs die

---

1) *Ueber die Bahn eines freien Teilchens auf einer sich gleichmäfsig drehenden Scheibe* (Repertorium der Physik, XXIII, 1887).

2) Eine andere Verallgemeinerung der cyklischen Kurven, die wir nicht verfolgen werden, erhält man, wenn man mehrere Kreise betrachtet, von denen jeder auf dem vorigen rollt. So entstehen die höheren Epicykel, welche durch Littrow (*Disquisitiones ad theoriam epicyclorum pertinentes,* Mém. de St. Pétersbourg, 5. Ser. VII, 1820) und Raabe (*Allgemeine Theorie der Epicyklen,* Crelles Journ. I, 1826) erforscht wurden. Wenn man drei Drehungen hat, so heifsen die entstehenden Kurven nach Bellavitis (Atti dell' Ist. Veneto, 4. Ser. II, 1873) Epiepicykloide oder Hypoepicykloide.

3) *Traité des roulettes* (Mém. de l'Acad. des Sciences MDCCVI, Paris 1707).

4) *Méthode générale pour déterminer la nature des courbes formées par le*

rollende Kurve nicht einen Punkt, sondern eine andere Kurve mit sich führt, und dann die von dieser eingehüllte Kurve betrachten; letztere gehört einer noch umfangreicheren Kategorie von Kurven an, die von Besant[1]) als Enveloppe Roulettes bezeichnet wurden, und die wir mit dem Namen trochoidale Hüllkurven benennen wollen[2]). Die Theorie der Rollkurven und der trochoidalen Hüllkurven ist weniger das Studium einer speziellen Kurvenklasse als eine besondere Betrachtungsweise aller möglichen ebenen Kurven, indem La Hire den Nachweis geliefert hat, **dafs jede beliebige ebene Kurve als Roulette angesehen werden kann**: daher können und dürfen wir in einem Werke, welches, wie das vorliegende, denjenigen Kurven gewidmet ist, die sich in irgend einem Sinne von den allgemeinen Kurven unterscheiden, auf diese Theorie nicht eingehen. Wir empfehlen deshalb dem Leser andere Arbeiten[3]) und gehen zu der Bemerkung über, dafs von den speziellen Trochoiden zunächst diejenigen betrachtet wurden, die durch Rollen eines Kegelschnittes auf einer festen Geraden erzeugt werden; unter diesen wieder treten diejenigen hervor, die von einem Brennpunkte oder dem Mittelpunkte der rollenden Kurve beschrieben werden[4]).

Die Gelegenheit und die Veranlassung zur Untersuchung der ersteren ist in folgendem Satze von Delaunay zu suchen: „Um die Meridiankurve der Rotationsfläche, deren mittlere Krümmung konstant und gleich $\frac{1}{2a}$ ist, zu finden, genügt es, auf der Axe der Fläche eine Ellipse oder Hyperbel ohne Gleiten rollen zu lassen, deren Axe gleich $2a$ ist; jeder Brennpunkt des Kegelschnittes beschreibt die gesuchte Kurve[5])“. Wegen dieses Satzes ist die fragliche Linie nach einem

---

roulement de toute sorte de courbes sur une courbe quelconque (Mém. de l'Ac. des Sc. MDCCVII, Paris 1730); *Methode générale pour rectifier toutes les roulettes à base droite et circulaire* (Das. MDCCVIII, Paris 1730).

1) *Notes on Roulettes and Glisettes* (2. Aufl. Cambridge 1890) S. 33.

2) Zu dieser Klasse gehören insbesondere die von W. Merkelbach in seiner Dissertation, *Über Rollcurven, die von einer Geraden eingehüllt werden,* untersuchten Kurven (Marburg 1881).

3) Lamarle, *Exposé géométrique du Calcul differentiel et intégral,* 3. Teil, (Paris 1863) S. 218—229; Aoust, *Analyse infinitésimale des courbes planes* (Paris 1873); Onnen, *Note concernant la théorie des équations essentielles des courbes planes* (Archives néerlandaises, XIV, 1879), daselbst wird das Beiwort anticycloidal angewendet, um die beiden durch Rollen derselben Kurve auf den beiden entgegengesetzten Seiten derselben Basis erzeugten Kurven zu bezeichnen; E. Cesàro, *Lezioni di geometria intrinseca* (Napoli 1896) S. 65—77; aufserdem siehe die oben citierte Arbeit von Besant.

4) Bezügl. anderer Fälle s. Brocard, *Roulettes de coniques* (Nouv. corr. math. II, 1875, und III, 1876).

5) *Sur la surface de revolution dont la courbure moyenne est constante* (Liouvilles Journ. VI, 1841).

Vorschlage von P. Mansion[1]) mit dem Namen die Kurve von Delaunay belegt worden, welcher Name dem von Lindlöf[2]) angewandten, Kettenlinie (elliptische, hyperbolische, parabolische, je nach der Art der rollenden Kurve) vorgezogen wird. C. Sturm[3]) fand mit Anwendung der Variationsrechnung die Differenzialgleichung der Kurve von Delaunay als

$$y^2 \pm 2ay\frac{dx}{ds} \pm b^2 = 0, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

oder auch

$$dx = \frac{y^2 \pm b^2}{\sqrt{4a^2y^2 - (y^2 \pm b^2)^2}} \cdot dy \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Um zu beweisen, dafs diese der angegebenen Rollkurve angehört, betrachten wir eine Ellipse mit den Axen $2a$ und $2b$, die ohne Gleiten auf der x-Axe rollt (Taf. XV, Fig. 123). Ihr Brennpunkt F wird dann eine Kurve beschreiben, die (infolge des Huygens'schen Satzes, s. Nr. **205**) als Normale die Verbindungslinie von F mit dem entsprechenden Berührungspunkte K der Ellipse mit der Grundlinie hat. Es seien $OP = x$, $PF = y$ die Koordinaten von F; wir haben dann offenbar

$$y = FK \cdot \sin FKP.$$

Nun ist FKP das Komplement des Winkels, den die in F die Delaunay'sche Kurve berührende Gerade FT mit Ox bildet; demnach ist

$$\sin FKP = \cos FTK = \frac{dx}{ds};$$

und also

$$y = FK \cdot \frac{dx}{ds}.$$

Betrachten wir auch den anderen Brennpunkt F' mit den Koordinaten $OP' = x'$, $P'F' = y'$. Da die Winkel FKP und $F'KP'$ gleich sind, so findet man ebenso

$$y' = F'K \cdot \frac{dx}{ds}.$$

Nun beachten wir, dafs

$$FK + F'K = 2a, \quad y \cdot y' = b^2;$$

man kann nun FK, $F'K$ und y' eliminieren und findet so

$$y^2 - 2ay\frac{dx}{ds} + b^2 = 0$$

als Differenzialgleichung der vom Brennpunkte F beschriebenen Kurve. Wechseln wir nun das Vorzeichen des zweiten Gliedes, so bekommen wir eine Gleichung, die der von F' beschriebenen Kurve angehört; da die gefundenen Gleichungen mit (1) übereinstimmen, so ist die Be-

---

1) Habich, *Sur une question de roulettes* (Mathésis VI, 1880).

2) *Théorie des surfaces de révolution à courbure moyenne constante* (Mém. de la Soc. des Sciences de Finlande, 1863).

3) *Note à l'occasion de l'article précédent* (von Delaunay) (Liouvilles Journ. VI, 1841).

hauptung bewiesen. Ändert man das Vorzeichen von b^2, so verwandelt sich (1) in die Differenzialgleichung der ähnlich durch Rollen einer Hyperbel erzeugten Kurve. — Wir überlassen es dem Leser in ähnlicher Weise zu zeigen, daſs wenn die rollende Kurve eine Parabel ist, ihr Brennpunkt eine Kurve beschreibt, deren Differenzialgleichung

$$dx = a \frac{dy}{\sqrt{y^2 - a^2}} \text{ ist; integriert ergiebt sie } y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

die (wie wir später in Nr. **234** sehen werden) eine Kettenlinie darstellt.

Bevor wir uns mit der Gl. (1) näher beschäftigen, wollen wir noch die vom Centrum G der rollenden Ellipse erzeugte Kurve aufsuchen. Wir ziehen deshalb (Fig. 123) den Halbmesser GI parallel zur x-Axe und verbinden G mit K. Die Sätze von Apollonius liefern dann:

$$\overline{GI}^2 + \overline{GK}^2 = a^2 + b^2, \qquad GI \cdot GK \sin GIK = ab;$$

und wenn wir nun die Koordinaten von G, $OH = x$, $HG = y$ einführen, so haben wir

$$\sin IGK = \sin GKH = \frac{dx}{ds}, \qquad y = GH = GK \cdot \sin IGK,$$

daher

$$\overline{GI}^2 + \left(y\frac{ds}{dx}\right)^2 = a^2 + b^2, \qquad GI \cdot y = ab;$$

durch Elimination von GI aus diesen beiden ergiebt sich

$$\frac{a^2 b^2}{y^2} + y^2\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = a^2 + b^2,$$

oder auch

$$dx = \frac{y^2 \cdot dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)(y^2 - b^2)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Dies ist die Differenzialgleichung des Ortes des Punktes G; diesen könnte man — dem groſsen Geometer zu Ehren, der ihn zuerst betrachtet hat — die Sturm'sche Kurve nennen.

Wir kehren zu den Gleichungen (1) und (2) zurück, indem wir sie folgendermaſsen schreiben:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^2 + b^2}{\sqrt{4a^2y^2 - (y^2 + b^2)^2}}, \qquad \frac{ds}{dy} = \frac{2ay}{\sqrt{4a^2y^2 - (y^2 + b^2)^2}}.$$

Die zweite ist leicht zu integrieren und giebt

$$y^2 = a^2\left[1 + e^2 + 2e \sin\frac{s - s_0}{a}\right], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

wo s_0 die Integrationskonstante und $e = \frac{a^2 \mp b^2}{a}$ die Excentrizität ist. Nehmen wir, was jetzt gestattet ist, $s_0 = \frac{1}{2}\pi a$, so haben wir noch einfacher

$$y^2 = a^2\left[1 - 2e \cos\frac{s}{a} + e^2\right] \cdot {}^{1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4')$$

---

1) Spitzer, *Merkwürdige Eigenschaften derjenigen Curve, welche vom Brennpunkte einer Ellipse beschrieben wird, wenn diese auf einer Geraden rollt* (Archiv der Math. XLVIII, 1868).

Nennen wir nun R den Krümmungsradius der Delaunay'schen Kurve, so finden wir ohne Schwierigkeit

$$R = \frac{2ay^2}{y^2 - b^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

eine Relation, die es gestattet y aus (4') zu eliminieren: man findet so

$$R = a \frac{1 - 2e\cos\frac{s}{a} + e^2}{e\left(e - \cos\frac{s}{a}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

als natürliche Gleichung der Delaunay'schen Kurve[1]).

Wenn N die Länge der Normale der hier untersuchten Kurve ist, so finden wir durch Anwendung der bereits aufgestellten Gleichungen

$$N = y\frac{ds}{dx} = y\frac{ds}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{2ay^2}{y^2 + b^2};$$

eliminiert man y aus dieser und aus Gleichung (5), so bekommt man

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{N}\right) = \frac{a}{2};$$

folglich: **Bei der Delaunay'schen Kurve ist das harmonische Mittel zwischen dem Krümmungsradius und der Normale konstant.**

Die Gleichung (6) zeigt, dafs, wenn $e < 1$, also die rollende Kurve eine Ellipse ist, die Delaunay'sche Kurve unendlich viele Wendepunkte hat, nämlich alle diejenigen, für welche $s = a \arccos e$ ist, sie ist von ähnlicher Gestalt wie die verkürzte Cykloide. Wenn hingegen $e > 1$, also die rollende Kurve eine Hyperbel, so hat die erzeugte Kurve keine Wendepunkte, besitzt aber unendlich viele Doppelpunkte; sie ist von ähnlicher Gestalt wie die verlängerte Cykloide.

Von den nunmehr naturgemäfs folgenden Fällen, dafs eine Ellipse auf einem Kreise, einer anderen Ellipse, einer Hyperbel oder Parabel rollt, ist der Fall besonders bemerkenswert, dafs eine Ellipse auf einer ihr kongruenten Ellipse rollt. Es ist klar, dafs nach einer vollen Umwälzung die bewegte Ellipse und jeder mit ihr fest verbundene Punkt wieder die ursprüngliche Lage einnimmt, und daher sind die entstehenden Rollkurven geschlossene Linien. In Bezug auf ihre Gestalt unterscheiden sie sich nicht sonderlich von den Taf. IV, Fig. 28 *a*, *b*, *c* dargestellten Epicykloiden, sind aber, wie C. Schwering[2]) nachgewiesen hat, mit alleiniger Ausnahme des Falles, dafs zu Anfang der Bewegung die Scheitelpunkte der grofsen Axen einander berühren, transscendente Kurven. Dies ist um so mehr bemerkenswert, als vielfach die Ansicht herrscht — und alle bisherigen Beispiele scheinen sie zu bestätigen — dafs die transscendenten Kurven

1) Cesàro, die o. a. *Lezioni,* S. 70.

2) *Über eine Gattung transscendenter Kurven, welche geschlossen sind* (Zeitschrift f. Math. XX, 1875).

nichtgeschlossene Kurven seien. Obiges Beispiel zeigt aber: **Es existieren transscendente Kurven, die in sich geschlossen sind.**

213. In der allgemeinen Definition der Rollkurven treten drei Kurven auf: die Basis, die bewegte Kurve und die erzeugte Rollkurve; nimmt man die beiden ersteren als gegeben an, so bildet die Aufsuchung der dritten das Problem der Trochoiden; nimmt man hingegen die dritte als gegeben an (und man kann infolge des zu Anfang von Nr. 212 citierten La Hire'schen Satzes eine ganz beliebige Kurve als solche nehmen), so würden die beiden ersten aufzufinden sein: es entsteht dann das umgekehrte Problem der Trochoiden. Bei der Lösung solcher Probleme trifft man zuweilen auf schon bekannte Kurven, häufiger jedoch gelangt man zu neuen Kurven, wie folgende Sätze zeigen: 1) Die Linie, auf der man eine Ellipse rollen lassen mufs, damit ein fest mit ihr verbundener Punkt eine Gerade beschreibe, ist eine Delaunay'sche Kurve[1]). 2) Die Kurve, die man auf einer Geraden rollen lassen mufs, damit ein mit ihr verbundener Punkt einen Kreis beschreibe, hat in Polarkoordinaten die Differenzialgleichung

$$\frac{\varrho \cdot d\omega}{d\varrho} = \frac{b}{\sqrt{(a-\varrho)^2 - b^2}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

deren Integration vollständig ausführbar ist[2]). 3) Die Kurve, auf welcher man eine Ellipse mit den Axen $2a$ und $2b$ rollen lassen mufs, damit ihr Mittelpunkt eine Gerade beschreibe, wird durch die Gleichung

$$y = a\, dn \frac{x}{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

dargestellt[3]). 4) Das analoge Problem für die Hyperbel wird gelöst durch die Kurve

$$a = y\, cn \frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Auf die ähnlichen durch die Gleichungen

$$y = b\, sn \frac{x}{a}, \qquad \varrho\, cn\, \omega = Const.$$

dargestellten Kurven trifft man bei Fragen aus der Mechanik, die vorletzte wird von den Franzosen courbe à sauter (Seilspringerkurve) genannt, da sie die Gestalt eines schweren, homogenen, biegsamen, aber nicht dehnbaren Fadens wiedergiebt, wenn man denselben um eine horizontale Axe rotieren läfst[4]).

---

1) M. s. den in vor. Nr. citierten Habich'schen Aufsatz.

2) Koenigs, *Leçons de cinématique* (Paris 1897) S. 170—71. Führt man die Integration aus, so erhält man:

wenn $a < b$, $\varrho = \dfrac{a^2 - b^2}{a + b \cos \frac{\sqrt{b^2 - a^2}\,\omega}{b}}$ (vgl. S. 354);

wenn $a = b$, $\varrho = \dfrac{2a}{1 - \omega^2}$ (vgl. S. 446);

wenn $a > b$, $\varrho = \dfrac{a^2 - b^2}{a + b\, \mathfrak{Cos} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}\,\omega}{b}}$.

3) Greenhill, *The applications of elliptic functions* (London 1892) S. 71—73.

4) Appell et Lacour, *Principes de la théorie des fonctions elliptiques* (Paris 1897) S. 188.

Zwölftes Kapitel.

Syntrepente und isotrepente Kurven.

214. Kinematische Methoden, die uns zu den meisten der in den vorigen Kapiteln untersuchten Kurven führten, bilden auch die Grundlage des Begriffes weiterer Kurven: mit der Betrachtung derjenigen unter ihnen, die durch einen fest mit einer Kurve verbundenen Punkt erzeugt werden, indem die Kurve sich parallel zu sich selbst und immer eine feste Kurve berührend bewegt (die sog. Reptorien Joh. Bernoulli's[1]), wollen wir uns nicht aufhalten, da sie von einer Allgemeinheit sind, die mit der der Olistoiden (Nr. **103**) und der Trochoiden (Nr. **212**) vergleichbar ist. Wir werden uns daher mit anderen spezielleren beschäftigen, zu denen uns folgende Betrachtungen führen.

Wenn zwei materielle, in einer Ebene liegende, um ihren Mittelpunkt drehbare Kreise derart mit einander verbunden sind, dafs die Distanz k ihrer Mittelpunkte gleich der Summe $r + r'$ ihrer Radien ist, so können sie sich drehen, ohne dafs der Umfang des einen auf dem des anderen zu gleiten braucht. Diese Idee verallgemeinern wir und nennen zwei Kurven Γ und Γ' syntrepent[2]) (von *συν-τρέπειν*, zugleich drehen), wenn sie sich um die beiden in ihrer Ebene liegenden Punkte O und O' zugleich drehen können, ohne ihre gegenseitige Berührung aufzuheben, und ohne dafs die eine auf der anderen gleitet. Daraus ergiebt sich, dafs die in derselben Zeit den gemeinsamen Berührungspunkt C (der zwar variabel ist, aber immer auf der Geraden OO' verbleibt) durchlaufenden Kurvenbogen CM und CM' gleich sind. Praktische Anwendung finden syntrepente Kurven im Maschinenbau bei der Herstellung der sogenannten „unrunden“ Räder, z. B. der quadratischen, polygonalen, elliptischen Räder, der excentrischen Kreisräder, Spiralrollen u. s. w., wenn es sich darum handelt, die gleichförmige Rotation in eine ungleichförmige zu verwandeln. Beispielsweise sind zwei kongruente Ellipsen, die eine solche Anfangslage haben, dafs die grofse Axe AC der einen die Verlängerung der anderen bildet, und sie um die beiden entsprechenden Brennpunkte O und O' drehbar sind (deren Entfernung gleich jener Axe ist) isotrepent. Denn sind P und P' die beiden anderen Brennpunkte und M und M' zwei

---

1) S. die Abhandlung *Motus reptorius, ejusque insignis usus, pro lineis curvis in unam omnibus aequalem colligendis, vel a se mutuo subtrahendis; atque hinc deducta problematis de transformatione curvarum in Diario Gallico Paris, 12. Febr. 1702 propositi genuina solutio* (Acta Erud. Aug. 1705; Joh. Bernoulli opera I, S. 408); aufserdem Sacchi, *Sulla geometria analitica delle curve piane* (Pavia 1854) S. 106—108.

2) A. Miquel, *Sur quelques questions rélatives à la theorie des courbes* (Liouvilles Journ. III, 1838).

Punkte derart, dafs die Bogen CM und CM' gleich sind, so ist $OM + O'M' = OM + PM = AC$. Folglich bleiben die beiden Ellipsen bei der Drehung um O und O' immer in Berührung, ohne dabei zu gleiten. Im allgemeinen Falle: wenn Γ und Γ' zwei syntrepente Kurven sind (Taf. XV, Fig. 124) und M, M' zwei entsprechende Punkte derselben, so mufs die Summe $OM + O'M'$ der beiden Radienvectoren immer konstant $= OO' = k$ sein; aufserdem müssen die Winkel dieser Radienvectoren mit den zugehörenden Tangenten gleich sein, weil bei der Berührung der Kurven die beiden Radien sowohl als auch die Tangenten in eine Gerade zusammenfallen. Beziehen wir daher Γ und Γ' auf zwei Polarkoordinatensysteme mit O und O' als Polen und OO' als gemeinsamer Polaraxe, so haben wir

$$\varrho + \varrho' = k, \qquad \varrho \frac{d\omega}{d\varrho} = \varrho' \frac{d\omega'}{d\varrho'} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Nehmen wir nun an, dafs $\omega = \psi(\varrho)$ und $\omega' = \varphi(\varrho')$ die Gleichungen von Γ und Γ' seien, so wird die zweite der obigen Gleichungen zu

$$\varrho \cdot \psi'(\varrho) = \varrho' \cdot \varphi'(\varrho'),$$

oder wenn wir sie mit der ersten kombinieren

$$\varrho \cdot \psi'(\varrho) = (k - \varrho) \cdot \varphi'(k - \varrho) . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Nehmen wir jetzt die Funktion φ als gegeben an, so wird ψ durch eine Integration zu bestimmen sein, nämlich durch

$$\psi(\varrho) = \int \frac{(k - \varrho) \cdot \varphi'(k - \varrho)}{\varrho} \cdot d\varrho; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

es ist zu bemerken, dafs die Integrationskonstante nur Einflufs auf die Lage, nicht auf die Natur der Kurve Γ hat.

Nehmen wir als Beispiel für Γ' die Ellipse

$$\varrho = \frac{b^2}{a - c\cos\omega} \qquad \left(c = \sqrt{a^2 - b^2}\right)$$

oder

$$\omega = \arccos \frac{a\varrho - b^2}{c\varrho};$$

dann wird die Gleichung (3) zu

$$\psi(\varrho) = -b \int \frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{c^2 - (a-k)^2 + 2(a-k)\varrho - \varrho^2}}$$

$$= \frac{b}{\sqrt{(a-k)^2 - c^2}} \arccos \frac{(a-k)\varrho - b^2}{c\varrho}.$$

Schreiben wir diese in folgender Weise:

$$\varrho = \frac{\dfrac{b^2}{a-k}}{1 + \dfrac{c}{a-k}\cos\dfrac{\sqrt{(a-k)^2 - c^2}}{b} \cdot \omega}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

so sehen wir, dafs die entsprechende Kurve, wenn $k = 2a$, eine der gegebenen kongruente Ellipse ist (vgl. das oben angewandte Beispiel).

Im übrigen ist sie algebraisch oder transscendent, jenachdem der Wert $\frac{\sqrt{(a-k)^2-c^2}}{b}$ rational ist oder nicht; ist dieser Wert eine ganze Zahl (n), so ist sie eine Kurve mit n Bäuchen (s. S. 354).

Wir kehren zu den allgemeinen Betrachtungen zurück und fragen, ob es — aufser der Ellipse und dem Kreise — noch weitere Kurven giebt, die zu sich selber syntrepent sind, in welchem Falle wir sie isotrepent nennen wollen. Um zu untersuchen, ob es deren giebt, bedienen wir uns der Gleichung (2), indem wir φ an stelle von ψ setzen; sie wird dann

$$\varrho\cdot\varphi'(\varrho)=(k-\varrho)\cdot\varphi'(k-\varrho);$$

daraus ergiebt sich, wenn wir $f(\varrho)=\varrho\cdot\varphi(\varrho)$ setzen,

$$f(\varrho)=f(k-\varrho),$$

wo f eine symmetrische Funktion von ϱ und $k-\varrho$ ist. Bezeichnen wir sie mit $F(\varrho, k-\varrho)$, so haben wir

$$\varrho\cdot\varphi'(\varrho)=F(\varrho, k-\varrho),$$

und daher ist

$$\varphi(\varrho)=\int\frac{F(\varrho, k-\varrho)}{\varrho}d\varrho.$$

Dies beweist, dafs die Gleichung

$$\omega=\int\frac{F(\varrho, k-\varrho)}{\varrho}d\varrho, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

wo F eine symmetrische Funktion von ϱ und $k-\varrho$ ist, die allgemeine analytische Darstellung der isotrepenten Kurven liefert. — Im einfachsten Falle $F=k$ wird die Gleichung (5) zu

$$\omega=k\int\frac{d\varrho}{\varrho}, \quad \text{integriert} \quad \varrho=e^{\frac{\omega+\alpha}{k}},$$

welches die Gleichung der logarithmischen Spirale ist; damit ist zugleich ein neuer Fall der Erzeugung dieser interessanten Kurve gefunden.

Dreizehntes Kapitel.

Die Debeaune'schen Kurven.

215. „Gegeben eine Strecke n sowie zwei Geraden GD und FE, die miteinander einen Winkel $\lambda=\frac{\pi}{4}$ bilden (Taf. XV, Fig. 125); eine Kurve AB zu bestimmen derart, dafs, wenn man in einem beliebigen Punkte B die Tangente zieht, die GD in L schneidet, und dann auf GD das Lot BC fällt, welches FE in I schneidet, man immer hat

$$\frac{BC}{CL}=\frac{n}{BI}.\text{“} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Diese Aufgabe wurde von Debeaune[1]) dem Descartes vorgelegt, und dieser hat sie in einem seiner Briefe überliefert[2]); dies ist wohl die erste Aufgabe, die dahin zielt, eine Kurve zu finden, die als Tangenten Geraden hat, die einer bestimmten allgemeinen Bedingung genügen sollen; daher besitzt sie ein nicht gewöhnliches historisches Interesse, indem sie den Beginn des sogenannten „calculus tangentium inversus" bezeichnet.

Um die Gleichung der gewünschten Linien (die man mit Recht Debeaune'sche Kurven nennen darf[3])) zu finden, nehmen wir ein rechtwinkliges kartesisches System, dessen x-Axe die Gerade GD, und dessen Anfang ihr Schnitt O mit EF ist. Dann wird — wenn wir den Winkel λ vorläufig beliebig nehmen — die Gleichung der Geraden EF lauten

$$y - x \operatorname{tg} \lambda = 0,$$

und die Gleichung (1) wird dann gleichbedeutend mit folgender

$$\frac{y}{y\frac{dx}{dy}} = \frac{n}{y - x \operatorname{tg} \lambda},$$

die wir alsdann so schreiben:

$$\frac{dx}{dy} + \frac{\operatorname{tg} \lambda}{n} = \frac{y}{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Betrachten wir y als Funktion von x, so sehen wir, dafs diese eine lineare Differenzialgleichung ist, deren allgemeines Integral lautet

$$x = e^{-\frac{y \operatorname{tg} \lambda}{n}} \left(\int \frac{y}{n} e^{-\frac{y \operatorname{tg} \lambda}{n}} \cdot dy + c \right);$$

die teilweise Integration zeigt uns aber, dafs

$$\int \frac{x}{n} e^{-\frac{y \operatorname{tg} \lambda}{n}} \cdot dy = \frac{1}{\operatorname{tg} \lambda} y e^{\frac{\operatorname{tg} \lambda}{n}} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \lambda} e^{\frac{\operatorname{tg} \lambda}{n} y}$$

und daher

$$x = \frac{y}{\operatorname{tg} \lambda} - \frac{n}{\operatorname{tg}^2 \lambda} + c e^{-\frac{y \operatorname{tg} \lambda}{n}} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Dies ist die allgemeine Gleichung der Debeaune'schen Kurven, in dem speziellen Falle $\lambda = \frac{\pi}{4}$ vereinfacht sie sich und wird

$$x = y - n + c e^{-\frac{y}{n}}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3')$$

---

1) Wir schreiben dem P. Tannery folgend (Bibl. math. 3. Reihe, II, 1901, S. 149) Debeaune, statt, wie man gewöhnlich thut, De Beaune.

2) Brief an Debeaune vom 20. Febr. 1639 (*Oeuvres de Descartes,* ed. Adam et Tannery, II, Paris 1898, S. 510—519.

3) Courbe Beauniene schreibt Saverien S. 241 des I. Bd. seines *Dictionnaire universel de mathématique et de physique* (Paris 1753).

in jedem Falle sind die Debeaune'schen Kurven transscendent. Die Gl. (2) zeigt, daſs die Tangente im Punkte (x, y) die Gleichung hat

$$n(X - x) = (Y - y)(y - x \operatorname{tg} \lambda),$$

und hieraus folgt, wenn man X und Y als gegeben ansieht: **Die Berührungspunkte der Tangenten, die man von einem beliebigen Punkte ihrer Ebene an eine Debeaune'sche Kurve ziehen kann, liegen auf einer durch jenen Punkt gehenden Hyperbel;** dies zeigt somit: **Jede Debeaune'sche Kurve gehört einem System mit den Charakteristiken $\mu = \nu = 1$ an.**

An der Lösung der Debeaune'schen Aufgabe versuchte sich auch, und zwar nicht vergebens, Leibniz[1]); die von ihm gefundene Lösung veröffentlichte er jedoch nicht, sondern überlieſs dem Marquis de l'Hôpital das Vergnügen, sie zuerst der Allgemeinheit durch das *Journal des Savants* mitzuteilen[2]). Der französische Geometer fand auch eine Asymptote der lösenden Kurve, die parallel der Geraden EF läuft; in der That hat die Kurve (3) als Asymptote die Gerade, deren Gleichung

$$x = \frac{y}{\operatorname{tg} \lambda} - \frac{n}{\operatorname{tg}^2 \lambda}$$

ist; für die Kurve (3') hingegen ist Asymptote die Gerade

$$x = y - n,$$

die thatsächlich parallel zur Geraden EF ist. Derselbe Geometer löste auch Probleme, die die Quadratur der Kurve und die Kubatur der durch ihre Rotation um die x-Axe entstehenden Volumina betreffen; er bemerkte ebenfalls, daſs ihre Konstruktion sich unmittelbar ergiebt, wenn die (logarithmische, s. Nr. **224**) durch die Gleichung $x = ce^{-\frac{y \operatorname{tg} \lambda}{n}}$ dargestellte Kurve konstruiert vorliegt. Über die Rektifikation sagt er: „mais comme on a besoin d'une adresse particulière pour rectifier cette courbe, en supposant la quadrature de l'hyperbole, je propose ce problème aux géomètres en leur assurant qu'il mérite leur recherche"; ob diese Ermunterung den gewünschten Erfolg gehabt, wissen wir nicht, gewiſs ist aber, daſs die angegebene Frage heutigen Tages keine Schwierigkeit mehr bietet; da nämlich

---

1) „Hanc curvam — schreibt er am 27. Aug. 1676 an Oldenburg — nec Cartesius nec Beaunius nec quisquam alius (quoad sciam) invenit. Ego vero qua primum die, imo hora, coepi quaerere, statim certa Analysi solvi" (*Leibniz*, ed. Gerhardt, I, S. 121). Die Methode, auf welche Leibniz anspielt, ergiebt sich aus dem, was er an G. Manfredi unterm 10. Aug. 1708 über die Integration der linearen Differenzialgleichungen schrieb (vgl. G. Loria, *Abhandl. zur Geschichte der Math.* IX, 1899, S. 274).

2) Vgl. den Brief von de l'Hôpital an Leibniz vom 26. Apr. 1693 (*Leibniz*, ed. Gerhardt, II, S. 234).

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \lambda} - \frac{2c}{n} e^{-\frac{y \operatorname{tg} \lambda}{n}} + \frac{c^2 \operatorname{tg}^2 \lambda}{n^2} e^{-\frac{2y \operatorname{tg} \lambda}{n}}},$$

so genügt es $e^{-\frac{y \operatorname{tg} \lambda}{n}} = \eta$ zu setzen, um für ds einen Ausdruck von der Form $\frac{\sqrt{a + b\eta + c\eta^2}}{\eta} \cdot d\eta$ zu erhalten, der leicht integrierbar ist.

216. In späterer Zeit hat sich auch Joh. Bernoulli verschiedentlich mit der Debeaune'schen Aufgabe befaſst[1]). Sein Bruder Jakob verallgemeinerte sie auſserordentlich, indem er ihr folgenden Ausdruck gab: „Gegeben eine beliebige Kurve; eine zweite zu finden derart, daſs die Ordinate eines beliebigen ihrer Punkte zur Subtangente in demselben Verhältnisse stehe, wie eine gegebene Konstante n zur Summe oder Differenz der Ordinaten der gegebenen und der gesuchten Kurve; oder auch, daſs das erstere Verhältnis gleich dem reziproken des zweiten sei"[2]). Diese Probleme übertragen sich — wenn $y = f(x)$ die Gleichung der gegebenen Kurve ist — in die beiden Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n}{f(x) \pm y}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f(x) \pm y}{n}, \quad \ldots \quad (4)$$

die erste[3]) gehört einem Typus an, den man nicht in geschlossener Form integrieren kann, es sei denn, daſs f eine lineare Funktion von y ist, in welchem Falle man auf die ursprüngliche Debeaune'sche Aufgabe zurückkommt; die zweite ist, wenn man x als Funktion von y auffaſst, eine lineare Differenzialgleichung, die integriert ergiebt:

$$xye^{\pm\frac{x}{n}} + \int e^{\pm\frac{x}{n}} f(x) \cdot dx + c = 0,$$

wo die Integrierung je nach der Natur der Funktion $f(x)$ ausführbar ist oder nicht[4]).

Eine andere Verallgemeinerung desselben Problems[5]) führt zu der Differenzialgleichung
$$\frac{y}{y\frac{dx}{dy}} = \frac{n}{F(y - x \operatorname{tg} \lambda)},$$

---

1) S. die unter Beihilfe des Marquis de l'Hôpital gefertigte Abhandlung, *Solution du problème que Monsieur de Beaune proposa autrefois à M. des Cartes et que l'on trouve dans la 79e de ses lettres* (Journal des Savants, 1692; *Joh. Bernoulli Opera* I, S. 62—63), auſserdem *Solutio problematis Cartesio propositi a Dno De Beaune* (Acta erud. Mai 1693; Opera I, S. 65—66), *Demonstratio analytica et synthetica suae constructionis curvae Beaunianae* (Acta erud. Febr. 1696; Opera I, S. 145—148) und die XI. der *Lectiones mathematicae* (Opera I, S. 423).

2) *Problema Beauniani universalius conceptum* (Acta erud. Juli 1696; *Jacobi Bernoulli opera* II, S. 731—799).

3) Vgl. E. Collignon, *Problèmes divers sur la méthode inverse des tangentes* Nouv. Ann., 3. Ser. XVIII, 1899 und XIX, 1900).

4) Ausführbar ist sie z. B., wenn $f(x)$ ein ganzes Polynom in x ist, oder gleich $e^{\alpha x}$ u. s. w. ist.

5) S. Riccati und H. Saladini, *Institutiones analyticae* II. (Bononiae 1767) S. 500.

wo F eine gegebene Funktion ist. Setzt man $y - x\,\mathrm{tg}\,\lambda = z$, so wird sie

$$\mathrm{tg}\,\lambda + \frac{dz}{dx} = \frac{n}{F(z)},$$

und giebt

$$x = \int \frac{dz}{\frac{n}{F(z)} - \mathrm{tg}\,\lambda}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

womit das Problem auf eine Integration zurückgeführt ist.

Die o. a. Forschungen Johann Bernoulli's führten ihn zur Formulierung eines anderen Problems, das er den Mathematikern seiner Zeit vorlegte[1]). Es ist folgendes: „Eine Kurve aufzufinden, deren Subtangente in einem gegebenen Verhältnisse m zur Tangente steht.“ Es übersetzt sich in folgende Differenzialgleichung

$$x \cdot dy - y \cdot dx = my\sqrt{dx^2 + dy^2}; \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

da diese homogen ist, so ist ihre Integration auf Quadraturen zurückführbar, die auch in jedem Falle ausführbar sind. Die bezügliche Rechnung ist wegen der auftretenden Wurzelausdrücke umständlich; um jene zu vermeiden, hat Hermann einen Kunstgriff erdacht, der nicht ohne Interesse ist[2]); er schlug vor, zu setzen

$$y = \xi^2 - \eta^2, \ldots (6) \qquad -y\frac{dx}{dy} = 2\xi\eta, \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

wo ξ und η zwei neue Variabelen bedeuten; setzen wir diese Werte in (5) ein, so erhalten wir

$$x = m(\xi^2 + \eta^2) - 2\xi\eta. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Infolge der Gleichungen (6) und (8) wird Gleichung (7)

$$\frac{\xi \cdot d\xi - \eta \cdot d\eta}{\xi^2 - \eta^2} + \frac{m(\xi \cdot d\xi + \eta \cdot d\eta) - (\xi \cdot d\eta + \eta \cdot d\xi)}{2\xi\eta} = 0,$$

oder auch

$$\frac{\eta \cdot d\xi - \xi \cdot d\eta}{\xi^2 - \eta^2} = m\frac{\xi \cdot d\xi + \eta \cdot d\eta}{\xi^2 + \eta^2},$$

oder

$$\frac{d\xi - d\eta}{\xi - \eta} - \frac{d\xi + d\eta}{\xi + \eta} = m\frac{2(\xi \cdot d\xi + \eta \cdot d\eta)}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Die Integration ist ausführbar, und man findet

$$\frac{\xi - \eta}{\xi + \eta} = \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{a}\right)^m, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

wo a die Integrationskonstante ist. Die kartesische Gleichung der Kurve ist nichts anderes als das Resultat der Elimination von ξ und η

1) *Problema ab eruditis solvendum* (Acta erud. Mai 1693). Einige Lösungen desselben s. in dem Artikel *Ad problema in Actis Eruditorum an. 1693 mense Majo propositum* (*Leibniz,* ed. Gerhardt, V, S. 288—294). M. s. auch de l'Hôpital, *Solution d'un problème de géometrie que l'on a proposé depuis peu dans le Journal de Leipsic* (Mém. de Paris X, 1866—1899).

2) Brief an Leibniz vom 28. Okt. 1705 (*Leibniz,* ed. Gerhardt, IV, S. 286—7).

aus den Gleichungen (6), (8), (9). Setzt man z. B. $m = 1$, so werden die Gleichungen

$$y = (\xi + \eta)(\xi - \eta), \qquad x = (\xi - \eta)^2, \qquad \frac{\xi - \eta}{\xi + \eta} = \frac{\xi^2 + \eta^2}{a};$$

aus diesen folgt dann

$$\frac{x}{y} = \frac{\xi^2 + \eta^2}{a}, \qquad y = \xi^2 - \eta^2,$$

daher ist
$$\xi = \sqrt{\frac{ax^2 + y^2}{2y}}, \qquad \eta = \sqrt{\frac{ax - y^2}{2y}}.$$

Da nun $\xi - \eta = \sqrt{x}$, so folgt, dafs

$$\sqrt{ax + y^2} - \sqrt{ax - y^2} = \sqrt{2xy}$$

die Gleichung der gesuchten Kurve ist; macht man rational, so wird sie

$$y(x^2 + y^2) = 2ax^2,$$

welches eine Cissoide des Diokles darstellt (Nr. **24**).

Die hier erhaltenen Kurven sind, ebenso wie die Debeaune'schen, die Integrale von Differentialgleichungen erster Ordnung; von diesem Gesichtspunkte aus stehen sie anderen, die durch Eigenschaft ihres Bogens definiert werden, nahe[1]); bei diesen werden wir jedoch nicht verweilen, da sie wichtiger geometrischer Eigenschaften entbehren, und wenden uns zu anderen, in deren Definition das Krümmungsmafs eintritt.

Vierzehntes Kapitel.

Die Ribaucour'schen Kurven.

217. Dem Johann Bernoulli verdanken wir die Stellung und erste Lösung einer anderen wichtigen Aufgabe, nämlich folgender: „Über einer gegebenen Geraden AG als Axe und durch den Punkt A eine Kurve zu ziehen von der Beschaffenheit, dafs der Krümmungsradius in einem beliebigen Punkte B von der Axe in einem gegebenen Verhältnisse geteilt wird, sowie die orthogonalen Trajektorien der obiger Bedingung entsprechenden Kurven zu bestimmen"[2]). Von Leibniz alsdann den englischen Mathematikern vorgelegt, zog sie die

---

1) S. unter anderen folgende Abhandlungen: N. Fufs, *Exercitatio analytico-geometrica circa lineam curvam singulari proprietate praeditam* (Acta Petrop. pro anno MDCCLXXX Pars II, 1784) und *Disquisitio analytico-geometrica de variis speciebus linearum curvarum singulari proprietate praeditarum* (Das. pro anno MDCCLXXXI, Pars I, 1784); A. Valde, *Ueber die Curven, deren Bogen der Tangente des Leitstrahlwinkels proportional ist, und die damit verwandten Curvenclassen* (Archiv 2. Ser. XIV, 1895).

2) S. den Brief an Leibniz vom 11. März 1716 (*Leibniz*, ed. Gerhardt, III, S. 958).

Aufmerksamkeit vieler Gelehrten auf sich, besonders in Hinsicht auf die orthogonalen Trajektorien[1]); heute ist sie eines der klassischen Beispiele in den Lehrbüchern über Differenzialgleichungen für deren Anwendungen auf die Geometrie. Auf die das Problem lösenden Kurven traf Ribaucour im Verlauf seiner berühmten Untersuchungen über die Minimalflächen[2]), daher wurden sie Ribaucour'sche Kurven genannt; wir werden uns dieser Bezeichnung bedienen, um keine neuen Namen einzuführen, können jedoch nicht verschweigen, dafs es richtiger und gerechter gewesen wäre, sie Bernoulli'sche Linien zu nennen.

Nimmt man die Abscisse als unabhängige Variabele, so lautet die Differenzialgleichung für das Bernoulli'sche Problem:

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{1}{n}\, y\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

oder einfacher
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{n}{y}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right].$$

In Anwendung allgemeiner Methoden ersetzen wir diese Gleichung durch die beiden folgenden

$$\frac{dy}{dx} = y', \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{n}{y}(1+y'^2).$$

Nach Elimination von dx ergiebt sich

$$\frac{y'\,dy'}{1+y'^2} = n\frac{dy}{y},$$

die alsbald integriert ergiebt:

$$y' = \sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{2n} - 1}\,. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Eine neue Integration liefert — wenn man als Anfang den Ausgangspunkt der Kurve nimmt —

$$x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{2n} - 1}}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

welches Resultat im wesentlichen schon der Aufgabensteller erhielt.

Aus der Theorie der binomischen Differenziale ergiebt sich, dafs die angegebene Quadratur ausführbar ist, wenn $\frac{1}{2n} = k$ oder $\frac{1}{2n} - \frac{1}{2} = k$, wo k eine ganze Zahl ist, d. h. wenn n die Form $\frac{1}{2k+1}$ oder $\frac{1}{2k}$ hat, also gleich $\frac{1}{h}$ ist, wo h eine beliebige ganze Zahl. Wir setzen nun

1) Vgl. *Joh. Bernoulli Opera* II, S. 290—91.

2) *Etude sur les élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle*, §§. 123—129 (Mém. de Belgique, XLIV, 1880).

der Bequemlichkeit halber $n = -\frac{1}{m+1}$, wo m eine neue ganze Zahl und erhalten dann an Stelle von (2)

$$dx = \frac{y^{\frac{1}{m+1}} \cdot dy}{\sqrt{c^{\frac{2}{m+1}} - y^{\frac{2}{m+1}}}};$$

oder auch, wenn man $y^{\frac{1}{m+1}} = \eta$, $c^{\frac{1}{m+1}} = \gamma$ setzt,

$$dx = \frac{(m+1)\eta^{m+1} \cdot d\eta}{\sqrt{\gamma^2 - \eta^2}}.$$

Setzen wir endlich $\eta = \gamma \sin\varphi$, so sehen wir, dafs zur Darstellung der gesuchten Kurven folgendes Gleichungspaar dienen kann:

$$x = (m+1)c\int_0^\varphi \sin^{m+1}\varphi \cdot d\varphi, \qquad y = c\sin^{m+1}\varphi \quad . \quad . \quad (4)$$

und dies bestätigt, dafs die angedeutete Quadratur ausführbar ist, wenn m eine ganze Zahl.

Bevor wir die Untersuchung der Gleichung (4) fortsetzen, betrachten wir einige Spezialfälle, die besonderen Werten von m entsprechen:

1) $m = 0$. Gleichung (4) werden dann $x = c\cos\varphi$, $y = c\sin\varphi$ und stellen dann den Kreis dar

$$x^2 + y^2 = c^2.$$

2) $m = 1$. Wir bekommen

$$x = 2c\int_0^\varphi \sin^2\varphi \cdot d\varphi, \qquad y = c\sin^2\varphi,$$

oder $$x = c\int_0^\varphi (1 - \cos 2\varphi)d\varphi, \quad y = \frac{c}{2}(1 - \cos 2\varphi),$$

oder endlich

$$x = \frac{c}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi), \qquad y = \frac{c}{2}(1 - \cos 2\varphi),$$

die (vgl. Nr. **196**) eine gemeine Cykloide darstellen.

3) $m = -2$. Aus (4) ergiebt sich

$$x = -c\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sin\varphi}, \qquad y = \frac{c}{\sin\varphi},$$

oder $$x = -c\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi, \qquad y = \frac{c}{\sin\varphi}.$$

Nun giebt erstere

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = e^{-\frac{x}{c}}, \quad \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\varphi = e^{\frac{x}{c}}, \quad e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} = \frac{2}{\sin\varphi},$$

und wenn wir dies mit der zweiten kombinieren

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right),$$

welche Gleichung — wie wir Nr. **234** sehen werden — einer Kettenlinie angehört.

4) $m == 3$. Die Gleichungen (4) gehen über in

$$x = -2c\int\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} = 2c\operatorname{ctg}\varphi, \qquad y = \frac{c}{\sin^2\varphi},$$

und nach Elimination von φ

$$x^2 = 2c(y-c),$$

also die Gleichung einer Parabel.

Diese vier speziellen Kurven dienen als Typen für die vier Kategorien, in die (wie schon Johann Bernoulli bemerkte) die fraglichen Kurven zerfallen, jenachdem m gerade oder ungerade, positiv oder negativ ist. Die Glieder jeder dieser Klassen erfreuen sich besonderer Eigenschaften, wie wir jetzt zeigen wollen.

I. **$m+1$ eine positive ungerade Zahl.** Wird die angegebene Quadratur ausgeführt, so werden die Gleichungen (4)

$$\frac{x}{c} = -\cos\varphi\left\{\sin^m\varphi + \sum_{k=1}^{k=\frac{m}{2}}\frac{m(m-2)\cdots(m-2k+2)}{(m-1)(m-3)\cdots(m-2k+1)}\sin^{m-2k}\varphi\right\},$$

$$\frac{y}{c} = \sin^{m+1}\varphi.$$

Führt man den Parameter $\tau = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$ ein, so sieht man, daſs diese Kurven rational, von der Ordnung $2(m+1)$ und symmetrisch zur x-Axe sind, sowie die unendlich fernen Kreispunkte als $(m+1)$fache Punkte haben; für $m=0$ gehen sie in einen Kreis über; sie können daher — wie es Ribaucour gethan hat — mit dem Namen Kreise höherer Ordnung belegt werden.

II. **$m+1$ eine positive gerade Zahl.** Die Gleichungen (4) liefern dann

$$\frac{x}{c} = -\cos\varphi\left\{\sin^m\varphi + \sum_{k=1}^{k=\frac{m-1}{2}}\frac{m(m-2)\cdots(m-2k+2)}{(m-1)(m-3)\cdots(m-2k+1)}\sin^{m-2k}\varphi\right\}$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdots m}{2\cdot 4\cdots(m+1)}, \qquad \frac{y}{c} = \sin^{m+1}\varphi,$$

und diese stellen transscendente Kurven dar, die aus unzählig vielen cykloidenförmigen Wellen bestehen; für $m=1$ findet man wieder die gewöhnliche Cykloide.

III. **$m+1$ eine negative ungerade Zahl.** Die entsprechenden Kurven werden folgendermaſsen dargestellt

$$\frac{x}{(m+1)c} = \frac{\cos\varphi}{m+2}\left\{\sin^{m+2}\varphi + \sum_{k=1}^{k=-\frac{m}{2}-1}\frac{(m+3)(m+5)\cdots(m+2k-1)}{(m+4)(m+6)\cdots\cdot(m+2k)}\sin^{m+2k}\varphi\right\}$$
$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(m+3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(m+2)}\log\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \quad \frac{y}{c} = \sin^{m+1}\varphi.$$

Auch diese sind transscendent und haben die typische Form der Kettenlinie.

IV. $m+1$ eine negative gerade Zahl. In diesem Falle werden die Gleichungen (4)

$$\frac{x}{(m+1)c} = \frac{\operatorname{ctg}\varphi}{m+2}\left\{\sin^{m+3}\varphi + \sum_{k=1}^{k=-\frac{m+1}{2}}\frac{(m+3)(m+5)\cdots(m+2k-1)}{(m+4)(m+6)\cdots\cdot(m+2k)}\sin^{m+2k+1}\varphi\right\},$$
$$\frac{y}{c} = \sin^{m+1}\varphi.$$

Sie stellen rationale Kurven von der Ordnung $m+1$ dar, welche, da sie die Parabel als typische Form haben, — nach dem Vorschlage Ribaucour's — mit dem Namen Parabeln höherer Ordnung belegt werden könnten.

218. Wir nehmen die Gleichungen (4) wieder auf, um daraus folgenden Ausdruck für den Bogen abzuleiten

$$s = (m+1)c\int_0^{\varphi}\sin^m\varphi\cdot d\varphi\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Es folgt daraus, wenn m positiv ist, und wir mit L_m die Länge des zwischen den Punkten $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ gelegenen Kurvenbogens bezeichnen, dafs

$$L_m = \begin{cases} (m+1)c\,\dfrac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot m-1}{2\cdot 4\cdots m}\,\dfrac{\pi}{2}, & \text{wenn } m \text{ gerade,} \\ (m+1)c\,\dfrac{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot m}{3\cdot 5\cdots m}, & \text{wenn } m \text{ ungerade;} \end{cases} \quad . \quad . \quad (6)$$

in jedem Falle aber ist

$$\frac{L_m}{L_{m-2}} = \frac{m+1}{m},$$

eine bemerkenswerte von E. Dubois[1]) entdeckte Beziehung. Dieselben Gleichungen (4) geben, m immer als positiv vorausgesetzt,

$$\int y\cdot dx = (m+1)c^2\int\sin^{2(m+1)}\varphi\cdot d\varphi\,;$$

daher, wenn wir zwischen $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ integrieren, und mit A_m die entsprechende Fläche bezeichnen

$$A_m = (m+1)c^2\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2m+2)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

1) *Sur une famille des courbes cycloïdales* (Nouv. Corr. Math. VI, 1880).

weshalb $$A_m = A_{m-1} + \frac{1}{2m} A_{m-1}$$

ist, eine zweite elegante Relation, die man ebenfalls Dubois verdankt.

Als Ausdruck für den Krümmungsradius R erhält man im allgemeinen

$$R = -(m+1) c \sin^m \varphi \, . \quad \dots \dots \quad (8)$$

Eliminiert man φ aus (5) und (8), so bekommt man

$$s = -\frac{1}{m} \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{(m+1)c}\right)^{-\frac{2}{n}} - 1}}, \quad \dots \dots \quad (9)$$

welches die natürliche Gleichung der fraglichen Kurve ist. Setzen wir

$$(m+1)c = a, \qquad m = \frac{1-n}{1+n},$$

so nimmt sie folgende bequemere Form an

$$s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{a}\right)^{2\frac{n+1}{n-1}} - 1}} \, . \text{[1]} \quad \dots \dots \quad (9')$$

Vergleichen wir diese mit der natürlichen Gleichung der Sinusspiralen (Nr. **172**)

$$s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{b}\right)^{\frac{2n}{n+1}} - 1}},$$

so sehen wir, daſs diese und die Ribaucour'schen Kurven zu einer allgemeinen Kurvenklasse gehören, die folgende natürliche Gleichung hat

$$s = a \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{b}\right)^m - 1}} \, . \quad \dots \dots \quad (10)$$

Sind nun R_1 und s_1 Krümmungsradius und Bogen der zugehörigen Evolute, so findet man, da (vgl. Nr. **245**)

$$R_1 = R \frac{dR}{ds}, \qquad s_1 = R,$$

$$R_1 = \frac{s_1}{a} \sqrt{\left(\frac{s_1}{b}\right)^m - 1}$$

als natürliche Gleichung der Evolute; nun werden wir (Nr. **235**) sehen, daſs dies die natürliche Gleichung einer Kurve ist, bei welcher der Bogen proportional einer Potenz der Abscisse ist: **daher gehören die Sinusspiralen und die Ribaucour'schen Kurven zu einer Klasse, die gebildet wird von solchen Kurven, bei deren Evolventen die Abscisse proportional einer Potenz des Bogens ist**[2].

---

1) Cesàro, *Lezioni di geometria intrinseca* (Napoli 1896) S. 49.

2) Cesàro, *Sur une Note de géométrie infinitesimale* (Nouv. Ann. 3. Ser. XIII, 1894). — Dieselben Kurven sind auch besondere Fälle der (nach E. Wölf-

Bemerkenswert sind diejenigen Ribaucour'schen Kurven, bei denen m positiv und ganz ist; sie können nämlich als spezielle trochoidale Hüllkurven aufgefafst werden. Man betrachte einen Kreis C_0, einen Durchmesser d desselben und eine feste Gerade r; wenn C_0 ohne zu gleiten auf r rollt, so umhüllt der Durchmesser d eine gemeine Cykloide C_1: es ist dies ein interessanter Satz, den Chasles[1]) 1837 entdeckte und den Todhunter ziemlich viel später wiederum auffand[2]). Läfst man nun die Cykloide C_1 auf der Geraden r rollen, so wird ihre Basisgerade eine neue Kurve C_2 umhüllen. Aus dieser entsteht in ähnlicher Weise eine Kurve C_3, u. s. w. Eine dieser Kurven wird durch die Gleichungen (4) dargestellt. Diese bemerkenswerte Thatsache wurde zum ersten Male durch N. Nicolaïdes[3]) und dann von E. Dubois[4]) veröffentlicht, war aber schon 1868 von Mannheim und Ribaucour beobachtet worden, die ein Verfahren entdeckt hatten, der Reihe nach alle fraglichen Kurven zu erhalten[5]). — Die vorhin betrachteten speziellen Ribaucour'schen Kurven gehören einem System an, dessen Charakteristiken $\mu = 2(m+1)$ und $\nu = 2$ sind; daher

---

fing's Vorschlag) sogenannten Cesàro'schen Kurven, bei denen der Krümmungsradius proportional dem vom Incidenzpunkte an gerechneten Normalabschnitte ist, welchen die in Bezug auf einen festen Kreis genommene Polare dieses Punktes abgrenzt.

1) *Aperçu historique*, 2. Aufl. (Paris 1875) S. 69. — Dieser schöne Satz läfst sich leicht mit Benutzung der Fig. 115 a unter Beibehaltung der in Nr. **196** angewandten Bezeichnungen beweisen. Man erkennt nämlich leicht, dafs die Gleichung des Durchmessers $C'O'$ ist

$$x - y \cdot \operatorname{ctg} \varphi = r(\varphi - \operatorname{ctg} \varphi),$$

oder

$$x \sin \varphi - y \cos \varphi = r(\varphi \sin \varphi - \cos \varphi).$$

Wird diese differenziert, so erhält man

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = r(2 \sin \varphi + \varphi \cos \varphi),$$

welche Gleichung mit der vorigen kombiniert ergiebt

$$x = \frac{r}{2}(2\varphi + \sin 2\varphi), \qquad y = \frac{r}{2}(3 - \cos 2\varphi).$$

Wenn man nun setzt

$$\frac{\pi r}{2} - x = x_1, \qquad 2r - y = y_1, \qquad \pi - 2\varphi = \varphi_1,$$

so gehen diese über in

$$x_1 = \frac{r}{2}(\varphi_1 - \sin \varphi_1), \qquad y_1 = \frac{r}{2}(1 - \cos \varphi_1),$$

welches die kanonischen Gleichungen einer gemeinen Cykloide, erzeugt durch einen Kreis mit dem Radius $\frac{r}{2}$, sind.

2) Nouv. Corr. Math. Question 203 (gelöst in IV, 1878, S. 65). Vgl. Besant, *Notes on roulettes and glisettes,* 2. Aufl. (Cambridge 1890) S. 34.

3) *Analectes ou Mémoires et Notes sur les diverses parties des mathématiques,* 4e Livraison (Athènes 1871) S. 103 ff.

4) S. den o. a. Aufsatz.

5) Nouv. Corr. Math. VI, 1880, S. 224—25. S. auch F. Morley, *On adjustable cycloidal and trochoidal curves* (Amer. Journ. XVI, 1894).

liegen die Berührungspunkte der von einem Punkte an sie gezogenen Tangenten auf einer Kurve von der Ordnung $2(m+2)$, von welcher jener Punkt ein $2(m+1)$-facher ist.

Ribaucour'sche Kurven treten auch bei der Lösung mechanischer Probleme auf, wie folgendes Beispiel zeigen möge. Joh. Bernoulli hat vor etwa 200 Jahren folgende Frage aufgeworfen[1]: „In einer Vertikalebene eine Kurve zu finden, von der Art, daſs, wenn ein Körper sie infolge seines Eigengewichtes frei durchläuft, er in allen ihren Punkten einen Druck auf sie ausübt, der gleich seinem absoluten Gewichte ist.“ Es ist klar, daſs der bewegte Punkt noch einer anderen Kraft unterworfen sein muſs auſser der Schwerkraft, da sonst die horizontale Gerade die einzige Kurve sein würde, die der Aufgabe genügt. Wenn nun das Gesetz, nach welchem der Druck, dem der bewegte Körper unterworfen ist, für alle Punkte der Kurve derselbe ist, so heiſst diese — wenn wir die Namengebung von B. Peirce[2]) benutzen — Barytrope, wenn aber der Druck konstant ist, Tautobaryde. Die Aufgabe Bernoulli's war kaum gestellt, als sie auch schon die Aufmerksamkeit hochberühmter Geometer auf sich zog, wie der Marquis de l'Hôpital, Varignon's und Euler's; P. Jullien[3]) und C. H. Müller[4]) haben die so erhaltenen Resultate, die weniger der Geometrie als der Mechanik angehören, zusammenfassend dargelegt. Letzterer hat dann insbesondere folgendes Problem eingehend behandelt: „Es sind diejenigen ebenen Kurven zu bestimmen, auf denen sich ein materieller Punkt unter dem Einflusse einer treibenden Kraft derart bewegt, daſs das Verhältnis (n) zwischen dem durch die Kraftkomponente allein ausgeübten Drucke und dem von der Centrifugalkraft herrührenden ein bestimmtes sei.“ Als Differenzialgleichung der gesuchten Kurven findet sich

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{k(v_0+2gy)^{\frac{1}{n}}-1}};$$

die Kurven sind also, wie angegeben, Ribaucour'sche Kurven.

219. Das durch die Ribaucour'schen Kurven gelöste Problem bietet eine unbestreitbare Analogie mit folgendem, zu Ende des 18. Jahrhunderts von einem wenig bekannten Mitgliede der Petersburger Akademie behandelten[5]): „Eine Kurve von der Eigenschaft zu finden, daſs das Verhältnis des Krümmungsradius R zur Subnormalen S_n ein konstantes ($=m$) ist.“ Es läſst sich alsbald leicht lösen, wenn man

1) Acta erud. Suppl. II, S. 291; *Joh. Bernoulli opera* I, S. 141.

2) *Physical and celestial Mechanics,* S. 370.

3) *Problèmes de mécanique rationelle* I, S. 405.

4) *Ueber barytrope und tautobaryde Curven* (Diss. Marburg, 1880).

5) M. Platzmann, *Solutio problematis ex methodo tangentium inversa* (Acta Acad. Petrop. pro anno MDCCLXXXI, Pars II, Petropoli 1785).

als unabhängige Variabele den Winkel φ der Normalen mit der x-Axe wählt; nennen wir, wie gewöhnlich, den Kurvenbogen s, so haben wir

$$dx = ds \cdot \sin\varphi, \qquad dy = ds \cdot \cos\varphi, \qquad S_n = x + y \cdot \operatorname{ctg}\varphi,$$

$$R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{dx}{\sin\varphi \cdot d\varphi};$$

daher lautet die Bedingung des Problems

$$\frac{dx}{\sin\varphi \cdot d\varphi} = m(x + y \operatorname{ctg}\varphi),$$

oder

$$dx = m(x \sin\varphi + y \cos\varphi) d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Dieser Ausdruck ist integrierbar, und liefert, wenn mit a die Integrationskonstante bezeichnet wird,

$$x + a = m(y \sin\varphi - x \cos\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Eliminieren wir y aus (11) und (12), so erhalten wir

$$dx \sin\varphi - (x + a) \cos\varphi \cdot d\varphi = mx \cdot d\varphi$$

oder

$$dx - x \frac{m + \cos\varphi}{\sin\varphi} d\varphi = a \operatorname{ctg}\varphi \cdot d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Setzt man nun

$$\frac{dz}{z} = -\frac{m + \cos\varphi}{\sin\varphi} d\varphi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

so hat man

$$\log\frac{1}{z} = m \log\frac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi} + \log\sin\varphi,$$

das heifst

$$z = \frac{(1 + \cos\varphi)^m}{\sin^{m+1}\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Wegen Gleichung (14) aber wird (13) nun zu

$$dx + x\frac{dz}{z} = a \operatorname{ctg}\varphi \cdot d\varphi,$$

daher ist

$$xz = a\int z \operatorname{ctg}\varphi \cdot d\varphi;$$

also ist wegen (15)

$$x\frac{(1 + \cos\varphi)^m}{\sin^{m+1}\varphi} = a\int\frac{(1 + \cos\varphi)^m \cos\varphi}{\sin^{m+1}\varphi} d\varphi = a\int\frac{\cos\varphi \cdot \sin^{m-2}\varphi}{(1 - \cos\varphi)^m} d\varphi \, . \, . \, (16)$$

Unter der Voraussetzung, dafs $m \neq 1$, erhält man durch Integrieren, wenn man die Integrationskonstante mit b bezeichnet:

$$\frac{x(1 + \cos\varphi)^m}{a \sin^{m+1}\varphi} = \frac{1}{2(m-1)} \frac{\sin^{m-1}\varphi}{(1 - \cos\varphi)^{m-1}} - \frac{1}{2(m+1)} \frac{\sin^{m+1}\varphi}{(1 - \cos\varphi)^{m+1}} + b$$

oder, wenn wir mit c die beliebige Konstante ab bezeichnen, und dann (12) anwenden

$$\left.\begin{aligned} x &= c\frac{\sin^{m+1}\varphi}{(1 + \cos\varphi)^m} + a\frac{1 - m\cos\varphi}{m^2 - 1}; \\ y &= c\frac{(1 + m\cos\varphi)\sin^m\varphi}{(1 + \cos\varphi)^m} + \frac{a\sin\varphi}{m^2 - 1}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Dies ist die analytische Darstellung der gesuchten Kurve, im Falle $m \neq 1$. Offenbar sind diese Kurven algebraisch oder nicht, jenachdem m rational ist oder nicht; wenn m eine ganze Zahl, so sind sie aufserdem rational.

In dem bis jetzt ausgeschlossenen Falle $m = 1$ wird Gl. (16)

$$\frac{x}{a}\,\frac{1+\cos\varphi}{\sin^2\varphi} = \int\frac{\cos\varphi\cdot d\varphi}{(1-\cos\varphi)\sin\varphi} = \frac{1}{2}\int\frac{\sin\varphi\cdot d\varphi}{1-\cos\varphi} - \frac{1}{2}\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi};$$

wird integriert und die Integrationskonstante mit $\frac{c}{2a}$ bezeichnet, so ergiebt sich

$$2x + a = c(1-\cos\varphi) - a(1-\cos\varphi)\log\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi},$$

und bei Anwendung der Gleichung (12) . . (18)

$$2y = c\sin\varphi + a(1-\cos\varphi) - a\sin\varphi\cdot\log\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}.$$

Diese Gleichungen stellen die Kurve in dem jetzt betrachteten Falle dar; sie ist im allgemeinen transscendent. — Setzen wir im besonderen $a = 0$, so erhalten wir

$$x = c(1-\cos\varphi), \qquad y = c\sin\varphi;$$

durch Elimination von φ ergiebt sich hieraus

$$x^2 + y^2 - cx = 0,$$

die Gleichung eines Kreises. Dafs dieser sich unter den gesuchten Kurven befinden mufste, war vorauszusehen; daher ist dies nichts weiter als eine Bestätigung der Rechnung.

Zum Schlusse sei bemerkt: Wenn man in der von Bernoulli gestellten Aufgabe, die durch die Ribaucour'schen Kurven gelöst wird, an Stelle des Verhältnisses das Produkt aus dem Krümmungsradius und der entsprechenden Normalen setzt, so erhält man eine neue Art von Kurven, deren vollständige Bestimmung, die von G. Scheffers[1]) ausgeführt wurde, elliptische Integrale verlangt.

Fünfzehntes Kapitel.

Die Spirale von Norwich oder Sturm und die Euler'sche Kurve.

220. Ein ziemlich allgemeines Problem, das zuerst von Jakob Riccati gelöst wurde, ist folgendes: „Eine Kurve zu bestimmen, für welche der Ausdruck des Krümmungsradius in einem beliebigen Punkte als Funktion des zugehörigen Radius vector gegeben ist"[1]). Dieses

1) *Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume* (Leipzig 1901) S. 98—105.

2) Siehe *Soluzione generale del problema inverso intorno a' raggi osculatori* (Giorn. de' Letterati d'Italia, XI, 1712).

Problem führt zu einer Differenzialgleichung zweiter Ordnung, die durch eine Quadratur bei folgendem Verfahren integrierbar ist: Sind ϱ, ω die Polarkoordinaten und $R = \varphi(\varrho)$ der Krümmungsradius, so haben wir die Gleichung

$$\frac{(\varrho^2 + \varrho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - 2\varrho\varrho''} = R = \varphi(\varrho). \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Man setze $\varrho' = \frac{d\varrho}{d\omega} = p$, dann hat man

$$\varrho'' = \frac{d^2\varrho}{d\omega^2} = \frac{d\varrho'}{d\varrho}\,\frac{d\varrho}{d\omega} = p\frac{dp}{d\varrho},$$

und daher wird die Gleichung (1)

$$\varphi(\varrho) = \frac{(\varrho^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 + 2p^2 - \varrho p\frac{dp}{d\varrho}}. \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Integriert man diese Gleichung, so erhält man p als Funktion von ϱ, und demnach ist, den gemachten Bestimmungen gemäfs,

$$\omega + \alpha = \int\frac{d\varrho}{p}. \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Nun setzen wir, um (2) zu integrieren, $\varrho^2 = x$, $\varrho^2 + p^2 = y$, $\varphi(\varrho) = \varphi(\sqrt{x}) = f(x)$, und wir können dann schreiben

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{2}{\sqrt{y}} - \frac{x}{\sqrt{y^3}}\,\frac{dy}{dx},$$

d. h.

$$\frac{1}{f(x)} = 2\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right),$$

demnach ist

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{f(x)}.$$

Setzt man jetzt für x und y wieder ihre Werte ein, so findet man

$$\frac{\varrho^2}{\sqrt{\varrho^2 + p^2}} = \int\frac{\varrho \cdot d\varrho}{\varphi(\varrho)},$$

woraus, wenn man

$$\int\frac{\varrho \cdot d\varrho}{\varphi(\varrho)} = \psi(\varrho) - c$$

setzt, sich ergiebt

$$p = \frac{\varrho\sqrt{\varrho^2 - [\psi(\varrho) - c]^2}}{\psi(\varrho) - c}.$$

Setzen wir in (3) für p diesen Wert ein, so ergiebt sich

$$\omega + \alpha = \int\frac{\psi(\varrho) - c}{\varrho\sqrt{\varrho^2 - [\psi(\varrho) - c]^2}} \cdot d\varrho. \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Dies ist die Polargleichung der Kurve[1]); aus dieser folgt nun, dafs

$$s = \int\frac{R \cdot dR}{\sqrt{R^2 - [\psi(R) - c]^2}} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

---

1) Die Gl. (4) findet sich ohne Beweis im *Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis* von Schlömilch, II, 2. Aufl. (Leipzig 1874) S. 340.

die natürliche Gleichung derselben ist. Wenden wir nun die Formeln an (vgl. Nr. **251**), welche die Elemente R und s mit den entsprechenden der Evolute verknüpfen, nämlich $R_1 = R\frac{dR}{ds}$, $s_1 = R$, so erhalten wir

$$R_1 = \sqrt{s_1^2 - [\psi(s_1) - c]^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

als natürliche Gleichung der Evolute von (1).

Mehr als ein Jahrhundert nach Riccati zog ein Spezialfall dieses Problems — der einfachste — die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sich, nämlich der Fall, dafs der Krümmungsradius gleich dem Radius vector ist. Von ihm spricht C. Sturm in einer Note zu seinem *Cours d'analyse*[1]) 1857, daher der Name Spirale von Sturm, den man dieser Kurve beigelegt hat[2]); elf Jahre später beschäftigte sich J. Sylvester mit ihr während des 1868 zu Norwich abgehaltenen Kongresses der British Association for the Advancement of Science; daher der Name Spirale von Norwich, den man der Kurve gegeben hat[3]); ein Jahr darauf lieferte dieselbe Kurve Stoff zu einer Abhandlung von O. Schlömilch[4]). — Die Polargleichung der neuen Kurve erhält man aus (4), wenn man $\varphi(\varrho) = \varrho$ und demnach auch $\psi(\varrho) = \varrho$ setzt; sie ist demnach

$$\omega + \alpha = \int \frac{(\varrho - c)\,d\varrho}{\varrho\sqrt{2c\varrho - \varrho^2}};$$

nach Ausführung der angegebenen Integration ergiebt sich dann

$$\omega + \alpha = \sqrt{\frac{2\varrho - c}{c}} - 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{2\varrho - c}{c}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

oder auch, wenn wir $c = 2a$ setzen,

$$\omega + \alpha = \sqrt{\frac{\varrho - a}{a}} - 2 \operatorname{arc\,cos} \sqrt{\frac{a}{\varrho}} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7')$$

Die natürliche Gleichung lautet dagegen

$$s = \frac{R + c}{c}\sqrt{\frac{2R - c}{c}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

oder, wenn man wieder $c = 2a$ setzt,

$$s = \frac{R + 2a}{3}\sqrt{\frac{R - a}{a}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8')$$

Die natürliche Gleichung der Evolute hingegen ergiebt sich, wenn man in Gl. (6) $\psi(s_1) = s_1$ setzt, und ist daher

$$R_1^2 = 2cs_1 - c^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

1) Vgl. 6. Aufl. (Paris 1880) II, S. 106.

2) Nicolaïdes, *Analectes ou Mémoires et Notes sur les diverses parties des mathématiques,* S. 136 (Athènes 1872).

3) *Note on the successive evolute to a circle* (Phil. mag. 4. Ser. XXXVI, 1868); *Outline trace of the Theory of reducible Cyclodes* (Proc. of the London math. Soc. II, 1869).

4) *Über eine Spirale* (Zeitschr. für Math. XIV, 1869).

Schreiben wir diese in der Form

$$R_1^2 = 2c\left(s_1 - \frac{c}{2}\right),$$

so erkennt man (vgl. Nr. **209**), dafs diese eine gemeine Kreisevolvente darstellt. **Die Spirale von Sturm ist demnach die Evolvente der Kreisevolvente, d. h. die zweite Evolvente eines Kreises.**

Wir wollen hier zugleich bemerken, dafs die Gleichung (6) Ähnlichkeit mit folgender hat

$$\omega = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{a} + \text{arc sin}\frac{\frac{a}{2}}{\varrho}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

die eine Kurve darstellt, die in der angewandten Mathematik vorkommt, und die von Sylvester[1]), weil sie durch Rollen eines Kreises erzeugt werden kann, Convolute des Kreises[2]) genannt wurde.

221. Wenn man die Polarkoordinaten ϱ, ω einer ebenen Kurve als Funktionen einer unabhängigen Variabelen t ansieht und ihren Bogen mit s, ihren Krümmungsradius mit R bezeichnet, so hat man, wie leicht zu beweisen ist,

$$R = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}{\varrho^2\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^3 + 2\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2\frac{d\omega}{dt} - \varrho\frac{d^2\varrho}{dt^2}\frac{d\varrho}{dt} + \varrho\frac{d\varrho}{dt}\frac{d^2\omega}{dt^2}} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Wird im besonderen vorausgesetzt, dafs man als Variabele t den Radius vector ϱ nimmt, so hat man

$$R = \frac{\left[\left(\varrho\frac{d\omega}{d\varrho}\right)^2 + 1\right]^{\frac{3}{2}}}{\varrho\left(\frac{d\omega}{d\varrho}\right)^3 + 2\frac{d\omega}{d\varrho} + \varrho\frac{d^2\omega}{d\varrho^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Nennen wir nun den Winkel zwischen Tangente und Radius vector μ, und die Länge des vom Anfang auf die Tangente gefällten Lotes p, so haben wir

$$\text{tg}\,\mu = \varrho\frac{d\omega}{d\varrho}, \qquad p = \varrho\sin\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

und daher ist

$$p = \frac{\varrho^2\frac{d\omega}{d\varrho}}{\sqrt{\left(\varrho\frac{d\omega}{d\varrho}\right)^2 + 1}}, \qquad \frac{dp}{d\varrho} = \frac{2\varrho\frac{d\omega}{d\varrho} + \varrho^2\frac{d^2\omega}{d\varrho^2} + \varrho^3\left(\frac{d\omega}{d\varrho}\right)^3}{\left\{\left(\varrho\frac{d\omega}{d\varrho}\right)^2 + 1\right\}^{\frac{3}{2}}},$$

und infolgedessen

$$R = \varrho\frac{d\varrho}{dp}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

---

1) M. s. die oben citierten Aufsätze.

2) Es möge noch bemerkt werden, dafs Barrow in seinen *Lectiones geometricae* sich schon des Ausdruckes Convolute, jedoch in einem ganz anderen Sinne bedient hat: siehe *The mathematical Works of J. Barrow ed. Whewell* (Cambridge 1860) S. 295—97.

Dieser eleganten Beziehung bediente sich Euler — in einer der Petersburger Akademie am 20. Aug. 1781 vorgelegten Abhandlung[1]) — um die Aufgabe zu lösen (von der wir die Lösung Riccatis in der vorigen Nr. dargelegt haben), nämlich „eine Kurve zu finden, bei welcher der Krümmungsradius in einem beliebigen Punkte eine Funktion des Abstandes jenes Punktes von einem festen Punkte O ist". Nehmen wir O als Pol, so wird R eine Funktion von ϱ sein, also

$$R = f(\varrho).$$

Demnach giebt (14)

$$p = \int \frac{\varrho \cdot d\varrho}{f(\varrho)} \quad \text{. . . . .} \quad (15)$$

Da überdies der Winkel μ der Kathete p in dem rechtwinkligen Dreiecke, das ϱ zur Hypotenuse hat, gegenüberliegt, so ist

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{p}{\sqrt{\varrho^2 - p^2}},$$

und also wegen (13, 1^a)

$$\varrho \frac{d\omega}{d\varrho} = \frac{p}{\sqrt{\varrho^2 - p^2}}.$$

Setzen wir hierin für p seinen Wert aus (15), so erhalten wir nach einer Integration

$$\omega = \int \frac{p \cdot d\varrho}{\varrho \sqrt{\varrho^2 - p^2}} \quad \text{. . . . .} \quad (16)$$

und dies ist die allgemeine Gleichung der gesuchten Kurve.

In dem einfachsten Falle, in welchem $f(\varrho) = \frac{\varrho}{\mu}$, wird (15) zu $p = \mu\varrho + c$, wo c eine Konstante bedeutet; die Gl. (16) wird demnach

$$\omega = \int \frac{(\mu\varrho + c) \cdot d\varrho}{\varrho\sqrt{\varrho^2 - (\mu\varrho + c)^2}},$$

eine Quadratur, der elementar ausführbar ist[2]). Wenn insbesondere $c = 0$, so hat man

$$\omega = \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \int \frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \log \frac{\varrho}{a} \quad \text{oder} \quad \varrho = a e^{\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}\omega},$$

weshalb die gesuchte Kurve eine logarithmische Spirale ist.

Komplizierter ist der Fall $f(\varrho) = \frac{\varrho^2}{a}$, mit dem Euler sich befaſst hat; dann werden die Gleichungen (15), (16) zu

---

1) *De curvis, quarum radii osculi tenent rationem duplicatam distantiae a puncto fixo, earumque mirabilibus proprietatibus* (Mém. de l'Ac. de St. Pétersbourg, IX, 1824).

2) Daſs diese Kurven Evolventen cyklischer Kurven sind, welche den festen Kreis ihrer Evolute rechtwinklig schneiden, wird E. Wölffing in einem demnächst im Archiv der Math. erscheinenden Aufsatze zeigen.

$$p = a\int\frac{d\varrho}{\varrho} = a\log\frac{\varrho}{c}, \qquad \omega = \int\frac{a\log\frac{\varrho}{c}\cdot d\varrho}{\varrho\sqrt{\varrho^2-\left(a\log\frac{\varrho}{c}\right)^2}}\cdot\ .\ (17)$$

Diese Integration ist nicht ausführbar. Dennoch hat **Euler** gezeigt, wie man nichtsdestoweniger die erhaltene Kurve in ihre kleinsten Einzelheiten hinein diskutieren kann. Wir wollen ihm darin nicht folgen, sondern uns darauf beschränken, eine besondere Eigenschaft, die die **Euler'sche Kurve** besitzt, anzuführen. Aus der Gl. (17) folgt

$$\frac{d\omega}{d\varrho} = \frac{a\log\frac{\varrho}{c}}{\varrho\sqrt{\varrho^2-\left(a\log\frac{\varrho}{c}\right)^2}}, \quad \text{ferner ist} \quad \frac{ds}{d\varrho} = \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2-\left(a\log\frac{\varrho}{c}\right)^2}},\ .\ (18)$$

daher
$$ds - a\cdot d\omega = d\sqrt{\varrho^2-\left(a\log\frac{\varrho}{c}\right)^2},$$

und wenn integriert wird,
$$s = a\omega + \sqrt{\varrho^2-\left(a\log\frac{\varrho}{c}\right)^2} + Const.$$

Nun giebt $\sqrt{\varrho^2-\left(a\log\frac{\varrho^2}{c}\right)^2}$ die Projektion q des Radius vector auf die Tangente, also ist
$$s = a\omega + q + Const.,$$

welche elegante Beziehung sich leicht in einem Satze aussprechen läſst. Beachten wir schlieſslich, daſs der Voraussetzung gemäſs $\varrho = \sqrt{aR}$, und setzen wir $b = \frac{c^2}{a}$, so wird Gleichung (18)
$$s = \sqrt{a}\int\frac{dR}{\sqrt{4R - a\left(\log\frac{R}{b}\right)^2}};$$

und dies ist die natürliche Gleichung der Kurve.

Die soeben angeführten Formeln (14)—(16) sind es, die man in der Regel herbeizuziehen hat, wenn es sich um die Untersuchung solcher Kurven handelt, die durch eine Beziehung zwischen dem Krümmungsradius R und dem Abstande p der entsprechenden Tangente von einem festen Punkte definiert sind. Nehmen wir einmal an, daſs diese Beziehung folgende sei
$$R = kp^n, \quad \dots\dots\dots\dots \quad (19)$$

wo k und n gegebene Konstanten sind. Wegen (14) kann man dann schreiben
$$\varrho\cdot d\varrho = kp^n\cdot dp,$$

die integriert ergiebt
$$\varrho^2 = \frac{2k}{n+1}p^{n+1} - c, \quad \dots\dots \quad (20)$$

und zur Darstellung aller fraglichen Kurven dienen kann. Ihre Evoluten erfreuen sich einer eleganten Eigenschaft, die wir jetzt darlegen wollen[1]). Zu dem Zwecke beachten wir, dafs aus den Beziehungen, welche die natürlichen Kurvenelemente R und s mit denen der Evolute verknüpfen (Nr. **251**), sich ergiebt, dafs

$$R_1 = \frac{R \cdot dR}{ds}.$$

Nun kann man aus Gleichung (16) der Reihe nach ableiten:

$$\varrho \cdot d\omega = \frac{p \cdot d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - p^2}}, \qquad ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 \cdot d\omega^2 = \frac{\varrho^2 \cdot d\varrho^2}{\varrho^2 - p^2},$$

$$ds = \frac{\varrho \cdot d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - p^2}};$$

hieraus und aus (19) folgt

$$R_1 = nkp^{n-1}\sqrt{\varrho^2 - p^2}.$$

Wenn man nun durch das Krümmungscentrum C eines beliebigen Kurvenpunktes P die Parallele zur Tangente zieht, und deren Schnitt D mit dem Radius vector OP bestimmt, so hat man

$$CD = R \cdot \operatorname{ctg} \mu;$$

setzt man für R seinen Wert kp^n, und für $\operatorname{ctg} \mu$ den Ausdruck $\frac{\sqrt{\varrho^2 - p^2}}{p}$, so kann man schreiben

$$CD = kp^{n-1}\sqrt{\varrho^2 - p^2}.$$

Folglich ist

$$R_1 = n \cdot CD,$$

welche Beziehung die oben angedeutete elegante Eigenschaft ausdrückt und die Krümmungsradien der Evoluten aller durch die Gleichung (19) dargestellter Kurven zu konstruieren lehrt. Unter diesen befinden sich, wie wir hinzufügen wollen, viele uns schon bekannte Kurven; man erkennt dies, wenn man die Formeln (15) und (16) anwendet, indem man berücksichtigt, dafs nach Elimination von p aus (19) und (20) man erhält

$$R = k\left[\frac{n+1}{2k}\varrho^2 + c\right]^{\frac{n}{n+1}},$$

---

1) Sie bildet den Gegenstand der Question 493 der *Nouv. Ann. de Math.*; die so lautet: „P sei ein Punkt einer Kurve A, C das Krümmungscentrum für P, O ein fester Punkt als Ausgangspunkt der Radienvectoren; CD sei senkrecht zu CP und D der Schnittpunkt von CD mit dem Vector PO bezw. seiner Verlängerung. Wenn der Krümmungsradius der Kurve A proportional einer beliebigen Potenz n des von O auf die Kurventangente gefällten Lotes ist, so ist der Krümmungsradius der Evolute von A, der dem Punkte C entspricht, gleich $n \cdot CD$"; eine Lösung derselben, die von der im Texte gegebenen verschieden ist, findet sich im I. Bd. (1862) dieser Zeitschrift (S. 321—22); sie rührt von Sacchi her.

weshalb man im vorliegenden Falle in diesen Formeln zu setzen hat

$$f(\varrho) = k\left[\frac{n+1}{2k}\varrho^2 + c\right]^{\frac{n}{n+1}}.$$

Für $n = 0$ erhält man ersichtlich einen Kreis; für $n = 1$ erhält man, wenn $k \neq 1$ der Reihe nach

$$f(\varrho) = \sqrt{k}\sqrt{\varrho^2 + c}, \quad p = \frac{\sqrt{\varrho^2 + c}}{\sqrt{k}}, \quad \omega = \int \frac{\sqrt{\varrho^2 + c} \cdot d\varrho}{\varrho\sqrt{(k-1)\varrho^2 - c}};$$

erinnern wir uns der Gleichung (14) auf S. 488, so sehen wir, dafs, wenn wir hierin

$$c = -\frac{a^2}{n^2}, \quad k = 1 - \frac{1}{(2n+1)^2}$$

setzen, sie eine Epi- oder Hypocykloide darstellen. In dem ausgeschlossenen Falle, $k = 1$, hat man hingegen

$$\sqrt{-c} \cdot \omega = \int \frac{\sqrt{\varrho^2 + c} \cdot d\varrho}{\varrho} = \sqrt{\varrho^2 - c} + \sqrt{-c} \arcsin \frac{\sqrt{-c}}{\varrho};$$

setzen wir hierin $c = -a^2$, so sieht man, dafs die dargestellte Kurve eine Kreisevolvente ist. — Einige andere Kurven erhält man, indem man $c = 0$ setzt und dem n verschiedene Werte erteilt, wie wir kurz noch vermerken wollen:

	$n =$	$f(\varrho) =$	$p =$	$\omega =$	Gleichung	Kurve
1.	1	$\frac{\varrho}{\sqrt{k}}$	$\frac{\varrho}{\sqrt{k}}$	$\frac{1}{\sqrt{k-1}} \log \frac{\varrho}{\varrho_0}$	$\varrho = \varrho_0 e^{\sqrt{k-1} \cdot w}$	Logarithm. Spirale.
2.	3	$\sqrt{\frac{8\varrho^3}{k}}$	$\sqrt{\frac{k\varrho}{2}}$	$2 \operatorname{arc tg} \frac{\sqrt{\varrho - \frac{k}{2}}}{\sqrt{\frac{k}{2}}}$	$\varrho = \frac{k}{1 + \cos\omega}$	Parabel.
3.	$\frac{1}{3}$	$\sqrt{\frac{2}{3}k\varrho}$	$\sqrt{\frac{2\varrho^3}{k}}$	$\arcsin \frac{4\varrho - k}{k}$	$\varrho = \frac{k}{4}(1 + \sin\omega)$	Kardioide.
4.	$-\frac{1}{3}$	$\frac{3k^2}{\varrho}$	$\frac{\varrho^3}{9k^2}$	$\frac{1}{2} \arcsin \frac{\varrho^2}{9k^2}$	$\varrho^2 = 9k^2 \sin 2\omega$	Bernoulli'sche Lemniskate.
5.	-3	$-\frac{\varrho^3}{k^2}$	$\frac{k^2}{\varrho}$	$-\frac{1}{2} \arcsin \frac{k^2}{\varrho^2}$	$xy + \frac{k^2}{2} = 0$	gleichseitige Hyperbel.

Dem Leser überlassen wir es, zu verifizieren, dafs, wenn $c \neq 0$, für $n = -3$ die entsprechende Kurve ein centrischer Kegelschnitt ist.

Sechzehntes Kapitel.

Die trigonometrischen und hypertrigonometrischen Kurven.

222. Wir bezeichnen mit trigonometrischen Kurven die durch folgende Gleichungen dargestellten

$$y = b \sin\frac{x}{a} \ldots (1) \qquad y = b \operatorname{tg}\frac{x}{a} \ldots (2) \qquad y = b \sec\frac{x}{a} \ldots (3)$$

$$y = b \cos\frac{x}{a} \ldots (4) \qquad y = b \operatorname{ctg}\frac{x}{a} \ldots (5) \qquad y = b \operatorname{cosec}\frac{x}{a} \ldots (6)$$

wo a und b Konstanten sind, die immer als positiv angenommen werden können[1]). Da, wenn man $x = \frac{\pi a}{2} - x'$ setzt, man von den drei ersten der Reihe nach zu den drei letzten gelangt, so genügt es, jene drei ersten zu untersuchen. Im Falle $a = b = 1$ dienen sie dazu, die gewöhnlichen trigonometrischen Funktionen geometrisch darzustellen; da man sie aber auch in folgender Weise schreiben kann

$$x = a \operatorname{arc} \sin\frac{y}{b}, \qquad x = a \operatorname{arc} \operatorname{tg}\frac{y}{b}, \qquad x = a \operatorname{arc} \sec\frac{y}{b},$$

$$x = a \operatorname{arc} \cos\frac{y}{b}, \qquad x = a \operatorname{arc} \operatorname{ctg}\frac{y}{b}, \qquad x = a \operatorname{arc} \operatorname{cosec}\frac{y}{b},$$

so können sie auch dazu dienen, die Umkehrung der trigonometrischen Funktionen, die cyclometrischen Funktionen darzustellen, wenn wieder $a = b = 1$. Variiert man die Konstanten a und b, so erhält man Kurven, die einander affin sind.

Kurven vom Typus (1) sind uns schon begegnet (Nr. **181** u. **200**): nämlich die Gefährtin der Cykloide und die Tschirnhausen'sche Quadratrix; jene entspricht dem Falle $a = b$, diese dem $a = 2\pi b$. Die sehr einfachen geometrischen Beziehungen, die zwischen den durch Variation der Konstanten a und b entstehenden ∞^2 verschiedenen Kurven (1) bestehen, erlauben uns, diese als im wesentlichen identische Kurven anzusehen; somit erklärt es sich, wie Wallis behaupten konnte: „Et Gallorum socia Cycloidis est ea Curva, quae (mihi) terminat Sinuum rectorum“[2]); es ist dieselbe Linie, die Leibniz die linea sinuum[3]) und die man heute die Sinuskurve, Sinuslinie, oder Sinusoide nennt, wogegen die Kurve (4) die Cosinusoide heifst. Man kann

---

1) Ihnen analog sind die durch

$$y = b\, sn\frac{x}{a} \text{ (vgl. Nr. **213**, Schlufs)}, \qquad y = b\, cn\frac{x}{a}, \qquad y = b\, dn\frac{x}{a}$$

wiedergegebenen Kurven, welche die Jacobi'schen elliptischen Funktionen geometrisch darstellen; die erste könnte man elliptische Sinusoide nennen.

2) Brief an Leibniz vom 6. Apr. 1697 (*Leibniz,* ed. Gerhardt, IV, S. 18).

3) Brief an Huygens vom 4./14. Sept. 1694 (a. a. O. II, S. 195).

dieselbe auch erhalten, wenn man einen Kreiscylinder mit einer beliebigen Ebene schneidet und dann auf eine Ebene abrollt[1]), auch als Orthogonal-Projektion einer Schraubenlinie auf eine zur Cylinderaxe parallele Ebene. Sie tritt ferner auf in der mathematischen Theorie der Schwingungen speziell in der Akustik, wo sie die harmonische Kurve genannt wird[2]); zu Unrecht wurde sie dagegen mit der Gestalt, die eine schwingende Seite annimmt, identifiziert[3]); von Ästhetikern wurde sie auch als die Schönheitslinie bezeichnet.

Die Gleichung der Tangente im Punkte (x, y) der Kurve (1) ist

$$\frac{Y-y}{X-x} = \frac{\sqrt{b^2-y^2}}{a};$$

macht man diese Gleichung rational, so sieht man: **Die Berührungspunkte der von einem Punkte ihrer Ebene an die Sinuskurve gezogenen Tangenten gehören einer Kurve vierter Ordnung an, für welche jener Punkt ein Doppelpunkt ist;** daraus folgt dann: **Jede Sinuskurve gehört einem System an mit den Charakteristiken $\mu = 2$, $\nu = 2$.**

Die durch Gleichung (2) dargestellte Kurve heißt die Tangenskurve oder Tangentoide[4]), (5) hingegen die Cotangentoide. Sie besteht aus unendlich vielen gleichen Zügen, die im Unendlichen zusammenhängen; die Schnitte mit der x-Axe sind Wendepunkte, wie bei der Sinuskurve. Die Tangente im Punkte (x, y) hat die Gleichung

$$\frac{Y-y}{X-x} = \frac{b^2+y^2}{ab},$$

woraus sich mit Leichtigkeit ein einfacher Ausdruck für die Subtangente und somit eine Konstruktion der Tangente herleiten läßt[5]). Die Gleichung selbst beweist: **Die von einem Punkte an die Tangenskurve gezogenen Tangenten haben ihre Berührungspunkte auf einer Kurve dritter Ordnung liegen, die durch jenen Punkt geht; jede Tangenskurve gehört daher einem System mit den Charakteristiken $\mu = 1$, $\nu = 2$ an.** Die Fläche, die zwischen der Kurve, der Abscissenaxe und der zur Abscisse x gehörenden Ordinate liegt, wird ausgedrückt durch $F = ab \log \sec \frac{x}{a}$; dagegen das durch Rotation dieser

---

1) G. Loria, *Le scienze esatte nell' antica Grecia*, Lib. I n. 67 Note (Modena 1893).

2) Lord Raleigh, *The Theory of Sound* I. (2. Aufl., London 1894) S. 21.

3) M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Math.* III. (2. Aufl., Leipzig 1901) S. 232.

4) „Figure des tangentes" wird sie genannt in Stone, *Analyse des infiniment petites* trad. Rondet (Paris 1735) S. 56.

5) Barrow, *Lectiones mathematicae* (Londini 1670); s. *The mathematical Works of Is. Barrow,* ed. Whewell (Cambridge 1860) S. 250.

Fläche um Ox erzeugte Volumen durch $V = \pi b^2 \left(a \operatorname{tg} \frac{x}{a} - x\right)$: diese Sätze, von Côtes aufgestellt, sind leicht zu beweisen[1]).

Schliefslich heifsen die durch die Gleichungen (3) und (6) dargestellten Kurven bezw. Secantoide[2]) und Cosecantoide. Die Tangente an die erstere im Punkte (x, y) hat die Gleichung

$$\frac{Y - y}{X - x} = \frac{y\sqrt{y^2 - b^2}}{ab};$$

daraus folgt: **Die von einem Punkte ihrer Ebene an die Secantoide gezogenen Tangenten haben ihre Berührungspunkte auf einer Kurve sechster Ordnung liegen, für welche jener Punkt ein Doppelpunkt ist; jede Secantoide gehört daher einem System mit den Charakteristiken $\mu = 2$, $\nu = 4$ an.** — Die von der Secantoide, den Koordinataxen und der zur Abscisse x gehörenden Ordinate begrenzte Fläche wird gegeben durch $F = ab \log\left(\sec \frac{x}{a} + \operatorname{tg} \frac{x}{a}\right) = ab \log \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2a}\right)$: dies fand Côtes[3]), und es kann durch eine Integration leicht nachgewiesen werden.

223. Wir halten es für überflüssig, noch länger bei diesen Kurven zu verweilen, da ihre Eigenschaften nicht sehr bemerkenswert sind, und wollen zum Schlusse dieses Kapitels einige Kurven erwähnen, die, weil sie durch Funktionen dargestellt werden, die aus trigonometrischen zusammengesetzt sind, als eine neue Kurvenfamilie gelten können, nämlich die hypertrigonometrischen Kurven.

Die älteste derselben hat die Gleichung

$$y = b\sqrt{\cos \frac{x}{a}};$$

Fermat lehrte die Tangente an sie zu finden[4]). Es folgt dann jene mit der Gleichung[5])

$$\cos my = k \cos mx,$$

alsdann die durch folgende Gleichung dargestellte[6])

$$a \sin y \cdot \sin my = b \sin x \cdot \sin nx + c;$$

ferner die, welche als Gleichung hat

$$y = a \cdot \sin \sin x,$$

---

1) *Harmonia mensurarum* (Cambridge 1722) S. 78 u. 81.

2) „Figure des secantes“ nach Stone-Rondet.

3) *Harmonia mensurarum*, S. 78.

4) Brief an P. Mersenne v. 22. Okt. 1638 (*Oeuvres de Fermat* II, S. 172).

5) Hülsen, *Über die Curve*: $\cos my = k \cos mx$ (Programm Naumburg, 1859).

6) A. Newton and A. W. Philipps, *On the transcendental curves whose equation is* $\sin y \cdot \sin my = a \sin x \cdot \sin nx + b$ (Trans. of the Connecticut Academy III, 1875).

welche die Doppelsinuskurve heifst[1]). Einfacher sind die Kurven

$$y = \sin^n x,$$

welche P. Mansion gerade oder ungerade Sinusoide nennt, jenachdem n gerade oder ungerade ist[2]). Es lassen sich unzählige andere ausdenken[3]); jedoch nicht alle bieten Interesse oder besitzen eine thatsächliche Wichtigkeit. Wir erwähnen schliefslich von ihnen noch die Lemniskatrix von Oekinghaus[5]), die durch folgende Gleichung definiert ist

$$\sin iy = i \cos x \quad \quad (7)$$

Dafs in ihr das Imaginäre nur scheinbar eintritt, erkennt man, wenn man sie folgendermafsen schreibt:

$$y = \log\left(\cos x + \sqrt{1 + \cos^2 x}\right) \quad \quad (7')$$

Aus dieser folgt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2 \cos x}{\sqrt{(1 + \cos^2 x)^3}}; \quad \quad (8)$$

demnach sind alle Punkte mit den Koordinaten $x = k\pi$, $y = \log(\sqrt{2} \pm 1)$ Kulminationspunkte, während die Punkte

$$x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \quad y = 0$$

Wendepunkte sind. — Bezeichnen wir, wie gewöhnlich, den Bogen mit s, den Krümmungsradius mit R, so folgt aus der Gleichung (8)

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}, \quad R = \frac{\sqrt{2}}{\cos x};$$

folglich nach Elimination von x

$$s = 2\int \frac{dR}{\sqrt{R^4 - 4}}, \quad \quad (9)$$

welches die natürliche Gleichung der Lemniskatrix ist. Erinnern wir uns nun der Betrachtungen in Nr. **218**, so schliefsen wir in ähnlicher Weise wie bei den Sinusspiralen und den Ribaucour'schen Kurven: **Die Lemniskatrix ist die Evolvente einer Kurve, bei welcher die Abscisse proportional einer Potenz des Bogens ist.**

---

1) E. Sang, *On the curve of second sines and its variations* (Edinburgh Proc. VIII, 1874).

2) *Aires des sinusoïdes et formule de Wallis* (Mathésis 2. Reihe, X, 1900).

3) Z. B. hat F. Franklin (*On some applications of circular coordinates,* Amer. Journ. XII, 1890) die Integralkurven der Differenzialgleichung $\sin x \cdot dx = \sin y \cdot dy$ untersucht.

4) S. die Abh. *Die Lemniskate* (Archiv der Math. Ser. 2. VII u. VIII, 1889).

Siebzehntes Kapitel.

Die logarithmische Kurve und die hypergeometrische Kurve von Wallis.

224. Die Gleichung

$$y = b \cdot {}^{B}\log \frac{x}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

stellt bei Variation der Konstanten a, b, B unendlich viele Kurven dar, von denen jede eine logarithmische Kurve oder Logistica genannt wird. Schreiben wir (1) in folgender Weise

$$x = aB^{\frac{y}{b}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

so sehen wir, dafs es anderseits berechtigt ist, sie mit dem von Leibniz und anderen gebrauchten Namen Exponentialkurve zu belegen. Da die Logarithmen entdeckt wurden, als die graphische Darstellung der Funktionen schon bekannt war, so mufste der Begriff der logarithmischen Kurve eine zeitgemäfse als auch leichte Sache sein; kein Wunder daher, dafs der Ursprung dieser Kurve nicht genau bestimmt ist. Cantor bemerkt bei dieser Gelegenheit, dafs Huygens, der die sehr schönen Eigenschaften dieser Kurve bekannt giebt[1]), von ihr als einer schon bekannten Linie spricht[2]), und in der That erwähnt Montucla[3]) ihr Vorkommen in dem Werke J. Gregory's, *Geometriae pars universalis* (Venetiae 1667); Torricelli spricht von ihr in einem Briefe an Michelangelo Ricci vom 24. Aug. 1644[4]) — woselbst die kürzlich veröffentlichte[5]) Abhandlung *De hemihyperbola logarithmica* citiert wird — und schliefslich löst sie eine von Debeaune 1638 dem Descartes vorgelegte Aufgabe[6]). Es geht hieraus hervor, dafs die Vaterschaft dieser Kurve eine ungewisse oder mehrfache ist; als Geburtsdatum kann man aber das Dezennium 1635—1645 annehmen.

Da $B = e^{ln B}$, so kann Gleichung (2) auch geschrieben werden

$$x = ae^{\frac{ln B}{b} y},$$

und man sieht, dafs die wesentlichen Konstanten in (1) und (2) nur zwei sind, und man kann daher immer annehmen, dafs $B = e$ sei.

1) S. die Abh. *De la cause de la pesanteur,* veröffentlicht 1690 in dem Anhange zum *Traité de la lumière.*

2) *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* III. (2. Aufl., Leipzig 1901) S. 232.

3) *Histoires des mathematiques,* Nouv. éd. II. (Paris 1799) S. 85.

4) G. Ghinassi, *Lettere fin qui inedite di Evangelista Torricelli precedute dalla vita di lui* (Faenza 1864) S. 17.

5) G. Loria, *Le ricerche inedite di Evangelista Torricelli sopra la curva logaritmica* (Bibl. math., 3. Ser. I, 1900).

6) Vgl. auch eine Note v. P. Tannery im *Intermédiaire* VII, 1900, S. 94—95.

Wenn wir daher zugeben, dafs nur die Neper'schen Logarithmen in Betracht kommen sollen, so können wir die (1) schreiben

$$y = b \log \frac{x}{a}; \qquad (3)$$

demnach ist

$$x = a e^{\frac{y}{b}}.\text{[1]} \qquad (4)$$

Hieraus folgt weiter, dafs

$$\frac{Y - y}{X - x} = \frac{b}{x} \qquad (5)$$

die Gleichung der Tangente im Punkte (x, y) ist. Wenn wir hierin $X = 0$ setzen, so zeigt sich: **Die Subtangente in Bezug auf die y-Axe ist bei der logarithmischen Kurve konstant,** nämlich $= -b$; es ist dies — wie leicht zu zeigen — eine für diese Kurve charakteristische Eigenschaft, die zuerst von E. Torricelli und dann von Huygens[2]) bemerkt worden ist. Wenn man in (5) X und Y als gegeben ansieht, so zeigt sie: **Die Berührungspunkte der von einem beliebigen Punkte an die logarithmische Kurve gezogenen Tangenten liegen auf einem Kegelschnitte, der durch jenen Punkt geht; folglich gehört jede derartige Kurve einem System mit den Charakteristiken $\mu = 1$, $\nu = 1$ an.**

Stellen wir uns ein räumliches kartesisches Koordinatensystem vor mit den drei zueinandsr senkrechten Axen Ox, Oy, Oz, und legen durch Ox eine beliebige Ebene σ, so können wir die Punkte derselben auf zwei Axen, die O als Anfangspunkt haben, beziehen, auf Ox als Abscissenaxe und die Senkrechte in O dazu als Ordinatenaxe. Sind nun x_1, y_1 die Koordinaten eines Punktes P_1 von σ, x, y die des Punktes P, welcher die Orthogonalprojektion von P_1 auf die xy-Ebene ist, so haben wir

$$a = x_1, \qquad y = \frac{y_1}{\cos\alpha},$$

wenn α der Winkel der Ebene σ gegen die xy-Ebene ist. Betrachten wir jetzt in der Ebene σ die Kurven mit den Gleichungen bezw.

$$\frac{x_1}{a} = \log \frac{y_1}{b}, \qquad \frac{y_1}{b} = \log \frac{x_1}{a},$$

so werden diese als Projektionen die Kurven haben

$$\frac{x}{a} = \log\cos\alpha + \log\frac{y}{b}, \qquad \frac{y}{b}\cos\alpha = \log\frac{x}{a}.$$

---

1) Schreibt man die Gl. (3) in der Form

$$\frac{y}{b} = \log\frac{b}{a} + \log\frac{x}{b},$$

so sieht man, dafs die Annahme $b = a$ nur einer besonderen Wahl des Koordinatenanfanges entspricht.

2) Die von Huygens blos ausgesprochenen Theoreme wurden zuerst von G. Grandi 1701 bewiesen (*Geometrica demonstratio theorematum Hugeniorum circa logisticam seu logarithmicam,* Florenz). M. s. auch G. Fontana, *Sopra il centro di gravità della logistica finita ed infinitamente lunga* (Torino Mem. X u. XI).

Nun stellt die erste eine zur ursprünglichen gleiche Kurve dar, die zweite eine der entsprechenden affine, und somit schliefsen wir auf folgenden Doppelsatz:

Die Projektion der logarithmischen Kurve auf eine jede Ebene welche $\left.\begin{matrix}\textbf{durch die Asymptote}\\ \textbf{eine zur Asymptote senkr. Axe}\end{matrix}\right\}$ geht, ist eine ihr $\left\{\begin{matrix}\textbf{kongruente}\\ \textbf{affine}\end{matrix}\right\}$ Kurve[1].

Die logarithmische Kurve nähert sich unbegrenzt dem negativen Teile der y-Axe, welche eine Asymptote der Kurve ist; da es für die Betrachtung bequemer ist, dafs die asymptotische Annäherung in die positive Richtung der x-Axe falle, so wollen wir die Gleichung (4) durch folgende gleichwertige ersetzen

$$y = be^{-\frac{x}{a}}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

alsdann ergiebt sich a als die Konstante für die Subtangente in Bezug auf die x-Axe. Es ergiebt sich dann weiter

$$\int_{x_0}^{X} y \cdot dx = b\int_{x_0}^{X} e^{-\frac{x}{a}} \cdot dx = a(y_0 - Y).$$

Es verhalten sich also die Flächen, gelegen zwischen der Kurve, der Asymptote und zwei Ordinaten, wie die Differenzen dieser Ordinaten, da sie durch das Produkt dieser Differenzen und der Subtangente gemessen werden[2]. Setzen wir im speziellen $X = \infty$, $Y = 0$, so wird die rechte Seite der obigen Gleichung $a \cdot y_0$, folglich: **Die zwischen der Kurve, der Asymptote und einer Ordinate gelegene unbegrenzte Fläche ist gleich der Hälfte des Rechtecks, welches diese Ordinate und die Subtangente zu Seiten hat.**

Diese eleganten Sätze über die Quadratur rühren von Torricelli und Huygens her; auch mit Fragen über die Kubatur haben diese sich befafst und erhielten bemerkenswerte Resultate.

Wenn die Fläche zwischen Kurve, Asymptote und der zu x gehörenden Abscisse um die Asymptote rotiert, so erzeugt sie das Volumen

$$V = \pi\int_{x}^{\infty} b^2 e^{-\frac{2x}{a}} \cdot dx = -\frac{\pi a b^2}{2}\left(e^{-\frac{2x}{a}}\right)_x^{\infty} = \frac{\pi a b^2}{2} e^{-\frac{2x}{a}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}\pi a y^2,$$

d. h. **ein Volumen gleich $\frac{3}{2}$ desjenigen Kegels, der zur Höhe die Subtangente und als Grundkreisradius jene Ordinate hat.** Lassen wir dieselbe Fläche um jene Ordinate rotieren, so bekommen wir einen anderen Ausdruck für das erzeugte Volumen; nehmen wir nämlich

---

1) Dem Verf. brieflich mitgeteilt von Oberlehrer J. Finsterbusch in Zwickau.

2) S. auch Craig, *The quadrature of logarithmic curve* (Phil. Trans. n°. 242, 1698).

jene Ordinate als y-Axe, so sehen wir, dafs jenes Volumen ausgedrückt wird durch

$$V' = \pi \int_{y=0}^{y=b} x^2 . dy = -\frac{b\pi}{a} \int_{x=\infty}^{x=0} x^2 e^{-\frac{x}{a}} \cdot dx = b\pi \left| (x^2 + 2ax + 2a^2) e^{-\frac{x}{a}} \right|_{\infty}^{0}$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{3} \pi a^2 b;$$

es ist also sechsmal so grofs als der Kegel, dessen Höhe jene Ordinate und dessen Grundkreisradius die Subtangente ist. Aus den beiden vorigen Sätzen ergiebt sich durch eine zweimalige Anwendung der Pappus-Guldin'schen Regel, **dafs der Schwerpunkt des ersteren Flächenstücks (begrenzt von der Kurve, Asymptote und der Ordinate) von der Asymptote einen Abstand gleich ein Viertel der Ordinate und von der Ordinate den Abstand gleich der Subtangente hat.**

Die Rektifikation der logarithmischen Kurve kann vermittelst Logarithmen ausgeführt werden. Dies hat der Marquis de l'Hôpital in einem Briefe vom 14. Dez. 1692, mit dem er seinen Briefwechsel mit Leibniz begann, bemerkt[1]; die bezügliche Rechnung wurde bald darauf und unabhängig von dem französischen Geometer durch Huygens[2] ausgeführt und von Côtes in seiner *Harmonia mensurarum* mitgeteilt (zugleich mit der Berechnung des durch Rotation der Kurve um die Asymptote erzeugten Volumens): das so erhaltene Resultat kann man in eine bemerkenswert elegante Form bringen durch Einführung der hyperbolischen Funktionen[3]. Ohne uns jedoch mit den Einzelheiten hierüber aufzuhalten, wollen wir einen beachtenswerten Satz betreffend die Rektifikation der logarithmischen Kurve beweisen[4].

Bezeichnet s wie gewöhnlich den Bogen der Kurve (6), so findet man

$$ds = \frac{dx}{a} \sqrt{a^2 + b^2 e^{-\frac{2x}{a}}},$$

daher

$$a(s - x) = \int dx \left(\sqrt{a^2 + b^2 e^{-\frac{2x}{a}}} - a \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Um die Integration ausführen zu können, setzen wir

$$\sqrt{a^2 + b^2 e^{-\frac{2x}{a}}} - a = z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

1) *Leibniz*, ed. Gerhardt, II, S. 216.

2) *Construction d'un problème de géométrie: Trouver une ligne droite égale a une portion donnée de ligne logarithmique* (Hist. des Ouvrages des Savants, Février 1693).

3) Barsotti, *Determinazione del centro di gravità di alcune linee piane coll' uso delle funzioni iperboliche* (Annali di Tortolini II, 1851). Vgl. Günther, *Die Theorie der gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen* (Halle a. S. 1881) S. 241.

4) P. Fufs, *Quantum differat longitudo arcus curvae ab asymptota, utraque in infinitum usque protensa, inquiritur* (Mém. de St. Pétersb. IX, 1824).

und erhalten

$$x - s = \int \frac{a+2}{2a+z} = z - a \log(2a+z) + Const.$$

Integriert man nun zwischen $x=0$ und $x=\infty$, oder was dasselbe ist wegen Gleichung (8), zwischen $z=\sqrt{a^2+b^2}-a$ und $z=0$, so erhält man

$$\lim_{x=\infty} (x-s) = \sqrt{a^2+b^2} - a + a \log \frac{2a}{\sqrt{a^2+b^2}+a} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Demnach **strebt die Differenz zwischen einem Bogen der log. Kurve und seiner Projektion auf die Asymptote einem endlichen Grenzwerte zu, wenn der eine Endpunkt des Bogens sich unbegrenzt der Asymptote nähert.** In dem speziellen Falle $a=b=1$ liefert Gl. (9)

$$\lim_{x=\infty} (x-s) = \sqrt{2} - 1 + \log \frac{2}{\sqrt{2}+1},$$

wie zuerst P. Fufs gefunden hat[1]).

Die Frage nach der Bestimmung der Gestalt der log. Kurve fällt zum Teil mit der Frage nach der Entscheidung, ob auch die negativen Zahlen ihre Logarithmen haben, zusammen, und im Bejahungsfalle, welcher Art dieselben seien, und diese Frage hat, wie bekannt, seit Leibniz' Zeiten die Mathematiker beschäftigt. Unter den in dieser Hinsicht gemachten Bemerkungen möge, wenigstens der Kuriosität halber, die von Joh. Bernoulli gemachte Deduktion nicht unerwähnt bleiben, der aus der Beziehung $\frac{dx}{x} = \frac{d(-x)}{-x}$ auf die Identität $\log x = \log(-x)$ schlofs; desgleichen möge bemerkt werden, dafs der erwähnte Geometer hinzufügte: „unde vides curvam Logarithmicam habere suam comparem ut ex. gr. Hyperbola“[2]). Die genannte Beweisführung ist verfehlt, nichtsdestoweniger wird oft angenommen, dafs die Kurve, um die es sich hier handelt, aufser einem kontinuierlichen Zuge oberhalb der x-Axe einen diskontinuierlichen sog. punktierten auf der anderen Seite derselben habe[3]); setzt man nämlich in Gleichung (6) $x=\frac{m}{n}$, so wird diese zu

$$y = be^{-\frac{m}{na}};$$

wenn nun n ungerade ist, so giebt die rechte Seite nur einen einzigen reellen Wert, wenn aber $n=2p$, so hat y zwei gleiche aber ent-

---

1) Dasselbe Resultat scheint schon früher erhalten zu sein, und zwar von Johann Albrecht, dem ältesten Sohne Leonhard Euler's: s. die *Adversaria mathematica*, veröffentlicht im I. Bde. von *L. Euleri Opera postuma mathematica et physica* (Petropoli 1862).

2) Brief an Leibniz vom 25. Mai 1712 (*Leibniz*, ed. Gerhardt, III, S. 887).

3) Vgl. Salmon-Fiedler, *Ebene Kurven*, II. Aufl. (Leipzig 1882) S. 374; W. Heymann, *Die Logarithmen negativer Zahlen bei der Auflösung transscendenter Gleichungen* (Hoffmann's Zeitschr. f. d. math. Unterr. XXXII, 1901, Heft 3).

gegengesetzte Werte; demnach würde die Kurve in der That unter ihren Punkten unendlich viele mit negativer Ordinate und mit Abscissen von der Form $x = \frac{m}{2p}$ besitzen. Gegen diese Auffassung mufs aber geltend gemacht werden, dafs die Exponentialfunktion, wie aus der Funktionentheorie bekannt ist, eine eindeutige Funktion ist; der punktierte Zug entsteht daher nur aus einer Verwechselung der Funktion $e^{-\frac{m}{2pa}}$ mit der Funktion $\sqrt{e^{-\frac{m}{pa}}}$. [1])

Schliefslich wollen wir bemerken, dafs man die Kurve leicht punktweise konstruieren kann. Setzt man nämlich in Gleichung (6) der Reihe nach ein $x = x_1, 2x_1, 3x_1, \ldots\ldots nx_1$ und bezeichnet mit $y_1, y_2, y_3 \ldots . y_n$ die zugehörigen Werte von y, so erhält man

$$y_1 = be^{-\frac{x_1}{a}},\quad y_2 = be^{-\frac{2x_1}{a}} \ldots\ldots,\quad y_{n-1} = be^{-\frac{(n-1)x_1}{a}},\quad y_n = be^{-\frac{nx_1}{a}},$$

und daraus ergiebt sich

$$y_n = \frac{y_1 \cdot y_{n-1}}{b},$$

wenn man also den Punkt (x_1, y_1) kennt, kann man die übrigen vermittelst ähnlicher Dreiecke konstruieren [2]).

Ist die logarithmische Kurve konstruiert, so hat man damit einen Weg, auch andere Kurven zu zeichnen; z. B. lassen die Gleichungen ((3) in Nr. **215**), durch welche wir die Debeaune'schen Kurven darstellten, erkennen, dafs diese konstruiert werden können, indem man die entsprechenden Ordinaten einer Geraden und einer Exponentialkurve addiert. Ähnlich kann man Kurven erhalten, deren Ordinaten die figurierten Zahlen darstellen [3]); halten wir nämlich daran fest, dafs indem Ausdrucke

$$\frac{m^{n+p} - m^{p-1}}{(m-1)^{p+1}} a - \sum_{i=1}^{i=p} \frac{n(n+1)\ldots(n+i-1)}{i!} \frac{m^{p-i}a}{(m-1)^{p-i+1}}$$

---

1) Diese scharfsinnige Bemerkung verdankt der Verf. Prof. E. Wölffing.

2) Der Leser wird die Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes der log. Kurve im § II des Aufsatzes von J. Sobotka, *Zur infinitesimalen Geometrie einiger Plankurven* finden (Prager Ber., 1898).

3) Das Problem, die Kurve zu finden, deren Ordinaten die Dreieckszahlen sind, wurde in den *Mémoires de Trevoux* vom Sept.—Okt. 1701 gestellt und alsbald von Carré gelöst (*Histoire de l'Acad. Royale des Sciences*, Année MDCCI) und dann von Fontenelle verallgemeinert (*Eléments de la géométrie de l'infini*, Paris 1727, Sect. VII, Prop. II) für alle Polygonalzahlen. Die im Texte aufgeworfene allgemeine Frage wurde von Girolamo und Giuseppe Rinaldis behandelt in *Saggio di una nuova teoria dei numeri figurati* (Raccolta di opusculi scientifici e filologici, XXXVIII, 1748; vgl. G. Loria, *Abh. zur Gesch. der Mathem.* IX. Heft, 1899, S. 265).

a, m, p Konstante seien, n aber variiere, so erhalten wir die Kurve

$$y = \frac{m^{x+p} - m^{p-1}}{(m-1)^{p+1}} a - \sum_{i=1}^{i=p} \frac{x(x+1)\ldots(x+i-1)}{i!} \frac{m^{p-1} a}{(m-1)^{p-i+1}},$$

zu der man offenbar gelangen kann durch Addition entsprechender Ordinaten einer logarithmischen und einer parabolischen Kurve.

225. Ebenso wie die trigonometrischen Kurven zur Betrachtung der hypertrigonometrischen führten, so wurde man auch von der logarithmischen Kurve zur Betrachtung anderer ähnlicher oder komplizierterer geführt; solche sind z. B. die mit den Gleichungen

$$y = be^{\frac{a}{x}}, \qquad y^2 = x^2 \log \frac{a^2}{x^2},$$

die O. Schlömilch betrachtet hat, wobei er die erste die reziproke logarithmische Kurve, die zweite die logarithmische Lemniskate benannte[1]); ferner gehören hierher die Kurven

$$y = x^x, \qquad y = \sqrt[x]{x},$$

deren erste Maria Gaetana Agnesi vermittelst der log. Kurve zu konstruieren lehrte[2]), während die andere wiederum ein Beispiel einer punktierten Kurve liefert[3]); dahin gehört ferner die von Gregor Fontana[4]) zu analytischen Zwecken definierte glockenförmige Kurve mit der Gleichung $y = (-\log x)^{\frac{1}{2}}$, sowie die durch

$$y^x = x^y$$

dargestellte Kurve, mit der sich zu beschäftigen selbst Euler[5]) nicht unter seiner Würde hielt. Ferner wurden die Kurven

$$xy = e^x, \qquad y = e^{e^x}, \qquad x^y = e$$

von G. Bidone[6]) erforscht, und die mit der Gleichung

$$y = \log \frac{1+x}{1-x}$$

---

1) *Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis,* I. T. 8. Aufl. (Leipzig 1878) S. 101—3.

2) *Instituzioni analitiche ad uso della giuventù,* II. (Milano 1748) S. 839.

3) Hessel, *Ueber das merkwürdige Beispiel einer zum Teil punktiert gebildeten Curve, das der Gleichung entspricht* $y = \sqrt[x]{x}$ (Archiv der Math. XIV, 1850); H. Scheffler, *Ueber die durch die Gleichung* $y = \sqrt[x]{x}$ *dargestellten Kurven* (Das. XVI, 1851).

4) *Sopra la pretesa distinzione fra il nulla reale e il nulla immaginario* (Mem. de la Soc. Ital. VIII, 1799).

5) S. Kap. 21 des 2ten Teiles der *Introductio in Analysin infinitorum* (Lausannae 1748); daselbst ist die Kurve vermittelst der folgenden, eleganten parametrischen Darstellung untersucht worden:

$$x = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t, \qquad y = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1}.$$

6) *Recherches sur la nature de la transcendente* $\int \frac{dz}{\log z}$ (Torino Mem. 1805—8).

von Haas[1]). Schliefslich erwähnen wir noch die Additions- und Subtraktions-logarithmischen Kurven (logarithmique d'addition et de subtraction der Franzosen), die durch die Gleichungen

$$x = \log t, \qquad y = l \log\left(1 \pm \frac{1}{t}\right)$$

definiert wird und sich in Fragen des angewandten Mathematik als nützlich erweist[2]), und die Kurve der logarithmischen Sinus dargestellt durch die Gleichung

$$y = \log \sqrt{1 - x^2},$$

von der auch die Evolute bestimmt worden ist[3]). Weiter auf diese Art von Kurven einzugehen verbietet uns die Überfülle des Stoffes. Desgleichen erwähnen wir nur die hypergeometrische Kurve, die durch $y = x!$ definiert ist, der Euler eine seiner kleineren Abhandlungen widmete[4]), und die nicht zu verwechseln ist mit der Kurve gleichen Namens, durch welche Multedo[5]) geometrisch die Theorie der faktoriellen Funktionen von Kramp und Vandermonde[6]) illustrierte; da die hypergeometrische Kurve durch die Gleichung $y = \Gamma(x+1)$ definiert werden kann, so liefert sie eine geometrische Darstellung der Euler'schen Integrale zweiter Gattung[7]). In dieser Hinsicht hat sie Ähnlichkeit mit einer Kurve, von der häufig in dem gelehrten Briefwechsel Huygens'[8]) die Rede ist, woselbst sie als die Wallis'sche Kurve[9]) bezeichnet wird. Es ist eine Kurve, von der man dazumal nur einzelne Punkte gezeichnet, und deren Gleichung man vergeblich gesucht hatte. Diese läfst sich aber in folgender Weise auffinden:

Die Wallis'sche Kurve ist durch den Umstand definiert, dafs die Punkte derselben mit den Abscissen $1, 2, 3, 4, \ldots\ldots.$ als bezügliche Ordinaten die Gröfsen $1, \frac{2\cdot 3}{1}, \frac{2\cdot 3}{1}\cdot\frac{2\cdot 5}{2}, \frac{2\cdot 3}{1}\cdot\frac{2\cdot 5}{2}\cdot\frac{2\cdot 7}{3}, \ldots\ldots$ haben. Wenn man das erste Wertepaar ausscheidet, so kann man

1) Kleyer, *Lehrbuch der Differentialrechung,* III. T. (Stuttgart 1894) S. 116.

2) R. Mehmke, *Neue Methode, beliebige numerische Gleichungen mit einer Unbekannten numerisch aufzulösen* (Civilingenieur, 2. Reihe, XXXV, 1889); M. d'Ocagne, *Traité de nomographie* (Paris 1899) S. 384.

3) L. G. Barbour, *Evolute to the curve of logarithmic sines* (The Analyst IV, 1872).

4) *De curva hypergeometrica hac aequatione expressa* $y = 1.2\cdot 3 \ldots . x$ (Novi Comment. Petropolit. XIII, 1769).

5) *Memoria sulle curve hypergeometriche* (Mem. dell' Accad. di Genova, III, 1814).

6) S. z. B. den Artikel „Factorielle" im *Dictionnaire des Sciences math.* von Montferrier.

7) Serret-Harnack, *Integralrechnung,* 2. Aufl. (Leipzig 1899) S. 189.

8) S. die unter der Rubrik „courbe de Wallis" angeführten Stellen im I. B. der *Oeuvres Complètes de C. Huygens,* insbesondere S. 210.

9) Berechtigt ist dieser Name, weil die Kurve in der Prop. CXCII der *Arithmetica infinitorum* (1655) betrachtet wird.

auch sagen, dafs die Wallis'sche Kurve durch Punkte mit folgenden Koordinaten geht

$$x = \xi + 1, \qquad y = \frac{2\cdot 3}{1}\cdot\frac{2\cdot 5}{2}\cdots\cdots\frac{2(2\xi+1)}{\xi} = \frac{2^{\xi}\cdot 3\cdot 5\ldots(2\xi+1)}{\xi\,!},$$

wo ξ ganzzahlig und ≥ 1 ist. Beachtet man nun, dafs

$$(2\xi+1)\,! = 3\cdot 5\cdot 7\ldots(2\xi+1)\cdot 2^{\xi}\cdot\xi\,!,$$

so kann man schreiben

$$y = \frac{(2\xi+1)\,!}{(\xi\,!)^2}.$$

Führt man nun die Gammafunktion ein, so erhält man

$$y = \frac{\Gamma(2\xi+2)}{\Gamma^2(\xi+1)}, \quad \text{oder} \quad y = \frac{\Gamma(2x)}{\Gamma^2(x)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Dies ist die gesuchte Gleichung; sie gilt für alle positiven Werte von x; da im allgemeinen

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

so kann man (12) auch schreiben

$$y = \frac{1}{B(x,x)},$$

folglich kann die Wallis'sche Kurve zur geometrischen Darstellung der Euler'schen Integrale erster Gattung benutzt werden.

Achtzehntes Kapitel.

Die aufserordentlichen Kurven.

226. Der Gedanke, eine Funktion graphisch darzustellen, hat zu vielen neuen Kurven geführt, von denen die hervorragendsten in den beiden vorigen Kapiteln definiert wurden; Kurven, die, so verschieden sie auch in ihrem Bau waren, dennoch den allgemeinen Ideen, die man von einer Kurve zu haben pflegt, entsprechen. Mit den Fortschritten der mathematischen Analysis wurde der Begriff der Funktion stufenweise erweitert und modifiziert; man entdeckte so Funktionen, die ganz unerwartete Eigentümlichkeiten zeigten, und indem man zu ihrer geometrischen Darstellung überging, gelangte man zur Betrachtung von Kurven, die Eigenheiten zeigen, die in offenem Widerspruch mit den bisher erhaltenen allgemeinen Eigenschaften der Kurven stehen. Die Hauptbedeutung, die diese sogenannten aufserordentlichen Kurven (crinkly curves der englischen Mathematiker[1]) für den Geometer haben, liegt darin, dafs sie die Not-

---

1) E. H. Moore, *On certain crinkly curves* (Trans. of the Amer. math. Soc. 1. 1900).

wendigkeit klargelegt haben, bei dem Wortlaut einiger Theorien gewisse Einschränkungen zu machen. Die bemerkenswertesten unter diesen Kurven verdienen daher in einem geometrischen Werke wie dem vorliegenden wenigstens einen Hinweis[1]).

I. Die älteste und berühmteste ist die durch die Gleichung

$$y = \sum_{n=0}^{n=\infty} b^n \cos \pi (a^n x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

dargestellte Kurve, wo a eine ganze, gerade Zahl > 1, und b eine reelle positive Gröfse < 1 ist. Es läfst sich zeigen, dafs die linke Seite eine immer kontinuierliche Funktion von x ist, dafs jedoch, wenn das Produkt ab eine gewisse Grenze überschreitet, sie in keinem Punkte eine bestimmte Abgeleitete hat. Es ist dies eine analytische Thatsache von aufserordentlicher Wichtigkeit, durch deren Mitteilung Weierstrafs[2]) ein altes Vorurteil, dafs jede kontinuierliche Funktion eine Abgeleitete besitze, beseitigte. Die durch Gleichung (1) dargestellte Weierstrafs'sche Kurve läfst daher, obwohl sie kontinuierlich verläuft, dennoch in allen Punkten keine bestimmte Tangente zu. Wie dies möglich sei, wurde von Chr. Wiener aufgeklärt[3]), aus dessen Untersuchungen hervorgeht, dafs diese Kurve innerhalb jedes endlichen Intervalles unzählig viele Oscillationen ausführt[4]).

II. Dieselbe Eigenschaft, keine bestimmte Tangente zu besitzen, hat die sogenannte Kurve **H** von Boltzmann[5]), die, weil sie empirisch definiert wird und bis jetzt noch keine analytische Darstellung gefunden hat, eigentlich nicht dem Gebiete angehört, das wir hier durchforschen.

---

1) Die soeben über diese absonderlichen Kurven im allgemeinen gemachten Bemerkungen geben uns Gelegenheit zu bemerken, dafs Plateau ein Verfahren angegeben hat, um die Gleichungen von unzählig vielen Kurven anzugeben, die einen point saillant oder einen der von ihm so genannten point de dedoublement haben. M. s. Plateau, *Quelques exemples curieux de discontinuité en analyse* (Belgique Bull. 2. Ser. XLIII, 1877); Mansion, *Sur les points de dedoublement ds M. J. Plateau* (Darboux Bull. 2. Ser. II, 1878) und *Sur les nouveaux points singuliers des courbes planes* (Mathésis III, 1883); Vogel, *Note über die Discontinuitäten bei Curven* (Zeitschrift f. Math. XXVI, 1881).

2) P. du Bois-Raymond, *Versuch einer Classification der willkürlichen Funktionen reeller Argumente* (Crelles Journ. LXXIX, 1874, S. 29).

3) *Geometrische und analytische Untersuchungen der Weierstrafs'schen Funktion* (Das. XC, 1881).

4) In gewisser Hinsicht analog zur Weierstrafs'schen Kurve ist diejenige, deren Konstruktion A. Köpke in den Aufsätzen *Ueber Differentiirbarkeit und Anschaulichkeit der stetigen Funktionen* (Math. Ann. XXIX, 1897) und *Ueber eine durchaus differentiirbare stetige Funktion mit Oscillationen in jedem Intervalle* (Das. XXXIV, 1897) anführt.

5) L. Boltzmann, *Über die sogenannte* H-*Kurve* (Math. Ann. L, 1898).

III. G. Peano[1]) hat gelehrt, zwei Funktionen φ und ψ zu konstruieren, die eindeutig und stetig sind, für eine reelle Variabele t derart, daſs, wenn t innerhalb des Intervalls $(0 \ldots . 1)$ variiert, φ und ψ alle Wertepaare innerhalb desselben Intervalles annehmen; daher stellen die Gleichungen

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \qquad \ldots \ldots \quad (2)$$

eine Kurve dar, die durch die sämtlichen Punkte eines Quadrates hindurchgeht, und somit die ganze Fläche desselben ausfüllt.

IV. Schlieſslich hat Gravé[2]) den Namen polygonale Linien denjenigen gegeben, die durch die Gleichung

$$y = \int_0^x f(x)\,dx$$

dargestellt werden, wenn $f(x)$ eine gewisse arithmetische Funktion ist, die für unzählig viele Werte von x keine Abgeleitete besitzt, während sie für gewisse andere Werte gleich Null ist. Solche Kurven bestehen dann aus unendlich vielen geradlinigen Teilen; sie haben in jedem Punkte eine bestimmte, aber von Punkt zu Punkt wechselnde Tangente; für sie hört der gewöhnliche Begriff der Krümmung auf, da für unendlich viele Werte von x nicht die Gleichung besteht

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f'(x).$$

Neunzehntes Kapitel.

Die Kurven W von Klein und Lie.

227. Kehren wir auf ein rein geometrisches Gebiet zurück, indem wir dieses Kapitel sowie das folgende gewissen Kurven widmen, die ihre Herkunft der Theorie der Korrespondenzen und Abbildungen verdanken.

Wir betrachten eine projektive Transformation $\mathfrak{T}$ mit drei getrennten Ordnungspunkten A_0, A_1, A_2[3]). Sie kann als durch folgende Gleichungen definiert aufgefaſst werden

$$\varrho x_0' = a_0 x_0, \qquad \varrho x_1' = a_1 x_1, \qquad \varrho x_2' = a_2 x_2, \quad \ldots \quad (1)$$

---

1) *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane* (Das. XXXVI, 1890). Vgl. Hilbert, *Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück* (Das. XXVIII, 1891) und E. Cesàro, *Sur la représentation analytique des regions et des courbes qui les remplissent* (Darboux Bull. 2. Reihe. XXI, 1897).

2) *Sur les lignes composées de parties rectilignes* (Comptes rendus, CXXVII, 1898).

3) Die Fälle, in denen die Fundamentalpunkte nicht getrennt sind, würden sich in ähnlicher Weise behandeln lassen; sie führen jedoch nicht zu neuen, anderen Kurven, wie im allgemeinen Falle.

wo ϱ ein Proportionalitätsfaktor ist. Setzt man

$$\frac{x_1}{x_0} = x, \quad \frac{x_2}{x_0} = y; \quad \frac{x_1'}{x_0'} = x', \quad \frac{x_2'}{x_0'} = y'; \quad \frac{a_1}{a_0} = a, \quad \frac{a_2}{a_0} = b,$$

so können jene drei Gleichungen durch die beiden folgenden ersetzt werden

$$x' = ax, \quad y' = by \quad \text{. . . . .} \quad (2)$$

Es sei nun der Punkt $P'(x', y')$ der transformierte von $P(x, y)$; wenden wir auf ihn von neuem die Transformation $\mathfrak{T}$ an, so erhalten wir den Punkt $P''(x'', y'')$, dessen Koordinaten sind

$$x'' = a^2 x, \quad y'' = b^2 y.$$

Verfahren wir ebenso wieder mit dem Punkte P'' und fahren in derselben Weise fort, so gelangen wir nach n Operationen zu einem Punkte $P^{(n)}$, dessen Koordinaten sind

$$x^{(n)} = a^n x, \quad y^{(n)} = b^n y \quad \text{. . . . . . .} \quad (3)$$

Ist nun die durch $\mathfrak{T}$ bewirkte Transformation eine unendlich kleine, so werden die Punkte $P, P', P'', \ldots\ldots, P^{(n)}, \ldots\ldots$ in unendlich kleinen Abständen aufeinander folgen, d. h. sie werden eine Linie bilden. Sie ist die Trajektorie der eingliedrigen Transformationsgruppe, die durch die unendlich kleine Transformation $\mathfrak{T}$ erzeugt wird; daher wird sie durch alle Transformationen jener Gruppe in sich selbst transformiert werden[1]). Dem Beispiele von F. Klein und S. Lie[2]) folgend, welche diese Linie von Grund aus zuerst untersucht haben, wollen wir sie die Kurve **W** (nach dem Anfangsbuchstaben des Wortes Wurf) nennen und $A_0 A_1 A_2$ das Fundamentaldreieck. Um die Gleichung derselben zu finden, beachten wir, dafs bei der vorliegenden Annahme die Konstanten a und b sich von der Einheit nur um eine unendlich kleine Gröfse unterscheiden dürfen, daher werden $\log a$ und $\log b$ unendlich klein von derselben Ordnung sein. Da nun

$$a^n = e^{n \log a} = 1 + n \log a + \cdots\cdots,$$
$$b^n = e^{n \log b} = 1 + n \log b + \cdots\cdots,$$

so können wir die Gleichung (3) auch schreiben

$$x^{(n)} - x = (n \log a + \cdots\cdot)x, \qquad y^{(n)} - y = (n \log b + \cdots\cdot)y$$

wegen der gemachten Voraussetzungen darf man nun setzen

$$x^{(n)} - x = dx, \quad y^{(n)} - y = dy; \quad n \log a = \alpha \cdot d\lambda, \quad n \log b = \beta \cdot d\lambda,$$

1) Wir benutzen hier die Begriffe und Benennungen der Theorie der Gruppen von Lie, da dieselben heutzutage die allgemein üblichen sind.

2) S. die Abh. *Ueber diejenigen Curven, welche durch ein geschlossenes System von unendlich vielen vertauschbaren Transformationen in sich übergehen* (Math. Ann. IV, 1871). Die Kurven **W** finden sich schon in der Schrift von G. Battaglini, *Sulle involuzioni dei diversi ordini nei sistemi di seconda specie* (Atti dell Accad. di Napoli, II, 1865) und in der Arbeit von A. Clebsch und P. Gordan, *Ueber biternäre Formen mit contragredienten Variabelen* (Math. Ann. I, 1868).

wo α und β endliche Gröfsen sind. Vernachlässigen wir nun die unendlich kleinen Gröfsen höherer Ordnung, so haben wir demnach

$$dx = x \cdot \alpha \cdot d\lambda, \qquad dy = y \cdot \beta \cdot d\lambda,$$

folglich ist

$$\frac{dx}{\alpha x} = \frac{dy}{\beta y} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

die Differenzialgleichung der Kurve **W**. Durch Integration derselben bekommt man

$$\frac{\log x - \log \xi}{\alpha} = \frac{\log y - \log \eta}{\beta},$$

wo ξ und η die Koordinaten des Ausgangspunktes der Kurve sind, oder auch

$$\left(\frac{x}{\xi}\right)^{\alpha} = \left(\frac{y}{\eta}\right)^{\beta}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Schreiben wir nun für x und y wieder ihre Werte und setzen der gröfseren Symmetrie wegen

$$-\alpha = c_1, \qquad \beta = c_2, \qquad \alpha - \beta = c_0,$$

weshalb dann

$$c_0 + c_1 + c_2 = 0$$

ist, so wird die Gleichung (4) werden zu

$$x_0^{c_0} \cdot x_1^{c_1} \cdot x_2^{c_2} = Const. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

und auch diese Gleichung kann in gleicher Weise wie (4) als allgemeine Gleichung der Kurve **W** gelten.

Wenn die Seite $A_2 A_3$ des Fundamentaldreiecks im Unendlichen liegt (auf welchen Fall man die Kurve immer durch Projektion zurückführen kann), so sind x und y die gewöhnlichen kartesischen Koordinaten, und infolge von Gleichung (4) werden die Kurven **W** zu Parabeln, gewöhnlichen oder interscendenten, jenachdem die Exponenten α, β rational oder irrational sind, und da man also diesen speziellen Fall durch Projektion immer herbeiführen kann, so folgt: **Jede Kurve W ist die Projektion einer im allgemeinen interscendenten Parabel.** Wegen Gl. (4) lautet die Gleichung der Tangente an die Kurve (5) im Punkte (x, y)

$$\frac{Y - y}{X - x} = \frac{\beta y}{\alpha x}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Hieraus können wir verschiedene Folgerungen ziehen. Sehen wir X, Y als gegeben an, so folgt: **Die Berührungspunkte der Tangenten, die man von einem beliebigen Punkte der Ebene an eine interscendente Parabel ziehen kann, liegen auf einem durch diesen Punkt gehenden Kegelschnitte.** Da diese Eigenschaft durch Projektion erhalten bleibt, so können wir im allgemeinen schliefsen: **Jede Kurve W gehört einem Systeme mit den Charakteristiken $\mu = 1$, $\nu = 1$ an**[1];

---

1) Fouret, *Sur quelques propriétés des systèmes de courbes* $(\mu = 1, \ \nu = 1)$ und *Interprétation géométrique de l'équation* $L(x\,dy - y\,dx) - M\,dy + N\,dx = 0$, *dans laquelle* L, M, N *designent des fonctions linéaires de* x, y (C. R. LXXVIII, 1874).

leicht läfst sich hieraus folgern, dafs jene die allgemeinsten von dieser Beschaffenheit sind[1]).

Bezeichnen wir einen Kurvenpunkt (x, y) mit P, die Schnitte der zugehörigen Tangente mit den Koordinataxen mit S, T und den unendlich fernen Punkt derselben mit U und bezeichnen durch Accente die Projektionen dieser Punkte auf Ox von dem unendlich fernen Punkte von Oy aus, so haben wir

$$(PSTU) = (P'SOU') = \left(x, \frac{\alpha-\beta}{\alpha}x, 0, \infty\right) = \frac{\alpha-\beta}{\beta}.$$

Folglich ist das Doppelverhältnis $(PSTU)$ konstant, und verallgemeinern wir diese Eigenschaft durch Projektion für alle Kurven **W**, so können wir sagen: **Für jede Kurve W ist das Doppelverhältnis eines Kurvenpunktes und der drei Schnittpunkte der zugehörigen Tangente mit den Seiten des Fundamentaldreiecks konstant.** Dieser Satz begründet den Namen „Kurven W" (S. 553), sowie den „anharmonische Kurven", der von Halphèn[2]) den hier betrachteten Kurven beigelegt wurde; es giebt auch einen hierzu dualen Satz, da man leicht erkennt, dafs die Tangentialgleichung der Kurve **W** dieselbe Form hat, wie die Punktgleichung.

228. Unter den Kurven **W** giebt es eine spezielle, uns schon bekannte: Die logarithmische Spirale (s. Nr. **192**, Gl. (7)); in diesem Falle liegen zwei von den Ecken des Fundamentaldreiecks in den Kreispunkten, und die betrachteten projektiven Transformationen sind Rotationen um die dritte Ecke. Diese fundamentale Bemerkung dient zur Erklärung, wie diese Kurve sich durch eine so grofse Zahl von

---

1) Wir sagen „leicht", weil ein System mit den Charakteristiken $\mu = 1$, $\nu = 1$ durch eine Differenzialgleichung vom Typus (vgl. Nr. **171**)

$$L(x\,dy - y\,dx) - M\,dy + N\,dx = 0$$

definiert werden kann, wo L, M, N lineare Funktionen der Koordinaten sind; diese ist nach einer heute als klassisch geltenden, von Jacobi erfundenen Methode integrierbar (Crelles Journ. XXIV; s. z. B. Boole, *Differential Equations* 4. Aufl. 1877, S. 85). — Die Untersuchung derjenigen Systeme, deren Charakteristiken $\mu = 1$, $\nu = 2$ sind, ist ähnlicherweise gleichbedeutend mit der Integration der Differentialgleichung

$$Ap^2 + Bp\alpha + C\alpha^2 + Dp + E\alpha + F = 0, \qquad \text{wo } p = \frac{dy}{dx} \text{ und } \alpha = y - px,$$

ferner $A, \ldots, F$ lineare Funktionen der Koordinaten x, y sind. Sie wurde von A. Legoux ausgeführt (*Étude analytique et géométrique d'une famille des courbes representée par une équation differentielle du premier ordre.* Thèse, Paris 1878) und führte zur Entdeckung der durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{2} = C\frac{(x+a)^{n+1}}{(y-a)^{n-1}} + \frac{(y+na)^2}{2(n^2-1)a^2}$$

dargestellten Kurven; diese sind offenbar algebraisch oder transscendent, jenachdem n rational ist oder nicht.

2) M. s. z. B. *Etude sur les points singuliers des courbes algébriques planes* (Paris 1883) S. 53.

Transformationen immer wieder selbst erzeugt[1]), und kann (und ist auch schon) benutzt werden, neue Eigenschaften derselben zu entdecken.

Unter den Kurven **W** findet sich ferner eine neue Kurve, die der Untersuchung wert erachtet und mit einem besonderen Namen belegt wurde: in barycentrischen Koordinaten x_0, x_1, x_2 wird sie durch die Gleichung

$$\frac{x_0}{a_0^{\lambda}} = \frac{x_1}{a_1^{\lambda}} = \frac{x_2}{a_2^{\lambda}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (8)$$

dargestellt, wo λ ein Parameter, und a_0, a_1, a_2 die Seiten des Fundamentaldreiecks sind; nach einem Vorschlage von G. de Longchamps[2]) heifst sie die Dreieckspotentialkurve (Potentielle triangulaire). Zum Beweise, dafs sie eine Kurve **W** ist, nehmen wir an, dafs $a_0 > a_1 > a_2$, und setzen

$$\log\frac{a_1}{a_2} = c_0, \qquad \log\frac{a_2}{a_0} = c_1, \qquad \log\frac{a_0}{a_1} = c_2,$$

weshalb zwischen den Konstanten c noch die Relation $c_0 + c_1 + c_2 = 0$ besteht. Aus (8) folgt nun

$$\log\left(\frac{x_1}{x_0}\right) = -\lambda c_2, \qquad \log\left(\frac{x_2}{x_0}\right) = \lambda c_1$$

und durch Elimination von λ

$$c_1 \log\left(\frac{x_1}{x_0}\right) + c_2 \log\left(\frac{x_2}{x_0}\right) = 0$$

oder

$$x_1^{c_1} \cdot x_2^{c_2} = x_0^{c_1 + c_2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (9)$$

oder, da $c_0 + c_1 + c_2 = 0$,

$$x_0^{c_0} \cdot x_1^{c_1} \cdot x_2^{c_2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (9')$$

Da nun diese vom Typus (6) ist, so ist der ausgesprochene Satz bewiesen. — Schreibt man die Gleichung (9) in folgender Weise:

$$x_1^{\frac{c_1}{c_2}} \cdot x_2 = x_0^{1 + \frac{c_1}{c_2}},$$

so sieht man, dafs die Dreieckspotentialkurve eine algebraische Kurve wird, wenn eines der Verhältnisse zwischen den Konstanten c ein rationales ist. — Im allgemeinen zeigen die Gleichungen (8), dafs die Dreieckspotentialkurve durch viele bemerkenswerte Punkte des Fundamentaldreiecks hindurchgeht: für $\lambda = 0$ bekommen wir den Schwerpunkt desselben, für $\lambda = 1$ den Mittelpunkt des Inkreises, für $\lambda = 2$ den Lemoine'schen Punkt u. s. w. Man beachte ferner, dafs aus $a_0 > a_1 > a_2$, sich ergiebt

---

1) Zum erstenmal dargelegt und ausführlich entwickelt in der oben angeführten Abhandlung von Klein und Lie.

2) S. die Abh. *Sur la potentielle triangulaire* (Mathésis VI, 1886).

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{x_2}{x_0} = \lim_{\lambda=\infty} \left(\frac{a_2}{a_0}\right)^{\lambda} = 0, \qquad \lim_{\lambda=\infty} \frac{x_1}{x_0} = \lim_{\lambda=\infty} \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{\lambda} = 0,$$

$$\lim_{\lambda=-\infty} \frac{x_0}{x_2} = \lim_{\lambda=+\infty} \left(\frac{a_2}{a_0}\right)^{\lambda} = 0, \qquad \lim_{\lambda=-\infty} \frac{x_1}{x_2} = \lim_{\lambda=\infty} \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\lambda} = 0,$$

und dies zeigt: **Die Dreieckspotenzialkurve geht durch die beiden Ecken des Fundamentaldreiecks, die der gröfsten und der kleinsten Seite gegenüberliegen.** Sie berührt in diesen Punkten die Seite von der mittleren Länge[1]. — Diese Eigenschaften mögen genügen, die Wichtigkeit der betrachteten Kurve für die moderne Geometrie des Dreiecks klarzulegen.

Eine andere bemerkenswerte Kategorie der Kurven **W** wird gebildet von denjenigen Linien, die in rechtwinkligen Koordinaten durch die Gleichung

$$x^{\lambda} \cdot y^{\mu} = a \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

dargestellt werden unter der Bedingung, dafs

$$\lambda + \mu = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Sie erhielten den Namen polytropische Kurven, welcher von Zeuner in seiner klassischen *Technischen Thermodynamik* 1887—89 zunächst den Kurven $x^n y = C$ gegeben war. Einige interessante Eigenschaften derselben sollen hier mitgeteilt werden[2]. Die beiden Koordinataxen sind die Asymptoten der Kurve. Die allgemeine Gleichung der Tangente lautet

$$Y - y + \frac{\lambda y}{\mu x}(X - x) = 0,$$

daher wird der Winkel τ der Tangente mit der x-Axe gegeben durch

$$\operatorname{tg} \tau = -\frac{\lambda y}{\mu x} \cdot \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Sind nun (Taf. XVI, Fig. 126) die Schnitte der Tangente mit den Koordinataxen A_1 und A_2, so findet man alsbald

$$OA_1 = \frac{x}{\lambda}, \qquad OA_2 = \frac{y}{\mu} \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

und da man wegen (11) setzen kann:

$$\lambda = \cos^2 \alpha, \qquad \mu = \sin^2 \alpha, \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

so hat man weiterhin

$$OA_1 = \frac{x}{\cos^2 \alpha}, \qquad OA_2 = \frac{y}{\sin^2 \alpha} \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

und wenn man die Strecke $A_1 A_2$ mit t bezeichnet

$$t^2 = \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\mu^2} = \frac{x^2}{\cos^4 \alpha} + \frac{y^2}{\sin^4 \alpha} \cdot \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

---

1) Cesàro, *Lezioni di geometria intrinseca* (Napoli 1896) S. 104—106.

2) F. Kosch, *Normale und Krümmungsmittelpunkt der polytropischen Kurven* (Zeitschrift f. Math. XLV, 1900).

Ist nun P der Berührungspunkt der Tangente $A_1 A_2$, so sieht man, dafs

$$PA_1 = \frac{y}{\sin\tau}, \quad PA_2 = -\frac{x}{\cos\tau}, \quad \text{daher} \quad \frac{PA_1}{PA_2} = \frac{\lambda}{\mu};$$

woraus folgt: $PA_1 = \mu t, \quad PA_2 = \lambda t.$ . . . . . . (17)

Ziehen wir nun den dem Dreiecke $OA_1 A_2$ umbeschriebenen Kreis und zeichnen in ihm die durch P zu $A_1 A_2$ senkrechte Sehne $B_1 B_2$, so haben wir:

$$\overline{PB_1}^2 = \overline{PB_2}^2 = \overline{PA_1} \cdot \overline{PA_2},$$

daher wegen (17) $PB_1 = PB_2 = t\sqrt{\lambda\mu}$. . . . . (18)

Ziehen wir nun die Geraden OB_1 und OB_2, so ist

$$\operatorname{tg} B_1 A_2 P = \operatorname{tg} B_2 A_2 P = \frac{PB_1}{PA_1} = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} = \operatorname{tg}\alpha;$$

Nun ist $\sphericalangle B_1 A_2 P = \sphericalangle B_1 A_2 A_1 = \sphericalangle B_1 O A_1$

und $\sphericalangle B_2 A_2 P = \sphericalangle B_2 A_2 A_1 = \sphericalangle B_2 O A_1$;

folglich $\sphericalangle B_1 O A_1 = A_1 O B_2 = \alpha$,

und daher sind die Geraden $OB_1 = l_1$, $OB_2 = l_2$ unabhängig von dem Punkte P der Kurve; man nennt sie die Axen der polytropischen Kurve.

Mit Benutzung dieser Bezeichnung kann man die obigen Ausführungen in folgende Sätze zusammenfassen: 1) **Das zwischen den Axen gelegene Stück der Normalen einer polytropischen Kurve wird von der Kurve selbst halbiert. 2) Das von einer Tangente und den beiden Asymptoten, sowie das von der zugehörigen Normale und den beiden Axen gebildete Dreieck sind beide demselben Kreise einbeschrieben.**

Wir wollen denjenigen Punkt S der Kurve, in welchem sie von der Axe l_2 geschnitten wird, den Scheitel der Kurve nennen. Da die Gleichung der Axe $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha$ ist, so hat man für den Punkt S wegen der Gl. (12) $\operatorname{tg}\tau = -\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; daher schneidet die Kurve diese Axe senkrecht.

Wir fällen jetzt vom Punkte P die Lote auf die Asymptoten, welche die Axen bezw. in D_1 und D_2 treffen mögen. Man erkennt alsbald, dafs die in diesen Punkten errichteten Senkrechten die Asymptoten in A_1 bezw. A_2 schneiden; alsdann hat man

$$\left.\begin{aligned} OB_1 &= \frac{x}{\cos\alpha} - \frac{y}{\sin\alpha} = OD_1 - OD_2, \\ OB_2 &= \frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\cos\alpha} = OD_1 + OD_2. \end{aligned}\right\} \quad . . . . (19)$$

Für den Krümmungsradius R findet man leicht den Wert

$$R = \frac{\lambda^2 \mu^2 t^3}{xy};$$

wegen (13) und (17) kann man diesen nun schreiben

$$R = \frac{\overline{PA_1} \cdot \overline{PA_2} \cdot t}{OA_1 \cdot OA_2};$$

wenn man nun OH senkrecht zu $A_1 A_2$ zieht, so erkennt man, dafs die Fläche der Dreiecks $OA_1 A_2$ gegeben wird, sowohl durch $\frac{1}{2} OA_1 \cdot OA_2$, als auch durch $\frac{1}{2} \overline{PH} \cdot t$; infolgedessen ist

$$R = \frac{PA_1 \cdot PA_2}{PH}.$$

Dies zeigt: **Der dem Dreiecke $HA_1 A_2$ umbeschriebene Kreis geht durch den zum Kurvenpunkte P zugehörenden Krümmungsmittelpunkt**; es ist daher nichts leichter als diesen Punkt zu konstruieren.

Zwanzigstes Kapitel.

Die Linien von Mercator oder Sumner.

229. Auf einer Kugel vom Radius Eins sei ein gewöhnliches geographisches Koordinaten-System festgelegt; mit ϑ bezeichnen wir die Breite, mit ξ die Länge eines beliebigen Punktes P der Kugeloberfläche (Taf. XVI, Fig. 127). Wir denken uns nun um die Kugel einen Cylinder beschrieben, der diese längs des Äquators berührt. Als Koordinaten eines beliebigen Punktes M desselben können dienen die Länge ξ und der Abstand η vom Äquator. Wir stellen jetzt zwischen der Kugel und dem Cylinder eine eindeutige Beziehung her, indem wir dem Punkte $P(\xi, \vartheta)$ den Punkt $M(\xi, \eta)$ entsprechen lassen und zwar so, dafs

$$\operatorname{tg} \vartheta = \mathfrak{Sin}\, \eta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

oder auch

$$\frac{1}{\cos \vartheta} = \mathfrak{Cos}\, \eta, \qquad \sin \vartheta = \mathfrak{Tg}\, \eta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1')$$

Denken wir uns nun den Cylinder längs einer seiner Erzeugenden aufgeschnitten und in eine Ebene abgewickelt, so entsteht eine eindeutige Correspondenz zwischen der Kugel und der Ebene: es ist die (cylindrische) Mercator-Projektion. Wir wollen jetzt untersuchen, was für eine Linie in der Ebene dem Schnitte der Kugel mit einer beliebigen Ebene

$$\alpha + \beta z = \gamma x + \delta y$$

entspricht. Da für die Punkte der Kugel

$$x = \cos \vartheta \cdot \cos \xi, \qquad y = \cos \vartheta \cdot \sin \xi, \qquad z = \sin \vartheta,$$

so kann jener Schnitt auch aufgefafst werden als dargestellt durch die Gleichung

$$\alpha + \beta \sin \vartheta = \cos \vartheta \cdot (\gamma \cos \xi + \delta \sin \xi);$$

folglich wird die entsprechende Kurve in der Ebene zufolge der Gleichungen (1) und (1′) dargestellt durch

$$\alpha + \beta \,\mathfrak{Tg}\,\eta = \frac{1}{\mathfrak{Cos}\,\eta}(\gamma \cos\xi + \delta \sin\xi),$$

oder
$$\alpha \,\mathfrak{Cos}\,\eta + \beta \,\mathfrak{Sin}\,\eta = \gamma \cos\xi + \delta \sin\xi\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die so erhaltenen Kurven wurden von Holzmüller[1]) Mercator'sche Kurven und von Greenhill[2]) Sumner's Linien (zum Andenken an den amerikanischen Kapitän, der zuerst ihren Nutzen für die Schifffahrt dargethan hatte) genannt. Die Gleichung (2) kann auf verschiedene einfachere Formen reduziert werden, je nach den relativen Werten der in ihr auftretenden Konstanten α und β [3]).

1. Fall, $\alpha^2 > \beta^2$. Wir können $\alpha = r_0 \,\mathfrak{Cos}\,\eta_0$, $\beta = -r_0 \,\mathfrak{Sin}\,\eta_0$ setzen; daher ist $r_0 = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$. Wir setzen aufserdem noch

$$\gamma = \varrho_0 \cos\xi_0, \qquad \delta = \varrho_0 \sin\xi_0; \qquad \text{daher ist} \quad \varrho_0 = \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}.$$

Die Gleichung (2) wird alsdann zu

$$r_0 \,\mathfrak{Cos}\,(\eta - \eta_0) = \varrho_0 \cos(\xi - \xi_0),$$

oder, wenn $\frac{\varrho_0}{r_0} = m$ gesetzt wird,

$$\mathfrak{Cos}\,(\eta - \eta_0) = m \cos(\xi - \xi_0).$$

Diese Gleichung kann durch eine einfache Verschiebung der Axen vereinfacht werden, und wird dann

$$\mathfrak{Cos}\,\eta = m \cos\xi\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Bezüglich der Konstanten m möge eine Bemerkung nicht unterbleiben: damit die betrachtete Ebene die Kugel thatsächlich schneidet, mufs sein

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}} < 1, \qquad \text{oder} \quad \gamma^2 + \delta^2 > \alpha^2 - \beta^2;$$

wenn nun $\alpha^2 \leqq \beta^2$, so ist diese Bedingung immer erfüllt; wenn aber $\alpha^2 > \beta^2$, so geht sie über in ${\varrho_0}^2 > {r_0}^2$, d. h. $|m| > 1$. **Daher stellt die Gleichung (3) nur dann eine reelle Mercator'sche Linie dar, wenn der absolute Wert der Konstanten m gröfser ist als Eins.**

2. Fall, $\alpha^2 < \beta^2$. Wir setzen $\alpha = -r_0 \,\mathfrak{Sin}\,\eta_0$, $\beta = r_0 \,\mathfrak{Cos}\,\eta_0$; daher ist $r_0 = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$; aufserdem $\gamma = -\varrho_0 \sin\xi_0$, $\delta = \varrho_0 \cos\xi_0$; dann wird (2)

$$r_0 \,\mathfrak{Sin}\,(\eta - \eta_0) = \varrho_0 \sin(\xi - \xi_0).$$

---

1) *Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften* (Leipzig 1882) S. 242.

2) *Sumners Lines on Mercators' chart* (The Messenger XVI, 1887); *Sumner lines on Mercator and stereographic chart* (Das. XXV. 1890) und *The application of elliptic functions* (London 1892) S. 89—92.

3) H. E. Timerding, *Ueber die Mercator'sche Projection* (Zeitschrift f. Math. XLIII, 1898).

Durch eine Verschiebung der Axen kann sie auf die Form gebracht werden

$$\mathfrak{Sin}\,\eta = n \sin \xi\,.\ ^{1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

3. Fall, $\alpha^2 = \beta^2$. Bezeichnen wir mit ε die positive oder negative Einheit, so dürfen wir $\beta = \varepsilon\alpha$ setzen. Setzen wir noch $\gamma = \varrho_0 \cos \xi_0$, $\delta = \varrho_0 \sin \xi_0$, so wird Gleichung (2)

$$\alpha\,(\mathfrak{Cos}\,\eta + \varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,\eta) = \varrho_0 \cos(\xi - \xi_0)$$

und hat dann die Form

$$e^{\varepsilon\eta} = p \cos(\xi - \xi_0);$$

durch einfache Verschiebung der Axen wird sie

$$\eta = \varepsilon\, {}^{\text{nat}}\!\log \cos \xi\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Es giebt somit drei verschiedene Typen der Sumner'schen Linien, und die Gleichungen (3), (4), (5) können als kanonische Gleichungen derselben gelten. Die Kurven vom ersten Typus sind periodisch und bestehen aus unendlich vielen kongruenten Teilen; einen derselben erhält man, wenn man ξ von $-\pi$ bis $+\pi$ variieren läfst; sie sind symmetrisch in Bezug auf die ξ-Axe und auf die ∞^1 Geraden $\xi = 2k\pi$ $(k = 1, 2, 3 \ldots)$; sie schneiden die Axen in unendlich vielen reellen Punkten, die zugehörigen Tangenten sind parallel zur anderen Axe; sie haben keine Wendepunkte und bestehen daher aus unendlich vielen kongruenten Ovalen. — Die Kurven vom zweiten Typus sind auch periodisch und besitzen unzählige Mittelpunkte (die Punkte $\xi = k\pi$, $\eta = 0$), die Wendepunkte sind. Für Werte von ξ zwischen $2k\pi$ und $(2k+1)\pi$ bekommt man einen oberhalb der ξ-Axe gelegenen Zweig, während für Werte zwischen $(2k-1)\pi$ und $2k\pi$ man einen solchen unterhalb der ξ-Axe erhält; die Punkte mit den Abscissen $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ sind Kulminationspunkte. — Auch die Kurven vom dritten Typus sind periodisch; sie besitzen keine Wendepunkte, haben aber unzählig viele Asymptoten $\left(\text{die Geraden } \xi = k\frac{\pi}{2}\right)$ sowie unendlich viele Symmetrieaxen, deren erste die Ordinatenaxe ist.

Die Rektifikation der Sumner'schen Linien der beiden ersten Typen erfordert elliptische Integrale, während die vom dritten Typus elementar rektifizierbar sind. Man findet nämlich aus Gleichung (5) $ds = \frac{d\xi}{\cos\xi}$; beachtet man ferner, dafs $\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = -\frac{\varepsilon}{\cos^2\xi}$, so gelangt man zu folgendem Ausdruck für den Krümmungsradius: $R = -\frac{\varepsilon}{\cos\xi}$.

---

1) Schreibt man die Gl. (7) Nr. **223** in der Form $\mathfrak{Sin}\,y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, so sieht man, **dafs die Lemniscatrix als eine spezielle Sumner'sche Linie angesehen werden kann.** — Die durch die Gleichung $\sin\alpha \cdot \sin\xi + \sin\beta \cdot \mathfrak{Sin}\,\eta = 0$ dargestellte Kurve, welcher Beltrami (Lombardo Rend. 2. Ser. XII, 1879) begegnete, gehört augenscheinlich auch zur Kategorie der Kurven (4).

Eliminiert man ξ aus diesem Ausdrucke und aus dem für ds, so findet man
$$ds = \frac{dR}{\sqrt{R^2 - 1}}, \quad \text{und daher} \quad R = \mathfrak{Cos}\,(s + c)$$
als natürliche Gleichung der Kurve (vgl. Nr. **236**).

Da die hier untersuchten Kurven durch eine homogene Gleichung ersten Grades in $\sin\xi$, $\cos\xi$, $\mathfrak{Sin}\,\eta$, $\mathfrak{Cos}\,\eta$ dargestellt werden, so könnte man diese Sumner'sche Linien erster Ordnung nennen; in analoger Weise könnte man die höherer Ordnung betrachten; jedoch scheinen diese keine besondere Wichtigkeit zu haben.

Einundzwanzigstes Kapitel.

Die Traktrix-Kurven.

230. Die transscendenten Kurven, mit denen wir uns nunmehr zu beschäftigen haben, wurden im Verlaufe mathematischer Untersuchungen von Naturerscheinungen erdacht, gehören daher zu der grofsen Klasse der physikalisch-mathematischen; zu dieser Klasse gehören aber auch algebraische bezw. nichtalgebraische Kurven, die wir schon kennen: so die semikubische Parabel als ‚curva decensus aequabilis' betrachtet (Nr. **119**), die Lissajous'schen Kurven (Nr. **173**), die Cykloide, betrachtet als Tautochrone oder Brachistochrone (Nr. **198**), die Ribaucour'schen Kurven als Lösende eines Bernoulli'schen Problemes für einen Spezialfall u. s. w. Bei der folgenden Betrachtung dieser Kurven werden wir uns nicht auf Einzelheiten einlassen, die physikalische Fragen betreffen, sondern uns auf die geometrischen Eigenschaften, deren sie sich erfreuen, beschränken.

Claudius Perrault, ein gelehrter Arzt, der 1613—1688 zu Paris lebte, stellte einigen Mathematikern und zuletzt Leibniz die Aufgabe, die Kurve aufzusuchen, die in einer horizontalen Ebene von einem schweren Punkte beschrieben wird, der an dem Ende eines gespannten Fadens befestigt ist, dessen anderes Ende eine in dieser Ebene gelegene Gerade durchläuft. Leibniz erkannte alsbald, dafs die gesuchte Kurve durch die Eigenschaft charakterisiert ist, dafs für sie auf jeder Tangente das Stück vom Berührungspunkte bis zum Schnitte mit einer festen Geraden konstant ist[1]). Huygens beschäftigte sich dann auch selber mit der Aufgabe Perrault's, verallgemeinerte sie und

---

1) *Supplementum geometriae dimensoriae seu generalissima omnium tetragonismorum effectio per motum: similiterque multiplex constructio lineae ex data tangentium conditione* (Acta erud., 1693; *Leibniz,* ed. Gerhardt, V, S. 294 ff.). Vgl. auch einen Brief an Huygens v. 1./11. Okt. 1693 (*Leibniz,* ed. Gerhardt, II, S. 164).

gab den sie lösenden Kurven den Namen Traktorien[1]; dieser Name wird noch heutigen Tages angewandt, aber in allgemeinerem Gebrauche ist der Name Traktrix oder Zuglinie, welchem wir den Vorzug geben; andere gebrauchen den Namen Huygens'sche Traktorien oder Traktrix-Spiralen, während Ribaucour den Namen Alyssoide vorgeschlagen hat[2].

Wenn wir für die Traktrix und die logarithmische Spirale die folgenden beiden Definitionen wählen:

Die Traktrix ist der Ort eines Punktes von der Beschaffenheit, daſs die Strecke auf der Tangente desselben, vom Berührungspunkte bis zum Schnitt mit einer festen Geraden gemessen eine konstante Länge hat,	Die logarithmische Spirale ist die Enveloppe einer Geraden von der Beschaffenheit, daſs der Winkel, den sie mit der Verbindungslinie ihres Berührungspunktes mit einem festen Punkte bildet, eine konstante Gröſse hat,

so sehen wir, daſs, von einem gewissen Standpunkte betrachtet, die beiden Linien als korrelativ gelten können[3].

Werden die (zu der festen Geraden senkrecht genommenen) Ordinaten einer Traktrix in einem konstanten Verhältnisse vergröſsert oder verkleinert, so erhält man die Bianchi'sche verlängerte bezw. verkürzte Traktrix[4], Kurven, welche in Fragen der Infinitesimal-Geometrie auftreten[5].

Die Gleichung der Traktrix erhält man leicht, wenn man die feste Gerade als x-Axe wählt; in solchem Falle ist sie „**die Kurve, für welche die Länge der Tangente konstant ist**"; daher ist ihre Differenzialgleichung folgende:

$$y^2 + y^2 \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = a^2; \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

diese ist leicht zu integrieren und giebt

$$x = \int \frac{\sqrt{a^2 - y^2} \cdot dy}{y}.$$

Um die angedeutete Quadratur auszuführen, ist es zweckmäſsig $y = a \sin \omega$ zu setzen; dann erhält man

$$x = a \int \frac{\cos^2 \omega}{\sin \omega} d\omega = a \left(\int \frac{d\omega}{\sin \omega} - \int \sin \omega \cdot d\omega \right) \cdot$$

1) S. einen Brief an Leibniz vom 17. Sept. 1693 (*Leibniz,* ed. Gerhardt, II, S. 161).

2) *Etude sur les élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle* (Mém. de Belgique, XLIV, 1880).

3) Cesàro, *Sur la tractrice* (Mathésis II, 1881).

4) Bianchi, *Ueber die Flächen mit konstanter negativer Krümmung* (Math. Ann. XVI, 1880).

5) Vgl. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces* III. (Paris 1894) S. 393.

Nehmen wir nun an, dafs die Kurve vom Punkte $A(0, a)$ ausgeht, so mufs für $\omega = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$ werden, und alsdann dienen zur Darstellung der Traktrix die beiden Gleichungen

$$x = a \log \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} + a \cos \omega, \qquad y = a \sin \omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Wenn man hierin ω in $\pi - \omega$ verwandelt, so ändert x nur das Vorzeichen, während y unverändert bleibt: **Die Traktrix ist symmetrisch zur y-Axe** (aber nicht zur x-Axe, wie man geglaubt hat[1]): der Punkt A ist eine Spitze mit der y-Axe als Spitzentangente. Die gewöhnliche kartesische Gleichung derselben ist offenbar das Resultat der Elimination von ω aus (2), lautet daher

$$\left.\begin{array}{l} x = a \log \dfrac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} + \sqrt{a^2 - y^2} \\ \text{oder} \quad y e^{\frac{x - \sqrt{a^2 - y^2}}{a}} = a - \sqrt{a^2 - y^2} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Aus dieser geht hervor, **dafs** (die x-Axe, d. h.) **die feste Gerade eine Asymptote der Traktrix ist.** Ferner folgt, **dafs die Enveloppe der ∞^1 durch die Gleichung $x + y \operatorname{Sin} \frac{\delta}{a} = \delta$ dargestellten Geraden, wo δ ein Parameter ist, eine Traktrix ist**[2]. Dagegen ergiebt sich aus der Differenzialgleichung (1) dafs

$$\frac{X - x}{Y - y} = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

die Gleichung der Tangente im Punkte (x, y) ist. Nehmen wir hierin X und Y als gegeben an und erheben ins Quadrat, so folgt: **Die Berührungspunkte der von einem festen Punkte an die Traktrix gezogenen Tangenten liegen auf einer Kurve vierter Ordnung, die zweimal durch jenen Punkt hindurchgeht;** liegt der feste Punkt aber auf der Asymptote ($Y = 0$), so zerfällt jene Kurve vierter Ordnung in die doppelt zu zählende Asymptote selbst und einen Kreis mit dem Radius a. Aus obigem Satze erhält man als Folge: **Jede Traktrix gehört einem System an mit den Charakteristiken $\mu = 2$, $\nu = 2$.**

Eine einfache Anwendung bekannter Formeln zeigt, dafs die zwischen der Traktrix und ihrer Asymptote gelegene Fläche gegeben wird durch $F = \frac{\pi a^2}{2}$, während der durch Rotation um dieselbe erzeugte Körper das Volumen $V = \frac{4 \pi a^3}{3}$ und die Fläche $4 \pi r^2$ hat, d. h.: **Der durch Rotation der Traktrix um die Asymptote erzeugte**

1) Kleyer-Haas, *Differentialrechnung*, III. Th. (Stuttgart 1894) S. 64—65; Salmon-Fiedler, *Höhere ebene Kurven*, II. Aufl. (Leipzig 1882) S. 378.

2) E. Beltrami, *Teorema di geometria pseudosferica* (Giorn. di Matem. X, 1872).

Körper hat dieselbe Oberfläche und dasselbe Volumen wie die Kugel, deren Radius gleich der Länge der Tangente a ist[1]. — Wichtiger ist eine Folgerungen, zu der uns die Rektifikation der Kurve führt. Gl. (1) liefert nämlich

$$\frac{ds}{dy} = \frac{a}{y};$$

daher ist

$$s = a \log \frac{a}{y}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Lassen wir die Bogen im Punkte $A(x = 0,\ y = a)$ beginnen, wo also die Kurve die y-Axe berührt, so kann man auch schreiben

$$s = -a \log \sin \omega, \qquad x = a \log(1 - \cos\omega) - a \log \sin\omega + a \cos\omega; \quad (7')$$

daher ist

$$s - x = -a \cos\omega - a \log(1 - \cos\omega);$$

setzen wir hierin $\omega = \pi$, so wird $x = \infty$, und wir haben dann

$$\lim_{x=\infty} (s - x) = a(1 - \log 2); \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

da nun die Kurve symmetrisch zur y-Axe, so drückt diese Beziehung folgenden Satz von Beltrami aus[2]: **Die Differenz zwischen der (unendlichen) Länge der durch die Konstante a individualisierten Traktrix und ihrer Asymptote ist eine endliche Gröfse, und zwar gleich $2a(1 - \log 2)$.**

Bezeichnet R den Krümmungsradius der Traktrix, so findet man leicht aus der Gleichung (3)

$$R = a \operatorname{ctg} \omega. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

wird nun ω aus den Gleichungen (7′) und (9) eliminiert, so erhält man

$$R = a\sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

als natürliche Gleichung der Traktrix. Bezeichnen wir, wie gewöhnlich, den Bogen und den Krümmungsradius der Evolute mit s_1 und R_1, und bedienen uns der Formeln (Nr. **245**) $s_1 = R$, $R_1 = R\frac{dR}{ds}$, so erhalten wir

$$s_1 = a\sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1}, \qquad R_1 = ae^{\frac{2s}{a}},$$

demnach durch Elimination von s

$$R_1 = \frac{s_1^2}{a} + a; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

dies ist nun die natürliche Gleichung der ersten im folgenden Kapitel behandelten Kurve; wir sehen also: **Die Traktrix ist die Evolvente einer Kettenlinie.**

---

1) Beltrami, *Intorno ad alcune proprietà delle superficie di rivoluzione* (Annali di Matem., VI, 1864) S. 275. 2) Daselbst.

231. Die Gleichung (10) führt uns zur Betrachtung von allgemeineren Kurven, nämlich der durch eine Gleichung von der Form

$$R = b\sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

dargestellten, es sind die Pseudotraktrices nach Cesàro[1]); zur natürlichen Gleichung ihrer Evoluten gelangt man durch ein ähnliches Rechnungsverfahren wie vorhin; sie ist

$$R_1^2 = \frac{s_1^2}{a} + c, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

wobei $ac = b^2$; es sind die sog. Pseudocatenarien, denen wir im folgenden Kapitel begegnen werden.

Älteren Datums ist eine andere Verallgemeinerung der Traktrix, auf die wir hier hinweisen wollen. Nach einem Vorschlage von G. Salmon[2]) wird mit dem Namen Syntraktrix der Ort der Punkte P bezeichnet, welche die Tangenten MT einer gewöhnlichen Traktrix, in einem gegebenen Verhältnisse teilen. Um die Gleichung derselben zu finden, bezeichnen wir mit x, y die Koordinaten von M, mit x', y' die von P und setzen $MP = h$, $TP = k$, so dafs also $h + k = a$ ist. Dann haben wir

$$\frac{y}{y'} = \frac{a}{k}, \qquad \frac{y - y'}{x - x'} = \frac{dy}{dx};$$

kombinieren wir diese mit (1), so finden wir

$$y = \frac{ay'}{k}, \qquad x = x' + \frac{h}{k}\sqrt{k^2 - y'^2};$$

setzen wir diese Werte in (3) ein, so bekommen wir

$$x' - \sqrt{k^2 - y'^2} = a \log \frac{k - \sqrt{k^2 - y'^2}}{y'}; \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

dies ist die Gleichung der Syntraktrix; für $k = a$ stimmt sie mit (3) überein, wie vorauszusehen war. An Stelle der Gleichung (14) können auch folgende beiden treten

$$x' = k \cos \omega + a \log \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}, \qquad y' = k \sin \omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Viel natürlicher und weitergehend ist die Verallgemeinerung der Traktrix, die entsteht, wenn man die feste Gerade durch eine beliebige Kurve ersetzt; man gelangt so zu dem Begriffe der Traktrix einer beliebigen Kurve[3]) und zu einer bemerkenswerten Beziehung zwischen zwei Kurven, die man in folgender Weise präzisieren kann:

---

1) *Lezioni di geometria intrinseca* (Napoli 1896) S. 18.

2) Salmon-Fiedler, *Analyt. Geom. d. höheren eb. Curven* (Leipzig 1873) S. 353.

3) Vgl. auch A. Poulain, *Les aires de tractrices et le stang-planimètre* (Journ. de math. spéc. 4e Ser. IV, 1895).

„Trägt man auf den Tangenten einer gegebenen Kurve Γ von den Berührungspunkten aus eine konstante Länge ab, so bildet der Ort der Endpunkte eine neue Kurve E, welche man die Äquitangentialkurve von Γ nennt[1]), während Γ die Traktrix von E heifst (welch letztere alsdann die Basis der Traktrix genannt wird).“ Solche Kurvenpaare kommen in Fragen der angewandten Mathematik vor[2]).

Ist die Kurve Γ gegeben, so läfst sich ihre Äquitangentialkurve durch einfache Differenziationen bestimmen. Sind nämlich $x = x(s)$, $y = y(s)$ die Ausdrücke für die Koordinaten der Punkte von Γ in Funktionen des Bogens, und l die konstante Länge, so werden die Koordinaten des zugehörigen Punktes von E sein

$$X = x + l\frac{dx}{ds}, \qquad Y = y + l\frac{dy}{ds}.$$

Bezeichnen wir nun den Bogen von E mit S und beachten, dafs der Krümmungsradius R von Γ durch die Gleichung

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2$$

bestimmt wird, so folgt

$$\left(\frac{dS}{ds}\right)^2 = 1 + \frac{l^2}{R^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (16)$$

eine bemerkenswerte Beziehung zwischen Γ und E.

Eine weitere Beziehung kann folgendermafsen ausgesprochen werden: **Die Normale im Punkte P von E, der Äquitangentialkurve von Γ, welche dem Punkte M dieser letzteren entspricht, geht durch den zu M gehörenden Krümmungsmittelpunkt von Γ.** Um diesen Satz zu beweisen, beachten wir, dafs die Koordinaten dieses Krümmungscentrums sind

$$x_0 = x + R\frac{dy}{ds}, \qquad y_0 = y - R\frac{dx}{ds},$$

während — wenn ξ, η die laufenden Koordinaten bedeuten — die Gleichung der Normalen in M zur Kurve E lautet

$$(\xi - X)\frac{dX}{ds} + (\eta - Y)\frac{dY}{ds} = 0;$$

setzen wir nun in die linke Seite dieser Gleichung für X und Y ihre Werte und alsdann $\xi = x_0$, $\eta = y_0$, so erhält man als Resultat:

$$l\left[R\left(\frac{dy}{ds}\,\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds}\right) - 1\right] = 0,$$

in Übereinstimmung mit obigem Satze. — Die Bedeutung dieses Satzes liegt vornehmlich darin, dafs sie uns gestattet, das Krümmungscentrum für einen beliebigen Punkt von Γ zu konstruieren, wenn man die

1) Brocard, *Notes de bibliographie des courbes géométriques; Partie complémentaire* (Bar-le-Duc 1899) S. 58.

2) Bourlet, *Nouveau traité des bicycles el des bicyclettes* (2. Aufl. Paris 1898).

Normalen der beiden Kurven Γ, E konstruieren kann. Im speziellen ergiebt sich aus ihm: **Um das Krümmungscentrum für einen beliebigen Punkt *M* der gewöhnlichen Traktrix, die als Basis die Gerade *Ox* hat, zu konstruieren, hat man den Schnittpunkt der Normalen in *M* zur Kurve mit der zur Basis im Treffpunkt der Tangente errichteten Senkrechten aufzusuchen.** Ähnlich hat man: **Um das Krümmungscentrum für den Punkt *M* einer Traktrix zu finden, die als Basis einen Kreis hat, hat man den Schnittpunkt der Normalen in *M* mit demjenigen Radius des Kreises aufzufinden, der durch den dem Punkte *M* entsprechenden Punkt der Peripherie geht.**

Umgekehrt aber: **Ist die Basiskurve E gegeben, so erfordert die Auffindung der Traktrix Γ im allgemeinen die Integration von Differenzialgleichungen und wenigstens Quadraturen.** Die bezüglichen Rechnungen können vollständig ausgeführt werden, nicht nur, wenn E eine Gerade ist (vgl. oben), sondern auch wenn sie ein Kreis ist[1]); und dies soll im folgenden bewiesen werden.

232. Die Basiskurve sei ein Kreis mit dem Mittelpunkte O und dem Radius a, und l sei die konstante Länge. Die Koordinaten eines beliebigen Punktes M der Traktrix wollen wir mit x, y bezeichnen (Taf. XVI, Fig. 128) und mit s den Bogen der Traktrix. Wir setzen nun zur Abkürzung

$$a^2 - l^2 = n^2, \qquad \frac{dy}{dx} = y', \qquad \frac{ds}{dx} = s'; \quad \text{daher ist} \quad 1 + y'^2 = s'^2.$$

N sei der dem Punkte M entsprechende Punkt des Kreises; ziehen wir nun MP und NR senkrecht zu Ox und MV dazu parallel, so haben wir

$$OR = OP + MV = x + \frac{l}{s'}, \qquad RN = MP + VN = y + \frac{ry'}{s'},$$

und da N dem gegebenen Kreise angehört, so ist $\overline{OR}^2 + \overline{RN}^2 = a^2$, folglich

$$\left(x + \frac{l}{s'}\right)^2 + \left(y + \frac{ly'}{s'}\right)^2 = a^2$$

oder auch

$$x^2 + y^2 + \frac{2l}{s'}(x + yy') = n^2; \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

dies ist die Differenzialgleichung der Traktrix; die Integration derselben läfst sich in folgender Weise ausführen. Schreiben wir nämlich so

$$s' = -l\frac{2x + 2yy'}{x^2 + y^2 - n^2} = -l\frac{d}{dx}\log(x^2 + y^2 - n^2),$$

so finden wir

$$s = c - l\log(x^2 + y^2 - n^2); \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

---

1) S. Riccati, *De usu motus tractorii in constructione aequ. diff.* (Bologna 1752). Der wesentliche Inhalt dieser Abhandlung ist im II. Bande der *Institutiones analyticae a V. Riccati et H. Saladino collectae* (Bononiae 1767, S. 470—487) wiedergegeben.

führen wir jetzt Polarkoordinaten ϱ, ω ein, so wird Gl. (16) zu

$$\varrho^2 + \frac{2l\varrho \cdot d\varrho}{\sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 \cdot d\omega^2}} = n^2$$

oder auch
$$d\omega = \frac{d\varrho \sqrt{2(a^2+l^2)\varrho^2 - \varrho^4 - n^4}}{\varrho(\varrho^2 - n^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

und damit ist die Trennung der Variabelen erreicht. Um die Rechnung weiter zu führen, setzen wir

$$\varrho^2 = a^2 + l^2 + 2al \cos\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

und verwandeln dadurch die vorige Gleichung in folgende

$$d\omega = -d\mu \frac{a^2 l \cos\mu}{(a^2+l^2+2al\cos\mu)(l+a\cos\mu)},$$

oder
$$d\omega = \frac{1}{2} d\mu - \frac{l}{a} \frac{d\mu}{\frac{l}{a} + \cos\mu} - \frac{n^2}{4al} \frac{d\mu}{\frac{a^2+l^2}{2al} + \cos\mu} \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Setzen wir nun $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\mu = \theta$, so wird Gleichung (19)

$$\varrho = \sqrt{a^2 + l^2 + 2al \frac{1-\theta^2}{1+\theta^2}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

während die Gleichung (20) sich verwandelt in

$$d\omega = \frac{d\theta}{1+\theta^2} - n^2 \frac{d\theta}{(a+l)^2 + (a-l)^2\theta^2} - 2l \frac{d\theta}{(a+l)-(a-l)\theta^2}.$$

Wird die Integration ausgeführt, so erhält man auf der rechten Seite verschiedene Resultate je nach dem Werte von a, und zwar

$$\omega = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}\theta - \theta + A & \text{wenn } a = l \\ \operatorname{arc\,tg} \frac{2l\theta}{(a+l)+(a-l)\theta^2} + \frac{2l}{n} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{l-a}{l+a}}\,\theta + B & \quad \text{,,} \quad a < l \\ \operatorname{arc\,tg} \frac{2l\theta}{(a+l)+(a-l)\theta^2} - \frac{l}{n} \log \frac{a+l+n\theta}{a+l-n\theta} + C & \quad \text{,,} \quad a > l \end{cases} \quad (22)$$

wo A, B, C die beliebigen, durch die Integration eingeführten Konstanten sind, die man in jedem Falle auch gleich Null annehmen darf. Die Gleichungen (21) und (22) geben für alle Fälle die Polarkoordinaten ϱ, ω als Funktionen der unabhängigen Variabelen θ, liefern daher die analytische Darstellung der Kurve, insbesondere können sie zur Bestimmung ihrer Gestalt dienen. So zeigt uns z. B. die Gleichung (21), daſs die Kurve ganz innerhalb des Kreisringes mit dem Centrum O und den Radien $a+l$ und $|a-l|$ liegt; dagegen lassen die Gleichungen (22) erkennen, (vorausgesetzt, daſs die Konstanten $A, B, C = 0$) daſs sie symmetrisch in Bezug auf die Polaraxe ist, indem beim Wechsel des Vorzeichens von θ, ω gleichfalls wechselt, während ϱ unverändert bleibt; die dritte der Gleichungen (22) zeigt, wenn $\theta^2 = \frac{a+l}{a-l}$, so ist $\varrho = \sqrt{a^2 - l^2} = n$ und $\omega = \infty$; daher ist der Kreis mit dem Centrum O und dem Radius n ein asymptotischer für die Kurve (s. Taf. XVI,

Fig. 129, wo nur die eine Hälfte der Kurve vollständig gezeichnet ist) u. s. w. Beachten wir auch noch, dafs im Falle $l = a$, $A = 0$ man als Polargleichung der Traktrix findet

$$\omega = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{4a^2 - \varrho^2}}{\varrho} - \frac{\sqrt{4a^2 - \varrho^2}}{\varrho}.$$

A. Bordoni, dem man die oben dargelegte elegante Rechnung verdankt[1]), ist aufserdem auf einige sehr einfache Betrachtungen gestofsen, die in einer wirklich unerwarteten Art und Weise eine Differenzialgleichung für die Evolvente der betrachteten Traktrix liefern, die leicht integrierbar ist; wir wollen diese mit möglichster Präzision wiedergeben.

Es seien t und u die Koordinaten desjenigen Punktes der Evolvente, welcher dem Punkte (x, y) der Traktrix entspricht. Wir wollen alle diese Gröfsen als Funktionen einer und derselben unabhängigen Variabelen auffassen; alsdann haben wir

$$t = x - \frac{s'^2 y'}{y''}, \qquad u = y + \frac{s'^2}{y''}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Eliminieren wir x und y aus diesen Gleichungen und aus (16) — die nötigenfalls differenziert wird — so bekommen wir die Differenzialgleichung der Evolvente. Differenzieren wir nun (16), so bekommen wir

$$(x + yy' + ls')s'^3 = l(xy' - y)y'';$$

wenn man nun in diese und die erste von (23) den Wert $y'' = \frac{s'^2}{u - y}$ setzt, der aus der zweiten von (23) hervorgeht, so gelangt man zu den Gleichungen

$$(x + yy' + ls')\, s'(u - y) = l(xy' - y), \qquad t + uy' - x - yy' = 0,$$

oder auch $\quad x = t + y' \frac{uy' - t}{uy' + t}, \qquad y = u + \frac{l}{s'} \frac{t - uy'}{t + uy'}.$

Setzen wir diese Werte für x und y in (16) ein, so erhalten wir

$$t^2 + u^2 + 2ls' \frac{t^2 + u^2}{t + uy'} + l^2 \left(\frac{u + ty'}{t + uy'}\right)^2 = n^2.$$

Bekanntlich ist nun gemäfs der Theorie der Evoluten $y' = -\frac{t'}{u'}$, daher, wenn der Bogen der Evolute mit σ' bezeichnet wird,

$$t + uy' = \frac{tu' - t'u}{u'}, \quad ty' - u = -\frac{tt' + uu'}{u'}, \quad s' = \frac{\sqrt{t'^2 + u'^2}}{u'} = \frac{\sigma'}{u'},$$

und die vorige Gleichung wird nun

$$t^2 + u^2 + 2l\sigma' \frac{t^2 + u^2}{tu' - t'u} + l^2 \left(\frac{tt' + uu'}{tu' - t'u}\right)^2 = n^2. \quad . \quad . \quad (24)$$

---

1) S. die Abh. *Sul nuovo tornio immaginato dal Sign. Carlo Parea* (Mem. della Soc. Ital. delle Scienze, XVIII, 1820).

Dies ist die Differentialgleichung der Evolvente. Um sie zu integrieren, wollen wir Polarkoordinaten ϱ, ω einführen, und damit verwandeln wir sie in die folgende

$$\varrho^2 - 2l\frac{\sigma'}{\omega'} + l^2\frac{\varrho'^2}{\varrho^2\omega'^2} = n^2$$

oder aber
$$\left(\varrho - \frac{l\sigma'}{\varrho\omega'}\right)^2 = a^2.$$

Daraus folgt, wenn $\varepsilon = \pm 1$,

$$\varrho - \frac{l\sigma'}{\varrho\omega'} = \varepsilon a,$$

folglich
$$(\varrho - \varepsilon a)^2 = \frac{l^2\sigma'^2}{\varrho^2\omega'^2} = l^2\left(1 + \frac{\varrho'^2}{\varrho^2\omega'^2}\right),$$

oder auch
$$\sqrt{(\varrho - \varepsilon a)^2 - l^2} = \frac{l\varrho'}{\varrho\omega'},$$

oder schliefslich
$$d\omega = \frac{l\cdot d\varrho}{\varrho\sqrt{(\varrho - \varepsilon a)^2 - l^2}}, \quad \dots\dots \quad (25)$$

womit auch die Variabelen getrennt sind. Setzt man nun

$$\varrho - \varepsilon a = lz, \quad \dots\dots \quad (26)$$

so wird (25) zu
$$d\omega = \frac{l\cdot dz}{(\varepsilon a + lz)\sqrt{z^2 - 1}}$$

oder wenn man setzt
$$\sqrt{z^2 - 1} = z - u, \quad \dots\dots \quad (27)$$

$$d\omega = \frac{-2du}{u^2 - 2\varepsilon\frac{a}{l}u + 1},$$

weshalb dann
$$\omega = \int\frac{-2du}{u^2 - 2\varepsilon\frac{a}{l}u + 1} \quad \dots\dots \quad (28)$$

Wird nun z aus (26) und (27) eliminiert, so bekommt man

$$\varrho = \varepsilon a + \frac{l}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right). \quad \dots\dots \quad (29)$$

Die Gleichungen (28) und (29) liefern ω und ϱ als Funktionen der unabhängigen Variabelen u, und bieten daher die gesuchte analytische Darstellung der Kurve; wir können hinzufügen, dafs die in (28) angegebene Integration ausführbar ist und folgendes Resultat ergiebt:

$$\omega = \begin{cases} D - \dfrac{2}{u - \varepsilon}, & \text{wenn } a = l \\[2ex] E + \dfrac{l}{\sqrt{l^2 - a^2}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\varepsilon a + lu}{\sqrt{l^2 - a^2}}, & \text{„} \quad a < l \\[2ex] F + \dfrac{l}{2u}\log\dfrac{\varepsilon a + lu - u}{\varepsilon a + lu + u}, & \text{„} \quad a > l \end{cases} \quad \dots \quad (30)$$

wo D, E, F die Integrationskonstanten sind, die man im allgemeinen gleich Null annehmen kann. Mit Hilfe der gefundenen analytischen

Darstellung würde man zur Kenntnis aller Eigenschaften der Kurve gelangen können (die Fig. 130 stellt graphisch den dritten der obigen Fälle dar); wir überlassen jedoch dem Leser diese Untersuchung und gehen zu einem anderen Thema über.

233. Wenn wir bei der gewöhnlichen Traktrix die x-Axe als Basis nehmen, so kann jene, wie wir in Nr. **231** gesehen haben, definiert werden „als die Kurve, für welche die Länge der Tangente konstant ist“. Diese Bemerkung läſst von selbst die Frage aufwerfen: „Welche Kurven erfreuen sich der nämlichen Eigenschaft bei einem Polarkoordinaten-System?“ Es sind offenbar die Integralkurven folgender Differenzialgleichung

$$\varrho \sqrt{1 + \left(\varrho^2 \frac{d\omega}{d\varrho}\right)^2} = a\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Schreiben wir diese in folgender Weise

$$ds = a \frac{d\varrho}{\varrho},$$

und integrieren, so erhalten wir

$$s - s_0 = a \log \frac{\varrho}{\varrho_0}\cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Daraus geht hervor, daſs die gesuchten Kurven von der Eigenschaft sind, daſs ein beliebiger Bogen derselben proportional dem Logarithmus des Verhältnisses der Vectoren in den beiden Endpunkten ist. Wendet man die allgemeine Gl. (15) S. 488 und die Definitionsgleichung (31) an, so kann man leicht beweisen, daſs die in Rede stehende Kurve einem System mit den Charakteristiken $\mu = 2$, $\nu = 4$ angehört. Beachtet man ferner, daſs für die Wendepunkte $\frac{1}{\varrho} + \frac{d^2}{d\omega^2}\left(\frac{1}{\varrho}\right) = 0$ ist, und daſs $\frac{d^2}{d\omega^2}\left(\frac{1}{\varrho}\right) = \frac{-\varrho^3}{(a^2-\varrho^2)^2}$, so erkennt man: „Der Kreis $\varrho^2 = \frac{1}{2}a^2$ schneidet die Kurve in ihren Wendepunkten.“ Aus (31) ergiebt sich dann

$$d\omega = \frac{\sqrt{a^2-\varrho^2}}{\varrho^2}\cdot d\varrho\,;$$

wenn man nun $\varrho = a\cos\vartheta$ setzt, so hat man

$$d\omega = d\vartheta - \frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta}\,;$$

daher ist

$$\omega = \vartheta - \operatorname{tg}\vartheta + c,$$

oder auch weil $\vartheta = \arccos\frac{\varrho}{a}$,

$$\omega = \arccos\frac{\varrho}{a} - \frac{\sqrt{a^2-\varrho^2}}{\varrho} + c.$$

Nehmen wir jetzt als Polar-Winkelkoordinate die Gröſse $c - \omega$, so ergiebt sich, daſs

$$\omega = \frac{\sqrt{a^2-\varrho^2}}{\varrho} - \arccos\frac{\varrho}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

die Polargleichung der gewünschten Kurve ist. Lassen wir nun, weil ja $\arccos \frac{\varrho}{a} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\varrho}{a}$, die Polaraxe eine Rotation um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ machen, so kann die Gleichung (33) auch durch folgende ersetzt werden:

$$\omega = \frac{\sqrt{a^2 - \varrho^2}}{\varrho} - \arcsin \frac{\varrho}{a} \cdot \qquad (33')$$

Côtes, der die hierdurch bestimmte Kurve zuerst betrachtet hat, nannte sie Tractrix complicata[1]; Giard[2] und Neuberg[3] nannten sie, um ihren Zusammenhang mit Polarkoordinaten anzudeuten, polare Traktrix, O. Schlömilch[4] zog den Namen Traktorie des Kreises vor, obwohl dieser auch auf die in Nr. **233** untersuchte Traktrix mit Kreisbasis sich beziehen könnte.

Die Gleichung (33) kann durch folgende beiden ersetzt werden

$$\varrho = a \cos \vartheta, \qquad \omega = \operatorname{tg} \vartheta - \vartheta;$$

verwandelt man hierin ϑ in $-\vartheta$, so wird ω zu $-\omega$, und ϱ bleibt unverändert; **daher ist die Traktrix complicata symmetrisch zur Polaraxe.** Nimmt man $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, so erhält man $\varrho = 0$, $\omega = \infty$; daraus folgt: **Der Pol ist ein asymptotischer Punkt der Traktrix complicata.**

Zwischen der Tractrix complicata und zwei uns schon bekannten Kurven bestehen bemerkenswerte von Côtes und Neuberg gefundene Beziehungen, mit deren Beweis wir dieses Kapitel beschliefsen wollen.

a) Wenn man auf die Kurve (33), die die Formeln $\omega_1 = \omega$, $\varrho_1 = \frac{a^2}{\varrho}$ definierte Transformation durch reziproke Radien ausführt, so erhält man die durch folgende Gleichung dargestellte Kurve:

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{\varrho_1{}^2 - a^2}}{a} - \arccos \frac{a}{\varrho_1} \cdot$$

Erinnern wir uns nun der Gleichung (25) aus Nr. **211**, so erkennen wir: Nimmt man den Mittelpunkt als Centrum einer Inversion, so verwandelt sich jede Evolvente eines Kreises in eine Tractrix complicata.

b) Wir betrachten die hyperbolische Spirale $\varrho\omega = a$. Vom Pole fällen wir das Lot auf die Tangente im Punkte $M(\varrho, \omega)$, dessen Fufspunkt $T(\varrho_1, \omega_1)$ sein möge. Den Winkel OMT nennen wir μ; dann haben wir

$$\omega_1 - \omega = \frac{\pi}{2} - \mu, \qquad \varrho_1 = \varrho \sin \mu,$$

1) *Harmonia mensurarum* (Cantabrigiae 1722) S. 84.

2) *Courbe dont la tangente polaire est constante* (Nouv. Ann. 2. Ser. I, 1862).

3) Nouv. Corr. math. IV, 1880, S. 409—10.

4) *Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis,* I. Th. (3. Aufl. 1879) S. 108. Brocard (*Notes de bibl. etc.* S. 276) benutzt den gleichbedeutenden Namen „tractrice circulaire“.

und da $\sin\mu = \frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}, \quad \cos\mu = -\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}},$

so ist $\sin(\omega_1 - \omega) = \cos\mu = -\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$ und $\varrho_1 = \frac{a}{\sqrt{1+\omega^2}},$

oder auch $\omega_1 - \omega = -\arccos\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}, \qquad \omega = \frac{\sqrt{a^2-\varrho_1{}^2}}{\varrho_1},$

und nach Elimination von ω

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{a^2-\varrho_1{}^2}}{\varrho_1} - \arccos\frac{\varrho_1}{a}.$$

Besehen wir uns nun die Gleichung (33'), so haben wir: Die Fufspunktkurve einer hyperbolischen Spirale in Bezug auf den Pol ist eine Tractrix complicata.

Zweiundzwanzigstes Kapitel.

Die Kettenlinien.

234. In dem berühmten Werke Galileis', *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, dessen Vorrede vom 6. März 1638 datiert ist, findet sich in der zweiten *Giornata* (in solche ist das Werk eingeteilt) die Behauptung[1]), dafs ein gleichmäfsig schweres Seil oder eine Kette, wenn sie an zwei Punkten von derselben Höhe aufgehängt ist, die Gestalt einer Parabel annehme. Dafs diese Behauptung — die übrigens unbewiesen blieb — falsch sei, wurde durch Berechnungen und Experimente von Joachim Jungius 1669 in der bekannten Arbeit, *Geometria empyrica* betitelt, dargelegt; es blieb jedoch somit immer noch übrig zu bestimmen, welches denn die Kurve sei, in welche sich das Seil lege. Die Untersuchung derselben wurde nun im Mai 1690 öffentlich dargelegt von Jacob Bernoulli und zwar in den *Acta eruditorum*[2]). Drei Geometer ersten Ranges lösten dann sozusagen gleichzeitig diese interessante Frage, Huygens[3]), Leibniz[4]) und Joh. Bernoulli[5]); an dem edlen Wett-

1) *Opere di Galileo Galilei* VIII. (Milano 1811) S. 232.

2) S. auch *Jac. Bernoulli Opera* I, S. 246.

3) *Acta erudit.* 1691 (die Abh. ist reproduziert in *Leibniz,* ed. Gerhardt, V, S. 248). Vgl. einen Brief von Huygens an Leibniz vom 4. Sept. 1691 (*Leibniz,* ed. Gerhardt, II, S. 102) und die Abh. von D. J. Korteweg, *La solution de Christian Huygens du problème de la chaînette* (Bibl. math., 3. Ser. I).

4) *Acta erud.* 1691, 1692 u. 1699; *Journal des Savants* 1692; *Giornale dei Letterati,* 1692; *Leibniz,* ed. Gerhardt, V, S. 243, 255, 258, 263, 366.

5) *Acta erud.* 1691; ferner *Joh. Bernoulli Opera* I, S. 48, und *Leibniz,* ed. Gerhardt, V, S. 248. Man sehe auch die XXVI und XXVII der *Lectiones*

streit nahmen teil auch der Aufgabensteller [1]) und Hermann [2]); David Gregory [3]) befafste sich dann als erster damit, eine methodische Bearbeitung der Eigenschaften der fraglichen Kurve zusammenzustellen [4]).

Einfache Betrachtungen aus der Mechanik [5]) zeigen, dafs die Seilkurve oder Kettenlinie [6]) geometrisch durch folgende Eigenschaft charakterisiert ist: **Der von ihrem tiefsten Punkte, dem Scheitel, aus gemessene Bogen ist proportional der trigonometrischen Tangente des Winkels, den die Kurventangente im Endpunkte des Bogens mit der Horizontalen bildet.** Hieraus ergiebt sich, dafs die Differenzialgleichung der Kurve lautet:

$$s = c\frac{dy}{dx}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wo c eine Konstante bedeutet. Eliminieren wir hieraus dy vermittelst der bekannten Relation $dx^2 + dy^2 = ds^2$, so erhalten wir

$$dx = c\frac{ds}{\sqrt{s^2+c^2}}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

daher durch Integration

$$\frac{x}{c} = \log\frac{s+\sqrt{s^2+c^2}}{c}$$

oder auch $$e^{\frac{x}{c}} = \frac{s+\sqrt{s^2+c^2}}{c}.$$

Daraus folgt dann, dafs

$$e^{-\frac{x}{c}} = \frac{-s-\sqrt{s^2+c^2}}{c}.$$

---

mathematicae (Joh. Bernoulli Opera, S. 491—92); die drei aufeinander folgenden Lectiones verallgemeinern successive das Problem, indem sie die Fälle behandeln, in welchem das Seil nicht homogen ist.

1) S. den letzten Teil des *Specimen alterum calculus differentialis* (Acta erud., Juni 1691; *Jac. Bernoulli Opera,* S. 449—53).

2) *Phoronomia,* Lib. I, Cap. III, Append. § 5 (Amstelod. 1716); einige dort begangene Irrtümer werden von Joh. Bernoulli verbessert in der Abh. *Solutio problematis catenarii generaliter concepti* (Opera IV, S. 234—241).

3) *The properties of the Catenarian, or curve line formed by a heavy and flexible chain, hanging freely from two point of suspension* (Phil. Trans., No. 231, 1697). Vgl. auch *Answer to the animadvertions concerning the Catenary* (Das. No. 259, 1699).

4) Bearbeitungen jüngeren Datums sind: Gretschel, *Elementare Ableitung der Haupteigenschaften der Kettenlinie* (Archiv der Math. XLIII, 1865); J. Jung, *Synthetische Behandlung der gemeinen Kettenlinie* (Zeitschrift f. Math. XLV, 1900).

5) S. z. B. Schell, *Theorie der Bewegungen und Kräfte* II. (Leipzig 1880) S. 94—95.

6) Der Name Catenaria ist von Huygens angegeben in dem Briefe an Leibniz vom 18. Nov. 1690 (*Leibniz,* ed. Gerhardt, II, S. 56).

Daher ist $$e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} = \frac{2\sqrt{s^2+c^2}}{c}, \qquad e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} = \frac{2s}{c}. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Anderseits ergeben die Gleichungen (1) und (2)

$$dy = \frac{s \cdot ds}{\sqrt{s^2+c^2}},$$

und durch Integration $$y = \sqrt{s^2+c^2}.$$

Wegen Gleichung (3) ist nun aber

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Dies ist die gesuchte Gleichung der Kettenlinie[1]); mit Benutzung der hyperbolischen Funktionen[2]) kann man auch schreiben

$$y = c \,\mathfrak{Cos}\, \frac{x}{c}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4')$$

Führen wir auf die durch (4) oder (4′) dargestellte Kurve eine imaginäre homographische Transformation aus, die durch die Gleichungen $x = \xi$, $y = i\eta$ gekennzeichnet ist, so gelangen wir zu folgender

$$\eta = c \cos \frac{\xi}{c};$$

die Kettenlinie kann demnach als homographisch transformierte Sinuslinie aufgefafst werden. Dies ermöglicht uns aus den in Nr. 222 bewiesenen Sätzen die folgenden abzuleiten: **Die Berührungspunkte der von einem beliebigen Punkte ihrer Ebene an die Kettenlinie gezogenen Tangenten gehören einer Kurve vierter Ordnung an, für welche jener Punkt ein Doppelpunkt ist; daher gehört jede Kettenlinie einem System an mit den Charakteristiken $\mu = 2$, $\nu = 2$.**

Wir beachten nun, dafs aus der zweiten Gleichung (3) und aus (1) sich ergiebt

$$s = c \,\mathfrak{Sin}\, \frac{x}{c}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\frac{dy}{dx} = \mathfrak{Sin}\, \frac{x}{c}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Bezeichnen wir jetzt die zwischen der Axe, einem Kurvenbogen und der Ordinate gelegene Fläche mit F, so finden wir

$$F = \int_0^x y \cdot dx = c^2 \,\mathfrak{Sin}^2 \frac{x}{c} = cs; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

---

4) Daraus kann man eine elegante punktweise Konstruktion der Kurve ableiten; vgl. G. Jung, *Construction de la chainette par points, et division d'un arc de cette courbe en n parties proportionelles à des segments donnés* (Bull. de la Soc. math. de France IV, 1875—76).

5) Gudermann, *Theorie der Potential- oder cyklisch-hyperbolischen Funktionen* (Crelles Journ. VI, 1830) § 75—81; Laisant, *Essai sur les fonctions hyperboliques* (Paris 1874) S. 49; Günther, *Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen* (Halle a. S. 1881) S. 249.

ist ferner R der Krümmungsradius, N die Länge der Normale, so erhält man

$$R = N = c\,\mathfrak{Cos}^2 \frac{x}{c}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

eliminieren wir dann x aus (5) und (8), so erhält man

$$R = \frac{s^2}{c} + c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

und dies ist die natürliche Gleichung der Kettenlinie[1]). Diese Gleichungen (7), (8), (9) drücken algebraisch Eigenschaften der Kettenlinie aus, die man wie folgt in Worte kleiden kann: **1. Bei der Kettenlinie ist die Fläche zwischen dem Kurvenbogen (gerechnet vom Scheitel an) der Scheiteltangente und einer Vertikalen hierzu proportional jenem Bogen**[2]). **2. Bei der Kettenlinie ist der Krümmungsradius gleich der Normalen**[3]); daraus ergiebt sich eine einfache Konstruktion des Krümmungscentrums. **3. Rollt eine Kettenlinie auf einer Geraden, so ist der Ort der Krümmungscentren für die aufeinander folgenden Berührungspunkte eine Parabel**[4]).

Dieselben Formeln führen uns leicht zu weiteren Folgerungen. Ist V der Scheitel, $A_1(x_1, y_1)$ und $A_2(x_2, y_2)$ zwei Punkte der Kettenlinie, deren zugehörige Tangenten aufeinander senkrecht stehen, so wird zufolge von (6) sein

$$\mathfrak{Sin}\frac{x_1}{c} \cdot \mathfrak{Sin}\frac{x_2}{c} + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

oder, wenn man will,

$$\frac{1}{\mathfrak{Cos}^2 \frac{x_1}{c}} + \frac{1}{\mathfrak{Cos}^2 \frac{x_2}{c}} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Bezeichnen wir mit s_1 und s_2 die Bögen VA_1 und VA_2, mit R_1 und R_2 die Krümmungsradien in A_1 und A_2, so finden wir mit Anwendung der Formeln (5) und (8)

$$s_1 \cdot s_2 = -c^2, \qquad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{c}.$$

Folglich: **Wenn ein rechter Winkel eine Kettenlinie umhüllt, so ist 1. das Produkt der Bogenlängen vom Scheitel bis zu den Berührungspunkten konstant, 2. die Summe der Krümmungen der Kettenlinie in diesen beiden Punkten eine Konstante**[5]).

---

1) Zuerst aufgestellt in der o. a. Abh. von Gudermann.

2) Bezügl. eines geometrischen Beweises für diesen Satz und andere ähnliche sehe man Wasteels, *Aires et volumes relatives à la chaînette* (Mathésis 2. Ser. VI, 1896).

3) Über dieselbe Frage s. m. den § II des Aufsatzes von J. Sobotka, *Zur infinitesimalen Geometrie einiger Plankurven* (Prager Ber., 1898).

4) Mannheim, *Recherches géométriques relatives au lieu des positions successives des centres de courbure d'une courbe qui roule sur une droite* (Liouville's Journ. 2. Ser. IV, 1859, S. 103).

5) S. zwei Noten, die eine von C. Rabut, die andere mit dem Pseudonym R. Ch. Weitz im II. Bde. (1895) des *Intermédiaire* S. 115 u. 358.

Nennen wir den Bogen der Evolute der Kettenlinie s_e und deren Krümmungsradius R_e, so bestehen die Relationen $s_e = R$ und $R_e = R \cdot \frac{dR}{ds}$; eliminieren wir R und s aus diesen und aus (9), so erhalten wir

$$R_e = 2 s_e \sqrt{\frac{s_e}{c} - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

als natürliche Gleichung der Evolute der Kettenlinie. Die vorigen Gleichungen liefern uns aber ebenfalls leicht die kartesische Gleichung derselben; wir geben nur das Resultat der Rechnung, nämlich

$$x = \frac{y\sqrt{y^2 - 4c^2}}{4c} + c \log \frac{y - \sqrt{y^2 - 4c^2}}{2c}.$$

Schliefslich: **Die Evolvente der Kettenlinie ist die Traktrix,** wie wir in Nr. **231** gesehen haben.

Das Problem der Kettenlinie veranlafste Jacob Bernoulli auch andere in der Natur vorkommende Kurven zu untersuchen, so namentlich das Profil der Gestalt, die ein vom Winde geblähtes Segel annimmt, wenn man von der Schwere desselben absieht. Es gelang ihm die gesuchte Kurve — Velaria oder Segelkurve genannt — durch eine Differenzialgleichung darzustellen; da es ihm aber nicht gelang sie zu integrieren, wandte er sich an seinen Bruder Johann um Hilfe, indem er von ihm sich wenigstens eine Punktkonstruktion der Kurve erbat. Später gelang es ihm, die Differenzialgleichung auf die sehr einfache Form $d^2x = dy^3$ zu bringen, die er dann zur Kenntnis seines Bruders brachte. Letzterer entdeckte nicht nur ein Verfahren, jene Differenzialgleichung zu bilden, sondern gelangte auch zu dem Schlusse, dafs (abgesehen von der Lage) „la courbe de la voile est la même que la courbe de la chaîne"; **die Segelkurve ist also identisch mit der Kettenlinie**[1]).

Wir fügen noch hinzu, dafs man dieselbe Kurve erhält, wenn man folgende Aufgabe lösen will: „In einer Ebene sind zwei Punkte gegeben, durch diese soll eine Kurve gelegt werden, derart, dafs sie bei der Rotation um eine in der Ebene gelegene Axe die kleinste Oberfläche erzeugt"[2]).

235. Die natürliche sowohl wie die kartesische Gleichung führten zum Begriff von allgemeineren Kurven als die Kettenlinie. So sind die durch die natürliche Gleichung

$$R = a + \frac{s^2}{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

dargestellten Kurven die Pseudocatenarien (Scheinkettenlinien)

---

1) *Journal des Savants,* 28. Apr. 1692 (*Joh. Bernoulli Opera* I, S. 59—61); vgl. die XLVIII der *Lectiones mathematicae, Opera* I, S. 510—515; aufserdem *Jac. Bernoulli Opera,* S. 481—490 und 639—663.

2) Kneser, *Lehrbuch der Variationsrechnung* (Braunschweig 1900) S. 25.

E. Cesàros[1]). Die Gleichung (4) oder (4') hingegen führten zu Kurven mit der kartesischen Gleichung

$$y = r\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right) \quad \text{oder} \quad y = rc\,\mathfrak{Cos}\frac{x}{c}, \quad . \quad . \quad (14)$$

wo r eine beliebige gegebene Zahl ist; es sind die Gewölbelinien von O. Schlömilch[2]). Aus Gleichung (14) folgt

$$\frac{dy}{dx} = r\,\mathfrak{Sin}\frac{x}{c}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{r}{c}\,\mathfrak{Cos}\frac{x}{c},$$

demnach ist $\frac{d^2y}{dx^2} \neq 0$, und also sind die betrachteten Kurven ohne Wendepunkte. Ferner ist

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + r^2\,\mathfrak{Sin}^2\frac{x}{c}},$$

daher

$$R = \frac{c}{r}\,\frac{\left(1 + r^2\,\mathfrak{Sin}^2\frac{x}{c}\right)^{\frac{3}{2}}}{\mathfrak{Cos}\frac{x}{c}}.$$

Mit Hilfe dieser Formel können wir diejenigen Werte von x auffinden, bei denen R seine gröfsten oder kleinsten Werte erhält; man braucht nur den Wert $\frac{dR}{dx} = 0$ zu setzen. Von der Lösung abgesehen, die man erhält, wenn man $\mathfrak{Sin}\frac{x}{c} = 0$ setzt, bleibt noch die Gleichung

$$2r^2\,\mathfrak{Sin}^2\frac{x}{c} = 1 - 3r^2.$$

Damit diese reelle Wurzeln habe, mufs $r > \frac{1}{\sqrt{3}}$ sein. Ist diese Bedingung erfüllt, so erhalten wir zwei zur y-Axe symmetrische Punkte, in denen die entsprechende Kurve die gröfste Krümmung zeigt; diese Punkte erscheinen gleichsam als Nasen der Kurve, daher der Name Kettenlinie mit zwei Nasen, den die Kurve von den Entdeckern dieser Eigentümlichkeit erhielt; Anwendung findet sie bei Fragen der angewandten Mathematik[3]).

Die Gewölbelinien sind spezielle Integralkurven der Differenzialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{c^2},$$

deren allgemeines Integral ist

$$y = pe^{\frac{x}{c}} + qe^{-\frac{x}{c}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

wo p und q beliebige Konstanten sind. Die durch (15) dargestellten

1) *Lezioni di geometria intrinseca* (Neapel 1896) S. 17.

2) *Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis,* I. T. (3. Aufl. Leipzig 1879) S. 101.

3) T. Alexander und A. W. Thomson, *Two-Nased Catenaries and their application to the design of segmental arches* (Irish Trans. XXIX, Part. 3, 1888).

Kurven finden praktische Anwendung und wurden von Heinzerling[1]) Klinoiden genannt, der sie in Katakinoiden und Anaklinoiden unterschied. Zu ihnen gehören — aufser der logarithmischen Kurve (für $q = 0$) — die mit der Gleichung

$$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} \pm e^{-\frac{x}{c}}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

die als Menoklinoide bezw. Trepsiklinoide bezeichnet wurden[2]); erstere unterscheidet sich nicht von der Gewölbelinie.

236. Ähnlich dem Problem, das durch die Kettenlinie gelöst wird, ist folgendes: „Die Gestalt aufzufinden, die eine schwere völlig biegsame Kette annimmt, wenn ihre Dicke proportional mit der Spannung sich verändert.“ Eine solche Kette hat offenbar in allen ihren Punkten dieselbe Zugfestigkeit, bietet also überall dieselbe Wahrscheinlichkeit des Zerreifsens. Die von ihr angenommene Gestalt heifst die Kettenlinie gleichen Widerstandes und wird, wie Coriolis[3]) gezeigt hat, durch die Gleichung

$$e^{\frac{y}{a}} \cos\frac{x}{a} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

dargestellt[4]). Die Kurve geht durch den Anfangspunkt und berührt daselbst die x-Axe. Infolge der Periodizität der Cosinus-Funktion besteht sie aus unendlich vielen einander gleichen Zügen, deren ersten man erhält, indem man x von 0 bis 2π variieren läfst; die Kurve ist symmetrisch in Bezug auf die Gerade $x = 2k\pi a$, wo k eine ganze Zahl bedeutet[5]). Ist τ der Winkel der Tangente mit der x-Axe, so folgt aus Gleichung (17)

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\frac{x}{a},$$

und daher

$$\tau = \frac{x}{a} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Die Drehung der Tangente ist also proportional der Abscisse, und alle Punkte mit der Abscisse $x = k\pi a$ sind Kulminationspunkte.

---

1) *Zeitschrift für Bauwesen,* 1869 u. 1872.

2) G. Emery, *Sulla condizione di scambievolezza e sui casi d'identità fra curve rappresentanti distribuzione continua di forze parallele e curve funiculari corrispondenti, con particolare disquisizione sulle clinoidi* (Torino Atti, XXII, 1886—87).

3) *Note sur la chaînette d'égale résistance* (Liouville's Journ. I, 1836); vgl. Schell a. a. O. II, S. 102.

4) Sechs Jahre früher als Coriolis hatten ganz andere Betrachtungen Gudermann zu der Kurve geführt, welche die Gl. (17) hat, dieser bezeichnete sie mit dem Namen Longitudinale; s. die § 82—88 der vorhin citierten Abh. Vgl. auch Bobillier, *Ann. de Math.* XVII, 1826.

5) Schreibt man die Gl. (17) in der Form $y = -a \log\frac{x}{a}$, so sieht man, dafs wenn $a = 1$ ist, die Kettenlinie gleichen Widerstandes eine Sumner'sche Linie vom dritten Typus (s. Nr. **229**) ist.

Ferner ist $$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos\frac{x}{a}},$$

demnach, wenn die Bogen vom Koordinatenanfang an gerechnet werden

$$s = a \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2a}\right) \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

Aufserdem findet man leicht als Ausdruck für den Krümmungsradius

$$R = \frac{a}{\cos\frac{x}{a}} \quad \ldots \ldots \quad (20)$$

Kombinieren wir dies mit (18), so erhalten wir $R \cdot \cos\tau = a$, was besagt: **Bei der Kettenlinie gleichen Widerstandes ist die Projektion des Krümmungsradius auf die Normale im Anfangspunkte konstant;** daraus ergiebt sich eine Konstruktion des Krümmungscentrums. Die Gleichung (19) liefert ferner

$$e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}} = \frac{2}{\cos\frac{x}{a}},$$

daher ist wegen Gleichung (20)

$$R = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right), \text{ }^{1)} \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

oder, wenn man lieber will,

$$R = a \operatorname{\mathfrak{Cos}} \frac{s}{a}, \quad \ldots \ldots \quad (21')$$

welches die natürliche Gleichung der Kettenlinie gleichen Widerstandes ist; sie zeigt eine evidente Analogie mit der kartesischen Gleichung der gewöhnlichen Kettenlinie; daraus läfst sich dann ableiten: **Wenn eine Kettenlinie gleichen Widerstandes auf einer Geraden rollt, so ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte für die successiven Berührungspunkte eine gemeine Kettenlinie.**

Die Betrachtung der Gleichung (21) führt leicht auch zu den allgemeineren, durch die Gleichung

$$R = \frac{a}{2k}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right) \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

dargestellten Kurven, wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet[2]). Sie erfreuen sich ähnlicher geometrischen Eigenschaften, wie die Kettenlinien gleichen Widerstandes. Um dies zu zeigen, wollen wir mit ω den Winkel der Tangente mit einer festen Geraden bezeichnen; dann

---

1) G. M. Minchin, *Treatise on Statics* (Oxford 1872).

2) Cifarelli, *Sopra una classe di curve intrinsecamente analoghe alla catenaria di eguale resistenza* (Giorn. di Matem. XXXVI, 1898).

haben wir $R = \frac{ds}{d\omega}$, und daher, wenn wir $s = f(\omega)$ setzen, so wird $R = f'(\omega)$ und die Gleichung (22) wird zu

$$f'(\omega) = \frac{a}{2k}\left(e^{\frac{f}{a}} + e^{-\frac{f}{a}}\right),$$

daher ist

$$\frac{\omega}{2k} = \int \frac{d\frac{f}{a}}{e^{\frac{f}{a}} + e^{-\frac{f}{a}}}.$$

Um diese Integration auszuführen, setzen wir $\frac{f}{a} = ix$ und erhalten

$$\frac{\omega}{2k} = i\int \frac{dx}{\cos x} = i \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right);$$

daher

$$\sin\frac{\omega}{k} = \frac{e^{\frac{2f}{a}} - 1}{e^{\frac{2f}{a}} + 1},$$

daher ist $f(\omega)$ oder

$$s = a \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2k}\right).$$

Zufolge dessen ist

$$R = \frac{a}{k} \frac{1}{\cos\frac{\omega}{k}},$$

welche Relationen die vorigen (19) und (20) als Spezialfälle umfassen. — Die kartesischen Koordinaten in Funktionen von ω entwickelt ergeben sich (vgl. Note II) als

$$x = \frac{a}{k}\int \frac{\cos\omega \cdot d\omega}{\cos\frac{\omega}{k}}, \qquad x = \frac{a}{k}\int \frac{\sin\omega \cdot d\omega}{\cos\frac{\omega}{k}},$$

und diese Integrale können in endlichen Ausdrücken wiedergegeben werden, wenn k rational ist.

Dreiundzwanzigstes Kapitel.

Die ebene Elastizitätskurve (Muldenkurve), die paracentrische Isochrone und die Meridiankurve des Körpers vom kleinsten Widerstande.

237. Wenn ein geradliniger, gleichförmiger und elastischer Stab auf zwei geraden, nicht elastischen in derselben Horizontale liegenden Strecken aufliegt, und auf ihn bestimmte Kräfte einwirken, so nimmt er eine bestimmte Gleichgewichtsform an, welche man die Elastizitäts-

kurve nennt. Auch diese Kurve wurde von Galilei mit Unrecht für eine Parabel gehalten; Jacob Bernoulli aber zeigte, daſs diese Identifizierung irrig sei, und gelangte zu einer geometrischen Charakterisierung der fraglichen Kurve. Er fand auſserdem, daſs diese Kurve nur das Profil der Gestalt sei, die eine vollkommen biegsame Fläche, z. B. ein Tuch annimmt, wenn es, an zwei Seiten horizontal befestigt, durch eine schwere Flüssigkeit belastet wird, daher der Name Muldenkurve (Lintearia), den die Elastizitätskurve erhielt, und der mehrfach noch im Gebrauch ist[1]). Später beschäftigte sich auch Johann Bernoulli mit dieser Kurve[2]), Daniele fand, daſs die Kurve der Bedingung genüge, daſs $\int \frac{ds}{R^2}$ ein Minimum werde, wenn s wie gewöhnlich den Bogen, R den Krümmungsradius bedeutet. Diese Beobachtung veranlaſste Euler „die Kurven aufzusuchen, die durch zwei gegebene Punkte gehend und daselbst zwei gegebene Geraden berührend, $\int \frac{ds}{R^2}$ zu einem Minimum machen". Vollständig gelöst findet sich diese Aufgabe in dem berühmten Werke *Methodus inveniendi lineas curvas maxima minimave proprietate gaudentes* (Lausannae et Genevae 1744), dessen Appendix I der Klassifikation der Elastizitätskurven in neun Typen gewidmet ist. Derselbe berühmte Geometer hat ferner bemerkt, daſs von allen ebenen Kurven, die denselben Umfang haben und dieselbe Fläche einschlieſsen, die Elastitätskurve diejenige ist, welche durch Rotation um eine in ihrer Ebene liegende Gerade ein Maximum oder Minimum des Volumens erzeugt.

Durch Betrachtungen aus der Mechanik[3]), die unserem Thema fern liegen, läſst sich zeigen: **Bei der Elastizitätskurve ist die Krümmung proportional der Differenz zwischen einer Konstanten und der Abscisse**; ihre Differenzialgleichung ist demnach von folgender Gestalt

$$c^2 \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = a - x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

1) S. die wichtige Abhandlung *Curvatura laminae elasticae. Ejus identitatem cum curvatura lintei a pondero inclusi fluidi expanso* (Acta Erud. Juni 1694; *Jac. Bernoulli Opera,* S. 639); auſserdem die *Explicationes, annotationes et additiones* (Acta Erud. Dez. 1695; *Opera,* S. 663); schlieſslich die Arbeit *Véritable hypothèse de la resistance des solides avec la démonstration de la courbure des corps qui font les ressorts* (Mém. de Paris, MDCCV; *Opera,* S. 976).

2) *Solutio problematis curvaturae laminae elasticae a pondere appenso curvatae* (*Joh. Bernoulli Opera*, IV, S. 242). Vgl.: Lacroix, *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral* II. (Paris 1798) S. 713—714 und Caluso, *De la courbe élastique* (Torino Mem. 1805—1808).

3) S. z. B. Poisson, *Traité de mécanique* I. (2. Aufl. Paris 1833) S. 598.

Diese ist zunächst einer ersten Integration fähig, durch welche man erhält

$$2c^2 \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = 2ax - x^2,$$

vorausgesetzt, dafs für $x = 0$ auch $\frac{dy}{dx} = 0$ sei. Schreiben wir nun wie folgt

$$dy = \frac{2ax - x^2}{\sqrt{4c^4 - (2ax - x^2)^2}} \cdot dx, \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

so sehen wir, dafs die Integration nicht weiter ausführbar ist, es sei denn, dafs wir elliptische Funktionen anwenden, und diese Thatsache wurde sowohl von Jacob Bernoulli als auch von Maclaurin[1]) bemerkt. Dennoch lassen die Gleichungen (1) und (2) verschiedene Schlüsse zu: die (2) zeigt nämlich, dafs die Gleichung der Tangente im Punkte (x, y) lautet

$$\frac{Y - y}{X - x} = \frac{2ax - x^2}{\sqrt{4c^4 - (2ax - x^2)^2}}, \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

woraus hervorgeht: **Die Berührungspunkte der Tangenten, von einem beliebigen Punkte an die Elastizitätskurve gezogen, liegen auf einer Kurve sechster Ordnung, die jenen Punkt als Doppelpunkt hat**; daher **gehört jede derartige Kurve einem System an mit den Charakteristiken $\mu = 2$, $\nu = 4$.** Die Gleichungen (1) und (2) liefern ferner

$$s = \int \frac{2c^2 \cdot dx}{\sqrt{4c^4 - (ax - x^2)^2}}, \qquad R = \frac{c^2}{a - x}; \quad \ldots \quad (4)$$

wird x eliminiert, so ist

$$s = \int \frac{2c^4 \cdot dR}{\sqrt{4c^4R^4 - (a^2R^2 - c^4)^2}}, \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

welches die natürliche Gleichung der Kurve ist. In dem Spezialfalle $a = 0$ wird diese zu

$$s = 2 \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{\frac{c}{\sqrt{2}}}\right)^4 - 1}},$$

und stellt daher (vgl. Nr. **216**) eine Ribaucour'sche Kurve dar. Einen anderen bemerkenswerten Spezialfall erhält man aus der Annahme, dafs zwischen den Konstanten a und c die Beziehung $a^4 = 4c^4$ bestehe; dann giebt die Gleichung (2)

$$dy = \frac{2ax - x^2}{(x - a)\sqrt{a^2 + 2ax - x^2}} \cdot dx,$$

daher kann y durch elementare Funktionen von x ausgedrückt werden. In dem allgemeinen Falle aber liefert uns die Gleichung (2) y in

1) *Treatise on Fluxions* (Edinburgh 1742) n°. 927.

elliptischen Funktionen; da nun die Resultate ein verschiedenes Aussehen erhalten, je nach der relativen Gröfse von a und c, so erhält man dementsprechend auch verschiedene Formen der Elastitätskurve[1]).

238. Eine andere ältere Aufgabe, die ebenfalls zu elliptischen Funktionen führt, wurde im Jahre 1687 von Leibniz gestellt: „die Kurve aufzusuchen, längs derer sich ein aus einer gegebenen Höhe fallender, schwerer Punkt bewegt, indem er sich zugleich einem festen Punkte nähert oder sich von ihm entfernt, derart, dafs sein Abstand von diesem der Zeit proportional sei.“ Die Kurve wurde von Leibniz selbst die paracentrische Isochrone genannt[2]) und von Leibniz[3]) und den beiden Brüdern Jacob[4]) und Johann[5]) Bernoulli bestimmt. Wenn sie eben ist, so wird sie geometrisch durch die Differenzialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = a \frac{dy}{\sqrt{a^2 y - y^3}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

bestimmt, woraus sich leicht ableiten läfst, dafs sie einem Systeme mit den Charakteristiken $\mu = 2$, $\nu = 3$ angehört. Eine methodische Bearbeitung der paracentrischen Isochrone steht, wenigstens soweit wir feststellen konnten, noch aus; wir beschränken uns daher auf die Bemerkung, dafs, wenn man mit dt den gemeinsamen Wert der beiden Seiten der Gleichung (6) bezeichnet und die Integrationskonstanten in geeigneter Weise wählt, man

$$x = \frac{t^2}{4}, \qquad y = \wp\left(\frac{t}{a}\right), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

und damit eine elegante parametrische Darstellung der Kurve erhält.

Zu einer anderen Kurve führt die Lösung eines der ältesten Probleme aus der Variationsrechnung; es lautet: **Diejenige ebene Kurve zu finden, die durch zwei gegebene Punkte geht und durch Rotation um eine in ihrer Ebene gelegene Axe denjenigen Körper erzeugt, der bei der Bewegung in einer Flüssigkeit in der Richtung jener Axe den geringsten Widerstand erleidet.** Newton behauptet in seinen *Principia* (Lib. II, Sect. VII, Prop. 34), dafs die Differenzialgleichung der dies Problem lösenden Kurve folgende sei:

$$y = a \frac{(1 + y'^2)^2}{y'^3}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

---

1) Schell, *Theorie der Bewegungen und der Kräfte* II. (2. Aufl. Leipzig 1880) S. 119—126; Greenhill, *Applications of elliptic functions* (London 1892) S. 87—89.

2) Brief von Leibniz an Huygens vom 1./11. Okt. 1693 (*Leibniz*, ed. Gerhardt, II, S. 164).

3) *Constructio propria problematis de curva isochrona paracentrica* (Acta Erud. 1694; *Leibniz*, ed. Gerhardt, V, S. 309).

4) Acta Erud. Juni u. Sept. 1694 (*Jac. Bernoulli Opera* I, S. 601—12).

5) Acta Erud. Oct. 1694 (*Joh. Bernoulli Opera* I, S. 119—122). *Lectiones mathematicae* XXIV. (*Opera* III, S. 486).

mit Hilfe der Variationsrechnung ist es leicht, diese zu verifizieren, wenn man beachtet, dafs bei dieser Kurve $\int \frac{y \cdot dy^3}{dx^2 + dy^2}$ zu einem Minimum werden mufs. Die Gleichung (8) zeigt auch, dafs die Kurve einem System mit den Charakteristiken $\mu = 4$, $\nu = 1$ angehört, ebenfalls führt sie zu einer analytischen Darstellung der Kurve. Da nämlich $y' = \frac{dy}{dx}$ ist, so hat man $dx = \frac{dy}{y'}$, daher durch teilweise Integration

$$x = \frac{y}{y'} + \int \frac{y \cdot dy'}{y'^2};$$

Setzen wir für y seinen Wert aus (8), so folgt

$$x = a \frac{(1 + y'^2)^2}{y'^4} + a \int \frac{(1 + y'^2)^2}{y'^5} dy,$$

oder

$$x = a\left(\frac{3}{4y'^4} + \frac{1}{y'^2} + \log y'\right) + c. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Diese Gleichungen im Verein mit (8) stellen, da sie x und y in Funktionen von y' liefern, welches man als Parameter betrachten kann, die Kurve dar[1]). Sie hat den Punkt, für welchen $y' = \sqrt{3}$ ist, als Spitze. — Nach Newton haben sich mit dem Probleme des Körpers vom geringsten Widerstande der Marquis de l'Hôpital[2]), Johann Bernoulli[3]) und neuerdings Legendre[4]) beschäftigt; der letztere bemerkte, dafs für die erhaltene Kurve die beiden durch

$$y^4 = \frac{64}{27} a x^3, \qquad x - c = a \log \frac{y}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

dargestellten Kurven asymptotische Kurven seien[5]).

Vierundzwanzigstes Kapitel.

Die Herpolhodie, insbesondere die Poinsot'sche Spirale.

239. Wie bekannt ist Poinsot in seiner *Théorie nouvelle de la rotation des corps*[6]) dazu gelangt, die Bewegung eines festen Körpers im Raume durch das Rollen eines Ellipsoides mit festem Centrum auf einer Ebene darzustellen. Bei diesem Rollen beschreibt der Be-

1) Vgl. Lacroix, a. O. II, S. 698—700.

2) Acta Erud. Aug. 1699. 3) Das. Nov. 1699.

4) *Sur la manière de distinguer les maxima des minima dans le calcul des variations* (Mém. de Paris, 1786) § VI.

5) Bezüglich weiterer Einzelheiten sehe man F. August, *Ueber die Rotationsfläche kleinsten Widerstandes* (Crelle's Journ. CIII, 1888) und V. Armanini, *Sulla superficie di minima resistenza* (Annali di Matem. 3. Ser. IV, 1900).

6) Liouvilles Journ. XVI, 1851.

rührungspunkt sowohl auf dem Ellipsoide als auch auf der Ebene eine gewisse Kurve; beiden gab er den Namen Polhodien (von πόλος Pol, und ὁδὸς Weg), die erstere die „relative“, die zweite die „absolute“, indem er hinzufügte, dafs, wenn man an die Gestalt der Kurve erinnern wollte, man die ebene Kurve Herpolhodie (von ἕρπω krieche) nennen könne, indem man für die räumliche Kurve den Namen Polhodie beibehielte. Diese Namen sind auch jetzt noch im Gebrauch.

Wenn a, b, c die Halbaxen des Ellipsoides sind, h der Abstand seines Centrums von der betrachteten Ebene, und man setzt

$$\alpha^2 = b^2 + c^2 - \frac{b^2c^2}{h^2}, \quad \beta^2 = c^2 + a^2 - \frac{c^2a^2}{h^2}, \quad \gamma^2 = a^2 + b^2 - \frac{a^2b^2}{h^2},$$

$$P = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \quad Q = \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2, \quad R = \alpha^2\beta^2\gamma^2,$$

$$\Delta = h^6 - Ph^4 + Qh^2 + R,$$

und bezeichnet aufserdem mit Δ' und Δ'' die erste und zweite Ableitung von Δ nach h, so kann die Differenzialgleichung der Herpolhodie geschrieben werden als

$$d\omega = \frac{d\varrho}{i\varrho} \frac{h\varrho^2 + \sqrt{\Delta}}{\sqrt{\varrho^6 + \Delta''\varrho^4 + \Delta'\varrho^2 + \Delta}} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

oder auch, wenn $\varrho^2 = v$ gesetzt wird,

$$d\omega = \frac{dv}{2iv} \frac{hv + \sqrt{\Delta}}{\sqrt{v^3 + \Delta''v^2 + \Delta'v + \Delta}} \quad \ldots\ldots \quad (1')$$

Hierin sind allerdings die Variabelen getrennt, aber um das Integral zu erhalten, müssen im allgemeinen elliptische Funktionen zur Anwendung kommen[1]). Es giebt jedoch einen Fall, in welchem die Integration elementar ausgeführt werden kann, nämlich wenn $h = b$. In diesem Falle wird die Gleichung (1)

$$d\omega = b \frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{\beta^2 - b^2 - \varrho^2}}.$$

Wird zur Abkürzung $\sqrt{\beta^2 - b^2} = n^2$ gesetzt, und wird alsdann integriert, so hat man

$$\omega = \frac{b}{n} \log \frac{\varrho}{n + \sqrt{n^2 - \varrho^2}},$$

unter der Voraussetzung, dafs für $\varrho = n$, $\omega = 0$ wird. Schreiben wir diese Gleichung auf die beiden folgenden Weisen:

1) Die Singularitäten der Herpolhodie (insbesondere, dafs sie, entgegengesetzt der Meinung Poinsot's, ohne Wendepunkte und Spitzen sei) wurden von W. Hess untersucht (*Das Rollen einer Fläche zweiten Grades auf einer invariabelen Ebene,* Diss. München, 1880); ferner von de Sparre (C. R. XCIX, 1884), Mannheim (Das. C, 1885), Saint-Germain (Das.), Franke (Das.) und Résal (Journ. de l'Ec. polyt. LV. Heft, 1889).

$$e^{\frac{n\omega}{b}} = \frac{\varphi}{n+\sqrt{n^2-\varrho^2}}, \qquad e^{-\frac{n\omega}{b}} = \frac{\varphi}{n-\sqrt{n^2-\varrho^2}},$$

so folgt hieraus

$$e^{\frac{n\omega}{b}} + e^{-\frac{n\omega}{b}} = \frac{2n}{\varrho},$$

daher ist

$$\varrho\,\frac{e^{\frac{n\omega}{b}} + e^{-\frac{n\omega}{b}}}{2} = n, \qquad (2)$$

oder

$$\varrho \operatorname{Cos}\frac{n\omega}{b} = n. \qquad (2')$$

Der hierdurch dargestellten Kurve (die Poinsot[1]) als eine doppelte Spirale auffafst) hat man den Namen die Poinsot'sche Spirale gegeben. Beachten wir, dafs zufolge von (2')

$$\frac{d\varrho}{d\omega} = -\frac{n^2}{b}\,\frac{\operatorname{Sin}\frac{n\omega}{b}}{\operatorname{Cos}\frac{n\omega}{b}},$$

so wird die Subnormale und die Subtangente wiedergegeben durch

$$S_n = -\frac{\varrho^2}{b}\operatorname{Sin}\frac{n\omega}{b}, \qquad S_t = -b : \operatorname{Sin}\frac{n\omega}{b},$$

daher besteht die Beziehung $S_n : S_t = \frac{\varrho^2}{b^2}$, nicht aber die andere $S_n = S_t = -\varrho$, wie vermutet worden war[2]). — Führt man auf die Poinsot'sche Spirale die Transformation durch reziproke Radien aus mit dem Pole als Centrum, so bekommt man eine Kurve, deren Gleichung von folgendem Typus ist

$$\varrho = b \operatorname{Cos}\frac{\omega}{a},$$

auf welche Joh. Bernoulli bei einer durch König gestellten physikalisch-mathematischen Frage stiefs[3]).

1) Liouvilles Journ. XVI, 1851, S. 301.

2) A. Cabreira, *Sur la géométrie des courbes transcendentes, traduit du Portugais* (Lissabon 1896) S. 32—33.

3) *De curva quam describit corpus inclusus in tubo circulante* (*Joh. Bernoulli Opera* IV, S. 248, 252). Vgl. auch den Anhang eines von Euler an Johann Bernoulli gerichteten Briefes vom 27. Aug. 1742, der im II. Bande der *Corréspondance mathém. et phys. de quelques célèbres géomètres du XVIII Siècle* (St. Pétersbourg 1843) S. 79—81 steht.

Fünfundzwanzigstes Kapitel.

Andere mathematisch-physikalische Kurven.

240. Läfst man zwischen zwei Punkten M_1 und M_2 einer ebenen Kurve einen elektrischen Strom von der Stärke 1 fliefsen, so übt dieser auf einen in der Ebene der Kurve gelegenen Punkt O, in welchem sich die Einheit der magnetischen Masse befindet, eine Kraft aus, deren Richtung normal zur Ebene des Stromes ist, und deren Gröfse durch $\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{d\omega}{\varrho}$ ausgedrückt wird, wo ϱ, ω gewöhnliche Polarkoordinaten mit O als Pol sind. Es soll nun diejenige durch M_1 und M_2 gehende Kurve von gegebener Länge L gesucht werden, für welche diese Wirkung auf O ihren gröfsten oder kleinsten Wert erhält. Zu dem Zwecke genügt es, das obige Integral zu einem Maximum oder Minimum werden zu lassen. Mit Anwendung der Variationsrechnung gelangt man zu folgender Differenzialgleichung der gewünschten Kurve:

$$-\frac{k}{\varrho^3}=\frac{\varrho^2\frac{d^2\varrho}{d\omega}-2\left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2-\varrho^2}{\left[\varrho^2+\left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

wo k eine Konstante ist. Bezeichnen wir nun mit R den Krümmungsradius, so ist die linke Seite $=-\frac{1}{R}$, daher kann man schreiben

$$\varrho^3 = kR; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

folglich: **Die Kurve von gröfster oder kleinster elektromagnetischer Wirkung auf einen festen Punkt ist von der Beschaffenheit, dafs der Krümmungsradius in jedem Punkte proportional dem Kubus des zugehörigen Radius vector ist, der von dem festen Punkte ausgeht.** Emil Weyr, der diesen eleganten Satz aufstellte, hat auch die Gl. (1) integriert, wobei er als Resultat erhielt[1])

$$\omega = a + \int\frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{\frac{\varrho^4}{b\varrho-k}-1}}; \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

der Leser wird dieses verifizieren können, indem er die Formeln anwendet, die eine Kurve, die durch eine Relation zwischen dem Krümmungsradius und dem Radius vector dargestellt wird, bestimmen (vgl. Nr. **220**). Die so erhaltene Kurve kann die elektromagne-

1) *Ueber die Curve der gröfsten und kleinsten elektromagnetischen Wirkung* (Prager Ber., 1869).

tische Kurve Em. Weyr's genannt werden. — Sie hat aber nichts gemein mit den sog. magnetischen Kurven von Aoust, die in bipolaren Koordinaten folgende analytische Darstellung haben:

$$\int \frac{d\varrho_1}{\cos^m \varrho_1} + \int \frac{d\varrho_2}{\cos^m \varrho_2} = Const.,$$

wo m eine gegebene Zahl ist[1]). — Es mag zuletzt bemerkt werden, dafs man in der Optik man bei einer speziellen Frage[2]) auf eine Kurve trifft, die in Polarkoordinaten durch die Gleichung dargestellt wird:

$$\sin(\varrho^2) \cdot \sin 2\omega = Const. \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

241. Unter den verschiedenen Instrumenten, die zur mechanischen Ausführung der Quadratur erdacht sind, giebt es eines, das von Reitz[3]) angegeben wurde, und dessen Theorie H. Schubert[4]) untersucht hat. Hierbei trifft man als Fadenkurve eine neue Spirale, die analytisch durch folgende beiden Gleichungen dargestellt wird

$$\left.\begin{aligned} lx &= \frac{\cos\varphi\left\{\frac{3}{2}k\varphi\sqrt{\varphi}\sqrt{l^2-\frac{3}{2}k\varphi}+\frac{1}{2}l^2\sqrt{\frac{3}{2}k}\right\}+\sin\varphi\sqrt{\frac{3}{2}k}\cdot\varphi\left(l^2-\frac{3}{2}k\varphi\right)}{\sqrt{\varphi}\sqrt{l^2-\frac{3}{2}k\varphi}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}k}} \\ ly &= \frac{\sin\varphi\left\{\frac{3}{2}k\varphi\sqrt{\varphi}\sqrt{l^2-\frac{3}{2}k\varphi}+\frac{1}{2}l^2\sqrt{\frac{3}{2}k}\right\}+\cos\varphi\sqrt{\frac{3}{2}k}\cdot\varphi\left(l^2-\frac{3}{2}k\varphi\right)}{\sqrt{\varphi}\sqrt{l^2-\frac{3}{2}k\varphi}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}k}} \end{aligned}\right\} . (5)$$

wo l und k Konstanten von gewisser Bedeutung und φ ein Parameter ist. Schubert hat bemerkt, dafs sie in Linienkoordinaten einer einfacheren Darstellung fähig ist; sind nämlich ξ und η die

---

1) *Analyse infinitésimale des courbes planes* (Paris 1873) S. 402—5. In demselben Werke (S. 405—7) werden die Gleichgewichtskurven betrachtet, die durch die Eigenschaft charakterisiert sind, dafs ein Körper auf ihnen in jedem Punkte im Gleichgewicht bleibt, wenn auf ihn gegebene Kräfte wirken. — Es möge hier noch bemerkt werden, dafs der Name magnetische Kurve (Kraftlinien) von Tait (*Eléments de la théorie des quaternions,* übersetzt von Glan, II, 1884, S. 234) dem Orte eines Punktes P gegeben wird, derart, dafs wenn A_1, A_2 feste Punkte sind, $\cos OA_1P \mp \cos OA_2P = const.$ Diese Kurve ist algebraisch, da, wenn man A_1A_2 als x-Axe und die Mitte von A_1A_2 als Anfang nimmt, man die Gleichung

$$\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}} \pm \frac{a+x}{\sqrt{(a+x)^2+y^2}} = c$$

findet. Vgl. auch Holzmüller, *Ingenieurmathematik* II. (Leipzig 1898) S. 121.

2) Spurge, *On the curve of constant intensity of homogenous polarised light seen in a unaxial crystal out at right angles to the optic axes* (Trans. of the phil. Soc. of Cambridge, XV, 1884).

3) Reitz, *Mitteilungen über seinen verbesserten Seewegintegrator* (Hamb. Mitteil. 1879).

4) *Construktion der Fadencurve des verbesserten Seewegintegrators* (Das.); W. Dyck, *Katalog mathem. etc. Modelle* (München 1892) S. 224.

Strecken, die eine beliebige Tangente von den Koordinatenaxen abschneidet, so erhält man

$$\frac{l}{\xi}=\frac{\cos\varphi\sqrt{\frac{3}{2}k\varphi}+\sin\varphi\sqrt{l^2-\frac{3}{2}k\varphi}}{\sqrt{\frac{3}{2}k\varphi}},\quad \frac{l}{\eta}=\frac{\sin\varphi\sqrt{\frac{3}{2}k\varphi}-\cos\varphi\sqrt{l^2-\frac{3}{2}k\varphi}}{\sqrt{\frac{3}{2}k\varphi}}.$$

Schliefslich hat Galton in seinen Untersuchungen über die Anwendung der Analysis auf die Evolutionstheorie gewisse spezielle Kurven betrachtet[1]), es sind die durch Gleichungen von folgendem Typus dargestellten:

$$y=y_0\left(1+\frac{x}{a_2}\right)^{m_1}\cdot\left(1+\frac{x}{a_2}\right)^{m_2} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

$$y=y_0\left(1+\frac{x}{a}\right)^{p}\cdot e^{-\frac{x}{\alpha}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$y=y_0\cos^{2m}\theta\cdot e^{n\theta},\quad x=a\operatorname{tg}\theta \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

$$y=y_0\cdot e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon^2}},\qquad x=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\cdot dt \quad \ldots \quad (9)$$

Alle Kurven vom Typus (6) sind algebraisch — es sind spezielle parabolische Kurven (vgl. Nr. **118**) — alle anderen sind transscendent. Die Kurven von der Gestalt (9) wurden von Galton Ogive (Spitzbogen) genannt; ihre Wichtigkeit vom mathematischen Standpunkte aus ist nicht derart, dafs wir länger bei ihnen verweilen[2]).

1) Genauere Notizen sowie eine reichhaltige Bibliographie des Gegenstandes finden sich in der neueren Arbeit von G. Duncker, *Die Methode der Variationsstatistik* (Leipzig 1899).

2) Mit biologischen Fragen hängen auch die Kurven zusammen, welche C. É. Wasteels in seinen Aufsätzen *Over binomiale curven* und *Over verzamelcurven* (Handeling van het Vlaamisch natur- en geneeskundig congres 1899) untersuchte.

VII. Abschnitt.

Abgeleitete Kurven.

Erstes Kapitel.

Die Methode der Koordinatenverwandlung.

242. Um unser ohnehin schon reichhaltiges Verzeichnis spezieller ebener Kurven noch um weitere neue Elemente zu vermehren, giebt es ein aufserordentlich ergiebiges Verfahren, welches darin besteht, dafs man eine gegebene Kurve einer geometrischen ebenen Transformation unterwirft, ein Verfahren, das man bei seiner häufigen Anwendung und Wichtigkeit als charakteristisch für die moderne Geometrie ansehen kann. Die hierdurch erhaltenen Resultate haben im allgemeinen keine hervorragende Bedeutung und treten daher in unseren Darlegungen nur ausnahmsweise auf (s. z. B. Kap. 11 dieses Abschn.), und zwar nur, wenn entweder die angewendeten Transformationen besondere Eigenschaften haben, oder die erhaltenen Kurven von unbestreitbarer Wichtigkeit sind.

Man kennt aber noch andere Konstruktionen, durch die jedem Punkte (oder jeder Tangente) einer Kurve ein bestimmter Punkt (oder eine bestimmte Gerade) zugeordnet wird. Wendet man eine solche auf alle Punkte einer Kurve Γ_0 an, so erhält man eine zweite Kurve Γ_1, die im allgemeinen von Γ_0 verschieden ist, und deren Bedeutung sehr häufig ein gewisses Licht auf die innere Natur der Kurve Γ_0 wirft. Beispiele solcher Ableitungen bieten uns die cissoidalen (Nr. **29**), die strophoidalen (Nr. **41**) und die konchoidalen Kurven (Nr. **69**); auch die in Nr. **31** und **45** erwähnten Methoden können hierher gerechnet werden. Auf die Kurve Γ_1 kann man alsdann wiederum dieselbe Konstruktion anwenden; man gelangt so zu einer Kurve Γ_2, die im allgemeinen von Γ_0 und Γ_1 verschieden sein wird. Fahren wir in dieser Weise fort, so erhalten wir eine unbegrenzte, eventuell in sich zurücklaufende Reihe von Kurven $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n, \ldots$. Nicht genug damit: man kann andererseits auch eine Kurve Γ_{-1} aufsuchen, derart, dafs wenn man auf sie jene Konstruktion anwendet, man Γ_0 erhält; dann eine Kurve Γ_{-2}, die in derselben Weise zu Γ_{-1} führt, u. s. w. Damit ist eine zweite unbegrenzte, eventuell in sich zurückkehrende Reihe von Kurven $\Gamma_0, \Gamma_{-1}, \Gamma_{-2}, \ldots \Gamma_{-n} \ldots$ gegeben.

Alle diese Kurven $\Gamma_{\pm n}$ heifsen im allgemeinen die von Γ_0 abgeleiteten Kurven, und zwar positive oder negative, je nach dem Vorzeichen des Index. Ein höchst einfaches Beispiel, das wir hier jedoch nur flüchtig erwähnen wollen, besteht darin, dafs man jedem Punkte einer Kurve den Endpunkt der zugehörigen Polarsubnormale entsprechen läfst. Für jede von diesen Ableitungskonstruktionen bietet sich nun die wichtige Frage dar, ob die entstehende Kurvenreihe unbegrenzt oder in sich zurücklaufend ist, und wenn das letztere nicht im allgemeinen der Fall ist, wie man die Kurve Γ_0 zu wählen hat, damit eine bestimmte abgeleitete $\Gamma_{\pm n}$ mit der Ausgangskurve zusammenfalle. Ein grofser Teil der Ausführungen dieses Abschnittes wird den wichtigen Folgerungen gewidmet sein, die sich aus Betrachtungen obiger Art ergeben[1]).

Zuvor müssen wir jedoch auf ein, von dem soeben geschilderten ganz verschiedenes Verfahren, das wesentlich analytischer Natur ist, eingehen, das zur Entdeckung vieler neuen Kurven geführt hat und noch führen kann: es ist die Methode der Koordinatenverwandlung. Diese besteht darin, dafs wir die Funktion, durch welche die Koordinaten des Kurvenpunktes oder der Tangente mit einander verknüpft sind, beibehalten, dagegen die Koordinaten selbst durch die eines anderen, zu dem ersteren völlig heterogenen Koordinatensystems ersetzen.

Als eine Anwendung dieser Methode können wir das unseren Lesern wohlbekannte Verfahren anführen, durch welches man, von einer Kurve als Ort von Punkten betrachtet, zu der als Enveloppe von Geraden betrachteten Kurve übergeht. **Man wandelt also die Punktgleichung $f(x, y) = 0$ in die Liniengleichung**

$$f(u, v) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

um, wo man die Linienkoordinaten u, v entweder als Plücker'sche Koordinaten, oder, was anschaulicher und bequemer ist, als Unverzagt-Schwering'sche Linienkoordinaten, die auch zu den kartesischen dual

1) Aus unserer Betrachtung haben wir die Hesse'sche, Steiner'sche Kurve u. s. w. ausgeschlossen, da ihre Untersuchung der allgemeinen Theorie der algebraischen Kurven angehört. Gleiches gilt für den Ort der Centren der Kegelschnitte, die mit einer gegebenen Kurve eine Berührung fünfter Ordnung haben; es ist die sogenannte Abweichungs-(Aberrations-)Kurve. Wenn die gegebene Kurve algebraisch ist, so ist es auch die Abweichungskurve; ihre Charakteristiken wurden von W. Bouwmann in der Abh. *Die Plückerschen Zahlen der Abweichungskurve* (Math. Ann. XLIX, 1897) bestimmt. Es möge bemerkt werden, dafs der Name Aberrationskurve in der Astronomie der scheinbaren Bahn eines festen Körpers gegeben wurde, der von einem nach bestimmten Gesetzen sich bewegenden Punkte aus beobachtet wird (Santini, *Elementi di astronomia* II, S. 132; G. Sacchi, *Sulla geometria analitica delle linee piane*, Pavia 1854, S. 103).

sind[1]), auffassen kann. Im Grunde genommen ist diese Koordinatenverwandlung nichts anderes, als die Anwendung des Dualitätsprinzips in der Ebene, und es würde somit ein Leichtes sein, z. B. aus der bekannten Theorie der Kurven dritter Ordnung die Theorie der Kurven dritter Klasse herzuleiten. Allerdings erhält man für die abgeleitete Kurve nur die der ursprünglichen entsprechenden, projektiven Eigenschaften; was aber die metrischen Eigenschaften (in der euklidischen Maſsbestimmung) anlangt, so würde man diese im allgemeinen ganz von neuem zu entwickeln haben, da bis jetzt keine Methode bekannt ist (weil sie auch wahrscheinlich nicht existiert), diese aus denen des dualen Gebildes abzuleiten. — Die Einteilung der Kurven n^{ter} Klasse könnte in ähnlicher Weise, wie die der Kurven n^{ter} Ordnung nach ihren Plücker'schen Charakteren erfolgen. Es möge jedoch hier noch ein anderes Einteilungsprinzip erwähnt werden, welches von H. M. Jeffery erdacht und ausführlich entwickelt ist: es beruht auf der Betrachtung der Zahl, Vielfachheit und Lage der (reellen) Brennpunkte — bekanntlich hat jede Kurve n^{ter} Klasse auch n Brennpunkte! — So kann eine Kurve dritter Klasse einen dreifachen Brennpunkt haben, oder einen doppelten und einen einfachen, oder, was der allgemeinste Fall ist, drei einfache Brennpunkte[2]). Ähnlich sind unter den Kurven vierter Klasse diejenigen ausgezeichnet, die einen vierfachen Brennpunkt haben[3]); alsdann folgen die mit einem dreifachen und einem einfachen[4]). In ähnlicher Weise könnte man die Untersuchung der Kurven vierter Klasse mit zwei Doppelbrennpunkten, mit einem Doppel- und zwei einfachen, und schlieſslich der mit vier einfachen Brennpunkten unternehmen; jedoch dürfte die Zahl der zu untersuchenden Fälle mehr als einen von der Untersuchung abschrecken, um so mehr, als nach den von Jeffery erhaltenen Resultaten zu urteilen, sie nicht sehr lohnend zu werden verspricht. — Nicht bloſs auf die algebraischen, sondern auch auf die transscendenten Kurven kann man die dualistische Verwandlung an-

---

1) Vgl.: F. Rudio, *Die Unverzagt'schen Linienkoordinaten. Ein Beitrag zur Geschichte der analytischen Geometrie* (Abh. zur Gesch. der Math. IX, 1899); K. Schwering, *Theorie und Anwendung der Linienkoordinaten* (Leipzig 1884).

2) Jeffery, *On cubics of the third class with triple foci* (Quart. Journ. XIV, 1876); *On plane cubics with a double and a single focus* (Das.); *On plane cubics of the third class with three single foci* (Das. XVI, 1879 und XVII, 1880); *On plane class cubics with three single foci* (Rep. Brit. Assoc. 1879).

3) Jeffery, *On plane and spherical curves of the fourth classe with quadruple foci* (Rep. Brit. Assoc. 1880); *On plane curves of the fourth class with quadruple foci* (Quart. Journ. XVIII, 1882; daselbst ist der Name Stapes (Bügel) zur Bezeichnung eines Kurvenzweiges mit zwei Spitzen und einem Doppelpunkte eingeführt); *On the stapete-points of class-quartics with quadruple foci* (Das.).

4) Jeffery, *On curves of the fourth class with a triple and a single focus* (Rep. Brit. Assoc. 1883; Quart. Journ. XX, 1884).

wenden und mit dem Studium der so erhaltenen neuen Kurven ein — soweit uns bekannt — noch völlig unerforschtes Gebiet betreten.

243. Eine zweite derartige Koordinatenwandlung, deren Grundgedanke von Varignon[1]) herrührt, liefert gleichfalls zahllose neue Kurven. Diesem Geometer folgend betrachten wir eine beliebige Kurve Γ, die erzeugende Kurve (courbe génératrice), die in kartesischen Koordinaten durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ dargestellt wird, sowie einen Kreis K mit dem Mittelpunkte O und dem Radius a, den Verwandlungskreis (cercle de révolution). Es sei PM (Taf. XVI, Fig. 131) die Ordinate eines beliebigen Punktes P von Γ und sei MP' der Bogen eines Kreises um O mit dem Radius OM derart, dafs, wenn A und L die Endpunkte der durch M und P' gezogenen Radien des Verwandlungskreises K sind, die Proportion besteht

$$2a\pi : \operatorname{arc} AL = 2\pi l : PM,$$

wo $2\pi l$ eine gegebene Länge bedeutet. Sind nun x und y die kartesischen Koordinaten für P, ϱ und ω die Polarkoordinaten von P', so wird die obige Proportion zu

$$2\pi a : a\omega = 2\pi l : y.$$

Daher bestehen zwischen den Koordinaten der beiden Punkte P und P' die Beziehungen

$$x = \varrho, \qquad y = l\omega,$$

in denen der Radius des Verwandlungskreises überhaupt nicht mehr auftritt. Infolgedessen wird, wenn der Punkt P die Kurve Γ, $f(x,y) = 0$ durchläuft, der Punkt P' die Kurve durchlaufen, deren Polargleichung lautet

$$f(\varrho, l\omega) = 0 \qquad (2)$$

Damit ist eine einfache Methode gegeben jeder, durch eine kartesische Gleichung dargestellten Kurve eine andere in Polarkoordinaten nachzubilden. Da man auch $l = 1$ setzen kann, **so besteht das Verfahren in seiner einfachsten Form darin, in der Kurvengleichung die Koordinaten der einen Art mit denen der anderen zu vertauschen.** Bei diesem Verfahren kann man auch aus Eigenschaften der Originalkurve solche der abgeleiteten erhalten: Geht z. B. erstere durch den Koordinatenanfang, so wird letztere durch den Pol gehen; hat jene die y-Axe zur Asymptote, so hat diese den Pol als asymptotischen Punkt; u. s. w. Wenn die ursprüngliche Kurve dagegen, statt durch eine Gleichung in endlichen Ausdrücken, durch eine Differenzialgleichung bestimmt ist,

$$F(x, y, dx, dy, d^2x, d^2y, \ldots) = 0,$$

---

1) S. die ausführliche Abh. *Nouvelle formation de spirales, beaucoup plus différentes entre elles de ce qu'on peut imaginer d'autres courbes quelconques à l'infini; avec les touchantes, les quadratures, les déroulements, et la longueur de quelques arcs de ces spirales, qu'on donne seulement ici pour exemple de cette formation générale* (Mém. de Paris, Année MDCCIV, Paris 1722).

so ist die transformierte Kurve eine Integralkurve mit der Differenzialgleichung

$$F(\varrho, l\omega, d\varrho, ld\omega, d^2\varrho, ld^2\omega, \ldots) = 0.$$

Was nun die Bezeichnung der neuen Kurven anbetrifft, so bemerkt Varignon: „Cette spirale s'appellera parabolique, hyperbolique, logarithmique, circulaire etc. selon que la courbe génératrice sera une parabole, une hyperbole, une logarithmique, une cercle etc." — Durch das obige Verfahren hat er nun folgende Resultate abgeleitet:

1) Aus den Parabeln $x^m = a^{m-1} \cdot y$ (Nr. **116**) die Fermat'schen Spiralen (Nr. **185**).
2) Aus den Hyperbeln $x^m \cdot y = a^{m+1}$ (Nr. **120**) die hyperbolischen Spiralen $\varrho^m \omega = \frac{a^{m+1}}{l}$, deren einfachste (die dem Falle $m = 1$ entspricht) die gemeine hyperbolische Spirale (s. Nr. **189**) ist, die kurz darauf (1710) von Johann Bernoulli unabhängig von Varignon entdeckt wurde.
3) Aus den Parabeln $(a + x)^m = p^{m-1} y$ entstehen die Spiralen $(a + \varrho)^m = p^{m-1} l\omega$, die für $m = 1$ zu Archimedischen (Nr. **182**) und für $m = 2$ zu den parabolischen Spiralen von Bernoulli (Nr. **186**) werden.
4) Aus dem Kreise $x^2 + y^2 = 2rx$ die Spirale $\varrho^2 + l^2\omega^2 = 2r\varrho$.
5) Aus der log. Kurve $x^{-h} = e^y$ (Nr. **224**) die log. Spirale $\varrho = e^{-\frac{l}{h}\omega}$ (Nr. **191**), von der Varignon als einer zu seiner Zeit sehr bekannten Kurve spricht.
6) Hingegen ergiebt sich aus der logarithmischen Kurve $y^{-h} = e^x$ die Varignon'sche logarithmische Spirale mit der Gleichung $l\omega = e^{-\frac{\varrho}{h}}$ [1]).

Wir können hier noch hinzufügen: Aus der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ wird die Spirale $\frac{\varrho^2}{a^2} + \frac{l^2\omega^2}{b^2} = 1$, die je nach dem Werte von l ganz verschiedene Gestalt hat; für $l > \frac{b}{\pi}$ ist sie lemniskatenähnlich, für $l = \frac{b}{2\pi}$ ähnelt sie der auf Taf. XI, Fig. 76 dargestellten Rhodonee u. s. w.[2]) — Aus den trigonometrischen Kurven $y = a \operatorname{tg} x$ und $y = a \sin \operatorname{vers} x$ entstehen die sog. trigonometrischen Spiralen

$$\varrho = a \operatorname{tg} \omega \quad \text{und} \quad \varrho = a \sin \operatorname{vers} \omega,$$

die algebraische Kurven vierter Ordnung sind (vgl. S. 182); auf diese bei den sowie auf fünf andere, weniger interessante, stieſs T. Olivier[3]). —

1) Vgl. T. Olivier, *Cours de géométrie descriptive* (2. Aufl. Paris 1854) S. 307.
2) Eine Bemerkung des Übersetzers F. Schütte.
3) O. a. *Cours de géom.* S. 293.

Schließlich aus der Gewölbelinie $x = b\,\mathfrak{Cos}\,\frac{y}{c}$ (Nr. **236**) entsteht die Bernoulli'sche Kurve $\varrho = b\,\mathfrak{Cos}\,\frac{l\omega}{c}$. — Diese Beispiele ließen sich noch ins Unendliche vermehren; die angeführten dürften jedoch hinreichen, die Varignon'sche Methode vollständig klar zu legen[1]).

244. Mit den im Laufe der Zeit erfolgten Fortschritten der Wissenschaft wurde die Idee des Koordinatenwechsels auch auf andere Koordinatensysteme angewandt. **Man geht von einer der Gleichungen $f(x, y) = 0$ oder $f(\varrho, \omega) = 0$ z. B. über zu**

$$f(s, \varepsilon) = 0, \qquad \qquad (3)$$

wo s den von einem festen Punkte aus gemessenen Bogen, ε den Kontingenzwinkel im Endpunkte desselben bedeutet. Anwendungen hiervon finden sich an vielen Stellen der schon citierten Werke von A. Peters und C. C. F. Krause; so gelangte der letztere Geometer zu zwei Parabolae originariae genannten Kurven; die eine ist die Klothoide, die, wie wir (Nr. **194**) gesehen haben, durch $s^2 = 2a\varepsilon$ dargestellt wird, die andere unterscheidet sich nicht von der gewöhnlichen Kreisevolvente (Nr. **208**); desgleichen gelangte er von der Hyperbel bezw. hyperbolischen Spirale zu der durch die Eigenschaft

$$s\varepsilon = a$$

charakterisierten Kurve: da bei dieser ε umgekehrt proportional zu s ist, so schlug Krause vor, sie curva reciproca oder besser curva antiloga[2]) zu nennen. Da nun $\varepsilon = \frac{a}{s}$, so ist $\frac{d\varepsilon}{ds} = -\frac{a}{s^2}$; nennen wir den Krümmungsradius R, so haben wir $\frac{1}{R} = \frac{d\varepsilon}{ds}$; folglich **lautet die natürliche Gleichung der Antiloga**

$$aR + s^2 = 0.$$

Wir wollen hinzufügen: wenn s_{-1} und s_{+1} die Bogen der Evolute und Evolvente der Antiloga sind, so ist, da im allgemeinen $s_{-1} = \frac{d\varepsilon}{ds}$ und $s_{+1} = \int \varepsilon \cdot ds$, hier

1) Am Schlusse seiner Abhandlung hat Varignon noch eine andere Methode der Kurvenverwandlung angegeben. Nachdem die obige Konstruktion (s. Taf. XVI, Fig. 131) ausgeführt ist, errichte man auf OP' die Senkrechte $P'P''$ gleich der Ordinate η der Kurve $F(x, \eta) = 0$; der Ort der Punkte P'' wird die Transformierte Γ'' von Γ sein. Um deren Gleichung zu erhalten bezeichnen wir die Polarkoordinaten von P'' mit ϱ', ω' und mit ψ den Winkel $P''OP'$; dann ist

$$\omega' = \omega + \psi = \omega + \operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{x} = \frac{y}{l} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{x}, \qquad \text{und} \quad \varrho'^2 = x^2 + \eta^2;$$

demnach ist die Gleichung von Γ'' nichts anderes als das Resultat der Elimination von x, y, η aus den vier Gleichungen

$$f(x, y) = 0, \quad F(x, \eta) = 0, \quad \omega' = \frac{y}{l} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{x}, \quad \varrho'^2 = x^2 + \eta^2,$$

die sich nur für besondere Funktionen f und F ausführen läßt.

2) *Novae theoriae linearum curvarum etc.* (Monachii 1835) S. 88.

$$s_{-1} = \frac{a}{\varepsilon^2}, \qquad s_{+1} = a \cdot \log \varepsilon;$$

da nun für alle drei Kurven der Kontingenzwinkel derselbe ist; so können jene Evolute und jene Evolvente dargestellt werden durch

$$s_{-1}\varepsilon^2 + a = 0, \qquad s_{+1} = a \log \varepsilon,$$

weshalb die letztere von Krause als spiralis logarithmica (seu logistica) angularis[1]) bezeichnet wird.

Schliefslich: Durchblättern wir die *Lezioni di geometria intrinseca* von E. Cesàro, so läfst sich nicht verkennen, dafs man zu vielen, sehr interessanten Kurven gelangt, indem man eine natürliche Gleichung

$$f(R, s) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

aufstellt, in welcher die Funktion f der kartesischen Gleichung einer bekannten Kurve nachgebildet ist. Die neue Kurve (4) ist, wie Mannheim[2]) bemerkt hat, der Ort des Krümmungscentrums für den jeweiligen Berührungspunkt, wenn die Kurve $f(x, y) = 0$ auf einer Geraden rollt; daher hat E. Wölffing[3]) sie die Mannheim'sche Kurve der letzteren genannt.

245. Eine weitere Anwendung der „Methode der Koordinatenverwandlung" wurde von B. Tortolini[4]) und kurz darauf von M. Cantor[5]) gemacht; sie benutzten zur Bestimmung eines Kurvenpunktes die Abscisse x und den von einem festen Punkte an gerechneten Bogen s und leiteten somit aus der Kurve

$$f(x, y) = 0 \qquad \text{oder} \qquad y = f(x)$$

in kartesischen Koordinaten die neue, der Relation

$$f(x, s) = 0 \quad . \; . \quad (5) \qquad \text{oder} \qquad s = (fx) \quad . \; . \; . \quad (5')$$

genügende Kurve ab. Es ist leicht aus (5′) die kartesische Gleichung der entsprechenden neuen Kurve zu gewinnen; differenzieren wir (5′), so erhalten wir

$$ds = f'(x) \cdot dx;$$

für ds setzen wir den Wert

$$dx^2 + dy^2 = f'^2(x) \cdot dx,$$

daher ist

$$y = \int \sqrt{f'^2(x) - 1} \cdot dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

1) *Novae theoriae linearum curvarum etc.* (Monachii 1835) S. 96.

2) Liouvilles Journ. 2. Ser. IV, 1859.

3) Zeitschrift für Math. XLIV, 1899, s. S. 140.

4) *Mémoire sur quelques applications de la méthode inverse des tangentes* (Crelles Journ. XXVI, 1843).

5) *Ueber ein weniger gebräuchliches Koordinatensystem* (Diss. Frankfurt a. M., 1851).

Die Bestimmung der kartesischen Gleichung der neuen Kurve erfordert also eine Integration. Aus (6) folgt, dafs die Gleichung der Tangente

$$\frac{Y-y}{X-x} = \sqrt{f'^2(x)-1}$$

sein wird, weshalb die neue Kurve allemal dann einem algebraischen System angehören wird, wenn $f(x)$ eine Funktion ist, deren Ableitete algebraisch ist.

Die Bestimmung des Krümmungsradius R der neuen Kurve erfordert nur Differenziationen: wird zunächst die Identität $dx^2 + dy^2 = ds^2$ nach x differenziert, so bekommt man

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ds}{dx}\cdot\frac{d^2s}{dx^2};$$

und dann mit Benutzung der Gleichungen (5′) und (6)

$$\sqrt{f'^2(x)-1}\,\frac{d^2y}{dx^2} = f'(x)\cdot f''(x);$$

da nun

$$R = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

so folgt schliefslich, dafs

$$R = \frac{f'^2(x)\sqrt{f'^2(x)-1}}{f''(x)}. \qquad (7)$$

Durch Elimination von x aus (5′) und (7) würde man die natürliche Gleichung der Kurve erhalten.

Wenden wir diese Methode auf den Kegelschnitt $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ an, so erhalten wir die Kurve $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{s^2}{b^2} = 1$, in deren kartesischer Gleichung im allgemeinen elliptische Integrale auftreten. Aber auch ohne diese zu benutzen, kann man leicht, wenn das —Zeichen genommen wird, Eigenschaften der Kurve nachweisen. Da in diesem Falle

$$\frac{s^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1,$$

so wachsen s und x gleichzeitig ins Unendliche, daher erstreckt sich die Kurve bis zum unendlich fernen Punkte von Ox; aus obiger Gleichung folgt ferner

$$s - x = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} - x,$$

daher ist

$$\lim_{x=\infty}\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} - x\right) = \lim_{x=\infty}\left(\frac{bx}{a\sqrt{x^2-a^2}} - 1\right) = \frac{b-a}{a};$$

die Differenz zwischen der Kurvenlänge und der Asymptote ist also eine endliche Gröfse. — Im Falle $b = a$ läfst sich die Kurvengleichung in endlichen Ausdrücken erhalten. Setzt man nämlich

$$\frac{dx}{ds} = \sin\alpha, \qquad \frac{dy}{ds} = \cos\alpha,$$

so erhält man, weil $x^2 - s^2 = a^2$, und $\frac{dx}{ds} = \frac{s}{x} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}$ ist,

$$x = \frac{a}{\cos\alpha}, \quad s = a \operatorname{tg}\alpha, \quad dy = a\frac{d\alpha}{\cos\alpha}, \quad y = a \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right);$$

die erste und letzte dieser Gleichungen liefern die parametrische Darstellung der transformierten Kurve; aus dieser leitet man ab, dafs

$$\cos\alpha = \frac{a}{x}, \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}, \quad e^{\frac{y}{a}} = \frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha};$$

durch Elimination von α bekommt man

$$e^{\frac{y}{a}} = \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a};$$

folglich ist

$$e^{-\frac{y}{a}} = \frac{x - \sqrt{x^2 - a^2}}{a},$$

demnach

$$x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}}\right),$$

daher ist die transformierte Kurve eine Kettenlinie. Zu derselben Kurve gelangt man, wenn man in derselben Weise die Kurve $s = a \operatorname{Sin}\frac{x}{a}$ transformiert.

Um zu sehen, in was sich die logarithmische Kurve, dargestellt durch

$$s = a \cdot \log\frac{a}{x}$$

verwandelt[1]), benutzen wir die Gleichung (7) und erhalten

$$R = a\sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 1},$$

welche, mit der vorigen Gleichung kombiniert, die natürliche Gleichung der transformierten Kurve liefert

$$R = a\sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1},$$

die also (s. Nr. **231**) eine Traktrix ist.

246. Zu allgemeineren und wichtigeren Resultaten gelangt man durch Anwendung des obigen Verwandlungsverfahrens auf die Parabeln

$$y^{m+n} = p^m x^n,$$

wo m und n als positiv und ganz angenommen werden sollen. Es führt zu Kurven, die sich der durch

$$s^{m+n} = p^m x^n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

1) Der allgemeinste Fall, in welchem $s = a \log\frac{x}{b}$, reduziert sich auf den obigen, wenn man den Anfangspunkt verlegt und die positive Richtung des Bogens ändert (vgl. die Note 1, S. 543).

ausgedrückten Eigenschaft erfreuen. Schreiben wir folgendermaſsen

$$x = p^{-\frac{m}{n}} \cdot s^{\frac{m+n}{n}},$$

so sehen wir, daſs die neuen Kurven dadurch charakterisiert sind, daſs die Abscisse proportional einer Potenz des Bogens ist. Sie wurden zuerst von C. R. Fleischer[1]), dann von B. Tortolini und M. Cantor in den vorhin erwähnten Arbeiten und neuerdings von C. Nies[2]) und R. Müller[3]) untersucht. Zunächst wollen wir ihre natürliche Gleichung aufsuchen; da hier

$$f(x) = s = p^{\frac{m}{m+n}} \cdot x^{\frac{n}{m+n}},$$

so setzen wir der Kürze wegen

$$p^{\frac{m}{m+n}} = a, \qquad \frac{n}{m+n} = \mu.$$

Indem wir Gleichung (7) benutzen, erhalten wir nun

$$R = \frac{\mu}{\mu - 1} a x^{\mu} \sqrt{\mu^2 a^2 x^{2(\mu-1)} - 1};$$

und da $s = a \cdot x^{\mu}$, so wird

$$R = \frac{\mu}{\mu - 1} s \sqrt{\mu^2 a^2 \left(\frac{s}{a}\right)^{\frac{2(\mu-1)}{\mu}} - 1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

welches die natürliche Gleichung der transformierten Kurve ist[4]). — Die Gleichung (6) liefert im vorliegenden Falle

$$y = \int dx \sqrt{\left(\frac{n}{m+n}\right)^2 p^{\frac{n}{m+n}} \cdot x^{-\frac{2m}{m+n}} - 1}, \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

daher hängt die Bestimmung der Kurvengleichung von der Integration eines binomischen Differenzials ab. Nun ist dieses integrierbar, wenn die eine oder andere der beiden Zahlen $\frac{m+n}{2m} = q$ oder $\frac{n}{2m} = r$ eine ganze Zahl ist. Wir können alsdann die Gl. (8) schreiben

$$s^{2q} = p x^{2q-1}, \quad \text{oder} \quad s^{2r+1} = p x^{2r},$$

welche beiden man in die eine zusammenfassen kann

$$s^k = p x^{k-1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

---

1) *Von den Curven, bei welchen* $s^{m+n} = p^n \cdot x^n$ *ist* (Progr. Grimma, 1849).

2) *Untersuchungen über Curven, deren Bogen einer Potenz der Abscisse proportional ist* (Progr. Darmstadt, 1887).

3) *Ueber die Kurven, deren Bogen einer Potenz der Abscisse proportional ist* (Progr. Berlin, 1889); daselbst wird eine bemerkenswerte Anwendung der speziellen Funktion $\wp$ von Weierstraſs gemacht.

4) Daraus könnte man ableiten, daſs die in Rede stehenden Kurven die Evoluten von Ribaucour'schen Kurven sind, welch schönen Satz man E. Cesàro (*Sur une note de géométrie infinitésimale,* Nouv. Ann. 3. Ser. XIII, 1894) verdankt.

wo k eine ganze, positive Zahl ist. **Die entsprechenden Kurven gehören einem System mit den Charakteristiken $\mu = 2k$, $\nu = 2$ an;** dies ergiebt sich, wenn man zur Abkürzung $p = \left(\frac{k}{k-1}\right)^k a$ setzt, indem dann

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left\{a^{\frac{2}{k}} - x^{\frac{2}{k}}\right\}^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{k}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10')$$

Bemerken wir auch, dafs man infolge dieser Beziehung hat

$$R = k a^{\frac{1}{k}} x^{\frac{k-2}{k}} \sqrt{a^{\frac{2}{k}} - x^{\frac{2}{k}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9')$$

Beispiele: Für den kleinsten Wert von k, nämlich $k = 2$, erhält man

$$s^2 = px, \quad p = 4a, \quad R = 2a^{\frac{1}{2}} \sqrt{a - x};$$

eliminiert man p und x, so wird

$$R^2 + s^2 = 4a^2,$$

welches eine Cykloide darstellt (s. Nr. **200**).

Für den folgenden Wert, $k = 3$, hat man

$$s^3 = px^2, \quad p = \frac{27}{8} a, \quad R = 3a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}} \sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}},$$

und nach Elimination von p und x

$$R^2 + 4\left(s - \frac{3a}{4}\right)^2 = \left(\frac{3a}{2}\right)^2,$$

welche Gleichung einer regulären Astroide zukommt (s. Nr. **103**).

Welchen Wert auch die ganze Zahl k haben möge, man gelangt immer zu einer bequemen analytischen Darstellung der Kurve, wenn man setzt

$$x = a \sin^k \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Die Gleichung (10′) giebt nämlich dann

$$dy = ka \sin^{k-2} \cos^2 \varphi \cdot d\varphi,$$

daher

$$y = ka \left(\int \sin^{k-2} \varphi \cdot d\varphi - \int \sin^k \varphi \cdot d\varphi\right);$$

die beiden angedeuteten Integrationen lassen sich durch ein bekanntes Verfahren[1]) ausführen und liefern

1) S. z. B. die von Serret in seinem *Cours de calcul intégral* (2. Aufl. Paris 1880) S. 78 angegebenen Formeln.

$$y = \begin{cases} a\cos\varphi\left\{\sin^{k-1}\varphi - \sum_{r=1}^{r=\frac{k-2}{k}} \frac{(k-3)(k-5)\dots(k-2r+1)}{(k-2)(k-4)\dots(k-2r)}\sin^{k-2r-4}\varphi\right\} \\ \quad + \frac{(k-3)(k-5)\dots 3\cdot 1}{(k-2)(k-4)\dots 4\cdot 2}\varphi, \quad \text{wenn } k \text{ gerade ist,} \\ a\cos\varphi\left\{\sin^{k-1}\varphi - \sum_{r=1}^{r=\frac{k-1}{1}} \frac{(k-3)(k-5)\dots(k-2r+1)}{(k-2)(k-4)\dots(k-2r)}\sin^{k-2r-1}\varphi\right\}, \\ \quad \text{wenn } k \text{ ungerade.} \end{cases} \tag{13}$$

Die Gleichungen (12) und (13) liefern die gewünschte Darstellung der Kurve, die für ein gerades k transscendent, für ein ungerades algebraisch ist.

Ähnlich der Gleichung (8), von der wir ausgingen, ist folgende die durch Umkehrung des Vorzeichens von m entsteht:

$$s^{n-m} = p^{-m}x^n. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{14}$$

Aus ihr folgt
$$y = \int dx \sqrt{\left(\frac{n}{m-n}\right)^2 p^{\frac{2m}{m+n}} x^{\frac{2m}{n-m}} - 1};$$

die Integration wird ausführbar, wenn die Zahlen m und n derart sind, dafs eine der beiden Gröfsen $q = \frac{n-m}{2m}$, oder $r = \frac{n}{2m}$ eine ganze Zahl wird; infolgedessen hat man

$$n = (2q+1)m, \qquad \text{oder} \qquad n = 2mr,$$

und die Gleichung (14) nimmt folgende Gestalten an

$$s^{2q} = p^{-1}x^{2q+1}, \qquad \text{oder} \qquad s^{2r-1} = p^{-1}x^{2r},$$

die man in die eine zusammenfassen kann

$$s^k = p^{-1}\cdot x^{k+1}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{15}$$

Aus der Bemerkung, dafs diese aus (11) hervorgeht, wenn man das Vorzeichen von k wechselt, ergiebt sich, dafs für die neuen Kurven offenbar die Formeln bestehen, die aus (9'), (10') durch denselben Zeichenwechsel hervorgehen. Es besteht demnach auch eine analoge analytische Darstellung, wie sie aus (12) und (13) hervorgeht, was der Leser leicht verifizieren kann. Auch gehört jede Kurve dieser neuen Art im allgemeinen einem System mit den Charakteristiken $\mu = 2k$, $\mu = 2$ an. — Vom Werte $k = 0$ abgesehen (welcher eine Gerade liefert) ist der kleinste Wert, den man nehmen kann, $k = 1$. Dann wird (15)

$$x^2 = ps, \qquad \text{und (7) liefert} \quad R = \frac{2x^2\sqrt{4x^2 - p^2}}{p^2};$$

durch Elimination von x erhält man

$$R = 2s\sqrt{\left(\frac{s}{\frac{p}{2}}\right)^2 - 1}$$

als natürliche Gleichung der fraglichen Kurve; rufen wir uns die Gleichung (12) aus Nr. **234** ins Gedächtnis zurück, so gelangen wir zu dem Schlusse, dafs diese Kurve hier eine Evolute der Kettenlinie ist[1]). — Bei dem folgenden Werte $k = 2$ erhält man $x^3 = ps^2$; die Gleichung (6) liefert dann

$$y = \int dx \sqrt{\frac{9x}{4p} - 1},$$

und nach vollzogener Integration

$$\left(\frac{27}{8} \frac{y+c}{p}\right)^2 = \left(\frac{9x}{4p} - 1\right)^3,$$

welche Gleichung eine semikubische Parabel darstellt.

Fassen wir zusammen, so sehen wir, dafs unter den Kurven, bei denen die Abscisse proportional einer Potenz des Bogens ist, sich (abgesehen von der Geraden) vier uns schon bekannte Linien finden; zwei davon sind algebraisch, die semikubische Parabel und die reguläre Astroide, zwei sind transscendent, die Cykloide und die Evolute der Kettenlinie. Als Grenzfall ($a = \infty$) findet sich dann noch eine fünfte, die erwähnt werden möge; um zu finden, welche Kurve alsdann der Gleichung $s = ax^\mu$ entspreche, machen wir $a = \frac{\alpha}{\mu}$, wo α eine neue Konstante ist; wir werden dann schreiben können

$$s = \alpha \frac{x^\mu}{\mu} = \alpha \frac{e^{\mu \log x}}{\mu} = \alpha \log x - \frac{\alpha \mu}{2} (\log x)^2 + \cdots\cdots;$$

wenn nun μ sich der Grenze 0 nähert, so wird

$$s = a \log x,$$

wodurch (vgl. Nr. **230**, Gl. (7)) eine Traktrix dargestellt wird.

247. Die Kurven, mit denen wir uns augenblicklich befassen, erfreuen sich besonderer Eigenschaften, die ihr Vorkommen bei Aufgaben aus der Mechanik und Geometrie bewirken, wie wir jetzt darlegen wollen:

Aufgabe I. Eine Linie von der Beschaffenheit zu finden, dafs die Ordinate des Schwerpunkts eines ihrer Bogen proportional einer beliebigen positiven Potenz dieses Bogens sei.

Auflösung. Sind x_g, y_g die Koordinaten des Bogenschwerpunktes, so hat man bekanntlich

$$sx_g = \int x \cdot ds, \qquad sy_g = \int y \cdot ds; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

daher wegen der Bedingungen des Problems

$$\frac{\int y \cdot ds}{s} = ks^\mu,$$

1) Diese Evolute gehört zur Klasse derjenigen Kurven, von denen jede durch Bewegung eine Fläche erzeugen kann, die als Krümmungslinien die ∞^1 Lagen der Erzeugenden hat; vgl. die Arbeit von Hazzidakis, *Flächenerzeugung durch Krümmungslinien* (Crelles Journ. XCVIII, 1885).

oder
$$\int y \cdot ds = k s^{\mu+1},$$
und wenn wir differenzieren,
$$y = (\mu + 1) k s^{\mu},$$
welche Gleichung nicht wesentlich von denjenigen verschieden ist, durch welche die vorhergehenden Kurven charakterisiert waren.

Aufgabe II. Eine Kurve zu finden, bei welcher die Ordinate des Bogenschwerpunkts proportional der Ordinate des Bogenendpunktes ist.

Auflösung. Schreiben wir die zweite Gl. (16) folgenderweise
$$s y_g = \int_0^s y \cdot ds,$$
so haben wir, weil $y_g = ky$,
$$k s y = \int_0^s y \cdot ds,$$
und durch Differenzieren
$$k(s \cdot dy + y \cdot ds) = y \cdot ds,$$
oder
$$\frac{1-k}{k} \frac{ds}{s} = \frac{dy}{y};$$
und nach Integration
$$y = a s^{\frac{1-k}{k}};$$
dies zeigt, daſs die gesuchte Kurve sich nicht von derjenigen unterscheidet, bei welcher der Bogen proportional der Potenz einer der beiden kartesischen Koordinaten des Endpunktes ist. — Hâton de la Goupillière[1]), der diese beiden Aufgaben gelöst hat, schlug vor, die so erhaltenen Kurven barocentrische Kurven zu nennen.

Aufgabe III. Eine Kurve zu finden, bei welcher jeder Bogen an Länge gleich dem n^{ten} Teile der Differenz zwischen den Längen der Tangenten in den beiden Endpunkten ist[2]).

Auflösung. Die der Aufgabe entsprechende Gleichung ist offenbar folgende
$$n \int_{x_0}^{x} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \left| \frac{y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\frac{dy}{dx}} \right|_{x_0}^{x};$$
setzen wir zur Abkürzung $\frac{dy}{dx} = p$ und differenzieren, so erhalten wir
$$n\sqrt{1+p^2} = \sqrt{1+p^2} - \frac{y \frac{dp}{dx}}{p^2 \sqrt{1+p^2}},$$

---

1) *Recherches sur les centres de gravité* (Journ. de l'Éc. polyt. Heft XLIII, 1870).

2) O. Werth, *Über eine Klasse von Curven, welche die Eigenschaft haben, daſs ein Vielfaches der Bogenlänge gleich ist der Differenz der Tangenten* (Progr. Celle, 1874).

oder
$$(1-n)p^2(1+p^2) = y\frac{dp}{dx},$$
da aber
$$\frac{dp}{dx} = \frac{p \cdot dp}{dy},$$
so ist
$$(1-n)\frac{dy}{y} = \frac{dp}{p} - \frac{p \cdot dp}{1+p^2}.$$
Durch Integrieren ergiebt sich
$$y^{1-n} = \frac{ap}{\sqrt{1-p^2}},$$
wo a die Integrationskonstante. Es ist aber
$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{dy}{ds},$$
daher
$$ds = ay^{n-1} \cdot dy,$$
und
$$s = \frac{a}{n}y^n.$$
Die gesuchten Kurven sind also dieselben, von denen in voriger Nr. die Rede war.

248. Eine andere Modifikation der Idee Varignons ist neueren Ursprungs und möge gleichfalls hier erwähnt werden. Zahlreiche Geometer des 17. und 18. Jahrhunderts gebrauchten den Koordinatenbegriff häufig nicht in dem engeren Sinne, wie er sich bei Descartes findet, sondern in einem viel weiteren, wie man aus den Werken Leibniz' ersieht. Dies zeigt uns unter anderen auch eine Arbeit von G. Manfredi[1]), wo als Koordinaten eines Punktes der Ebene der senkrechte Abstand u von einer festen Kurve **K** und der von einem festen Punkte O dieser Kurve bis zum Fufspunkte jener Senkrechten gerechnete Bogen s genommen werden. Um diesem Systeme die wünschenswerte Präzision zu geben, hat man noch auf der Kurve **K** eine positive Richtung anzunehmen; ist diese bestimmt, so ist damit auch der positive Sinn auf jeder Tangente festgelegt und damit auch zugleich auf jeder Normalen, wenn man die Bestimmung trifft, dafs der positive Teil der Normale in derselben Weise zum positiven Teile der Tangente liegen soll, wie die positive Richtung der y-Axe zur positiven x-Axe; alsdann haben nur alle die auf diesem Teile der Normalen gelegene Punkte die positive Koordinate u [2]). Wir betrachten nun einen Punkt P einer beliebigen Kurve Γ und bezeichnen seine Koordinaten in Bezug auf die Kurve **K** mit s, u, und nehmen dann ein rechtwinkliges kartesisches System und betrachten in diesem den Punkt P_1 mit den Koordinaten
$$x = s, \qquad y = u;$$

---

1) *De constructione aequationum differentialium primi gradus* (Bononiae 1707).

2) Anwendungen dieses Systemes finden sich in dem Aufsatze von E. Mathieu, *Sur les coordonnées curvilignes* (Liouville's Journ. 3e Ser. VIII, 1882).

der Ort der Punkte P_1 ist dann eine Kurve Γ_1, die man die Bildkurve von Γ in Bezug auf **K** nennt[1]). Somit läfst sich jede Kurve Γ in eine andere Γ_1 verwandeln. So ist z. B. die Bildkurve einer Geraden in Bezug auf einen Kreis mit dem Radius r, von dessen Mittelpunkt sie den Abstand a hat, die (trigonometrische) Kurve

$$y = \frac{r \cdot \cos rx - a}{\cos rx}.$$

Die neue Kurve Γ_1 kann nur dann algebraisch sein, wenn die Grundkurve **K** algebraisch rektifizierbar ist; G. de Longchamps[1]) hat ein Verfahren angegeben, um die Tangente an Γ_1 zu konstruieren, wenn die Konstruktion der Tangente von Γ bekannt ist.

Zum Schlusse sei bemerkt[2]), dafs man die Koordinatenverwandlung auch in der Weise vornehmen kann, dafs man umgekehrt von einer Kurvengleichung in beliebigen Koordinaten zu kartesischen übergeht. Als Beispiel diene folgendes: Die Polargleichung eines Kreises lautet, wenn der Pol die Entfernung a vom Mittelpunkte hat,

$$\varrho^2 - 2a\varrho \cos\omega = r^2 - a^2.$$

Trägt man nun im kartesischen System die Winkel als Abscissen, die Vectoren als Ordinaten ab, so erhält man die Kurve

$$y^2 - 2ay \cos x = r^2 - a^2.$$

Sie besteht aus einem fortlaufenden Wellenzuge (ähnlich wie die Sinuslinie), wenn $a \leqq r$, dagegen aus unendlich vielen getrennten, geschlossenen Ovalen oberhalb der x-Axe, und symmetrisch zu beiden Seiten der y-Axe verteilt, so dafs das erste von dieser selbst halbiert wird, wenn $a > r$ (Taf. XVI, Fig. 132).

Zweites Kapitel.

Die Verfolgungskurven.

249. „Ein Punkt $A(x', y')$ beschreibe die durch die Gleichung

$$f(x', y') = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

dargestellte Kurve mit gleichförmiger Geschwindigkeit: es soll der Ort eines Punktes $B(x, y)$ gefunden werden, der, mit konstanter Geschwindigkeit sich bewegend, immer auf den Punkt A zueilt.“ Die gesuchte

1) M. Petrovich, *Sur un système de coordonnées semi-curvilignes* (Prager Ber., 1898).

2) *Les courbes images et les courbes symétriques* (Nouv. Ann., 3e Sér. XVIII, 1899).

3) Bemerkung des Übersetzers.

Kurve heifst gewöhnlich Verfolgungskurve[1]) oder, von dem Beispiele des auf seinen Herrn zueilenden Hundes, auch die Hundekurve, bei französischen Geometern courbe du chien. Da man diese Kurve auch erhalten würde, wenn B sich so bewegt, dafs er immer in der Richtung von A nach B entflieht, so ist auch mit gleicher Berechtigung der Name Fluchtkurve oder Fliehkurve in Gebrauch[2]).

Das oben ausgesprochene Problem wurde auf Lionardo da Vinci zurückgeführt, indem S. Günther[3]) eine Stelle in dem Werke des grofsen italienischen Malers in dieser Weise auslegte; unabhängig von ihm begegnete diesen Kurven Bouguer[4]), von welchem die erste Lösung herrührt[5]); aber von denen, die der Ansicht von O. Terquem[6]) sich anschliefsen, wird dieses Verdienst dem Dubois-Aymé, welcher im Anfange des 19. Jahrhunderts Zolldirektor in Foligno (Prov. Perugia) war, zugewiesen[7]). Jedenfalls steht fest, dafs das Problem erst in dem Jahrzehnt von 1800—1810 untersucht und in seinen Hauptzügen gelöst worden ist. — Wie es gelöst werden kann, ersieht man, wenn man beachtet, dafs in jedem Punkte der Bahnlinie von B die zugehörige Tangente durch den Punkt A in der zugehörigen Lage hindurchgehen mufs; infolgedessen haben wir zunächst die Relation

$$(y'-y)=(x'-x)\frac{dy}{dx}\cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ist anderseits n das Verhältnis der Geschwindigkeiten der beiden betrachteten gleichförmigen Bewegungen, so hat man

$$\sqrt{dx'^2+dy'^2}=n\sqrt{dx^2+dy^2},$$

oder

$$\sqrt{\left(\frac{dx'}{dx}\right)^2+\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2}=n\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Aus (1) und (2) sowie ihren Ableitungen ergeben sich $x', y', \frac{dx'}{dx}, \frac{dy'}{dx}$ als Funktionen von $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$; werden diese Werte in (3) eingesetzt, so erhält man eine Gleichung von der Form

---

1) Im 18. Jahrh. war der Name courbe de poursuite synonym mit Tractorie; s. M. Cantor, *Vorlesungen üb. Gesch. d. Math.* III, 2. Aufl. (Leipzig 1891) S. 786.

2) Da die Operation, durch welche man von einer Kurve zu ihrer Verfolgungskurve kommt, als ein Ableitungsgesetz betrachtet werden kann, so haben wir die fraglichen Kurven an dieser Stelle behandelt.

3) *Studien zur Geschichte der math. und phys. Geographie* (Halle 1878); vgl. eine Note von Brocard in Nouv. Corresp. Math. VI, 1880, S. 211—13.

4) *Sur de nouvelles courbes, auxquelles on peut donner le nom de lignes de poursuite* (Mém. de Paris 1732).

5) M. s. auch Maupertuis, *Solution d'un problème de géométrie* (Das.).

6) Nouv. Ann. de Math. VIII, 1849, S. 91—93.

7) Vgl. eine Bemerkung in *Corresp. sur l'Ecole polyt.* (II, S. 275) und die daraus entstandenen Arbeiten von St. Laurent, C. Sturm, Querret und Tédénat in Gergonnes Ann., XIII, 1822—28.

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

und damit ist die Untersuchung der Verfolgungskurve der Kurve (1) auf die Integration dieser Gleichung zurückgeführt.

Die Integration ist vollständig ausführbar, wenn die Bahn des Punktes A eine Gerade ist. Nehmen wir diese als y-Axe, so werden die Gleichungen (1) und (2)

$$x' = 0, \qquad y' = y - x \cdot \frac{dy}{dx},$$

und liefern
$$\frac{dx'}{dx} = 0, \qquad \frac{dy'}{dx} = -x\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Die Gleichung (3) wird alsdann

$$-x\frac{d^2y}{dx^2} = n\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Um diese Gleichung zu integrieren, giebt es keinen besseren Weg, als zu dem klassischen Verfahren seine Zuflucht zu nehmen, indem man $\frac{dy}{dx} = p$ setzt. Dann hat man

$$-x\frac{dp}{dx} = n\sqrt{1 + p^2} \quad \text{oder} \quad n\frac{dx}{x} = -\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Durch Integrieren bekommt man, wenn c die Integrationskonstante ist,

$$cx^n = \frac{1}{p + \sqrt{1+p^2}}.$$

Daraus folgt:

$$p + \sqrt{1 + p^2} = c^{-1} \cdot x^{-n}, \qquad p - \sqrt{1 + p^2} = -cx^n,$$

und
$$2p = c^{-1} \cdot x^{-n} - cx^n.$$

Setzt man nun für p seinen Wert ein, so erhält man

$$2dy = c^{-1} \cdot x^{-n} \cdot dx - cx^n \cdot dx,$$

und, wenn integriert wird,

$$2(y - y_0) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{x^{-n+1}}{2(-n+1)} - \frac{c}{n+1}x^{n+1}, & \text{wenn } n \neq 1 \\ \frac{1}{c}\log x - \frac{cx^2}{2}, & \text{wenn } n = 1 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (5)$$

Dies sind die Gleichungen der Verfolgungskurve der Geraden, jenachdem die Punkte A und B sich mit ungleicher oder gleicher Geschwindigkeit bewegen; im letzteren Falle ist die Kurve transscendent, im ersteren algebraisch oder interscendent, jenachdem n rational oder nicht; ist insbesondere n eine ganze Zahl, so haben wir (vgl. Nr. **118**) eine parabolische Kurve vor uns[1]).

1) Die Behauptung in Salmon-Fiedler, *Analyt. Geom. der höh. ebenen Curven*, II. Aufl. (Leipzig 1882) S. 379, „Die Kurve ist daher algebraisch, den Fall $n = 1$ ausgenommen“ ist also nicht ganz genau.

Wenn die Bahn des Punktes A ein Kreis wäre, so würde die des Punktes B eine Integralkurve der Gleichung

$$\frac{\omega}{b}\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = 1 - \frac{x+y\frac{dy}{dx}}{\sqrt{a^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]-\left[y-x\frac{dy}{dx}\right]^2}} \quad . \quad . \quad (6)$$

sein, wo ω die Winkelgeschwindigkeit von A, b die Geschwindigkeit von B, und a der Radius des gegebenen Kreises ist[1]); diese Differenzialgleichung ist jedoch noch nicht integriert worden.

250. Mit den verschiedenen Verallgemeinerungen, welche der Begriff der Verfolgungskurven, insbesondere durch C. Sturm[2]) und E. Cesàro[3]) erfahren hat, wollen wir uns nicht aufhalten; dagegen erscheint es uns angebracht, hier ein geometrisches Problem mitzuteilen, welches von der Verfolgungskurve der Geraden gelöst wird, zumal es uns mit einer neuen analytischen Darstellung, sowie mit verschiedenen Eigenschaften dieser Kurve bekannt macht. Das Problem, um das es sich handelt, ist folgendes: „Eine Kurve Γ zu finden, von der Art, daſs zwei beliebige Tangenten derselben auf einer gegebenen Geraden eine Strecke ausschneiden, die in einem bestimmten Verhältnisse zu dem von den Berührungspunkten begrenzten Bogen stehen“[4]).

Es seien (Taf. XVI, Fig. 133) t und t' zwei beliebige Tangenten von Γ, P und P' die Berührungspunkte, I und I' die Schnitte mit der gegebenen Geraden r. Nach der Annahme ist dann, wenn das bestimmte Verhältnis mit n bezeichnet wird, $\operatorname{arc} PP' : II' = n$; wenn nun der Punkt I gleichförmig die Gerade r durchläuft, so muſs dieses ebenso der Punkt P auf Γ thun, während immer die Tangente auf den Punkt I gerichtet ist; damit ist hinlänglich bewiesen, daſs Γ die Verfolgungskurve der Geraden r ist.

Die so erhaltene neue Definition unserer Kurve führt auch leicht zu ihrer analytischen Darstellung. Wir bezeichnen mit P_0 einen festen Punkt von Γ und mit t_0 die zugehörige Tangente und mit I_0 den Schnitt von t_0 mit r; wir setzen ferner $P_0P = s$, $I_0I = e$ und be-

---

1) S. eine von Brocard 1877 in der *Nouv. Corresp. Math.* und von neuem 1883 in *Mathésis* vorgelegte Frage, die 1886 von Keelhoff (*Mathésis* VI) gelöst wurde.

2) *Extension du problème des courbes des poursuite* (Ann. de Math. XIII, 1822—23).

3) *Propriétés d'une courbe de poursuite* (Nouv. Ann. de Math., 3e Ser. II, 1883); *Sur les lignes de poursuite* (Das. V, 1886); *Les lignes barycentriques* (Ebendas.).

4) Für das Folgende s. F. Gauſs, *Ueber Curven, welche die Eigenschaft haben, daſs je zwei Tangenten aus einer gegebenen Geraden eine Strecke ausschneiden, welche zu dem von den Berührungspunkten begrenzten Bogen in einem gegebenen Verhältnisse stehen* (Progr. Bunzlau, 1890).

zeichnen mit n den konstanten Wert des Verhältnisses $\frac{\operatorname{arc} PP'}{II'}$; alsdann ist $s = ne$. Betrachten wir in ähnlicher Weise einen anderen Punkt P' von Γ, so haben wir $s' = ne'$, daher $s - s' = n(e - e')$. Dies zeigt, dafs man ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, annehmen darf, dafs bei dem oben ausgesprochenen Problem eine der beiden Tangenten fest sei, und es bleibt infolgedessen die entsprechende Eigenschaft der Kurve im allgemeinen bestehen. Jene feste Tangente soll als Anfangstangente und ihr Berührungspunkt als Bogenanfangspunkt bezeichnet werden. Die Gerade r nehmen wir als y-Axe und bezeichnen mit τ den Winkel, den die positiven Richtungen der Tangenten mit der x-Axe bilden. Dann haben wir

$$\frac{dx}{\cos\tau} = \frac{dy}{\sin\tau} = ds, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

und

$$\frac{Y - y}{X - x} = \operatorname{tg}\tau$$

ist die Gleichung der Tangente im Punkte (x, y). Setzen wir darin $X = 0$, so hat man

$$OI = y - x \operatorname{tg}\tau,$$

und wenn wir $OI_0 = d$ setzen,

$$II_0 = y - x \operatorname{tg}\tau - d.$$

Es ist aber $PP_0 = n \cdot II_0$, und daher $y - x \operatorname{tg}\tau - d = \frac{1}{n} s$.

Differenzieren wir und benutzen dann die Gl. (7), so erhalten wir

$$-x \frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{1}{n} \frac{dx}{\cos\tau},$$

oder auch

$$\frac{dx}{x} = -n \frac{d\tau}{\cos\tau}.$$

Durch Integration erhält man

$$\log x = -n \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right) + C.$$

Setzt man hierin

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\tau}{2} = \varphi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

und nimmt an, dafs für $x = 0$, $\varphi = \beta$ werde, so ergiebt sich

$$x = c \left(\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\beta}\right)^n,$$

was man auch schreiben kann als

$$x = a \operatorname{tg}^n \varphi, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

wenn man $c = a \operatorname{ctg}^n \beta$ setzt. Nun liefert die Gl. (7) infolge von (8)

$$dy = dx \cdot \operatorname{tg}\tau = dx \cdot \operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\varphi}{2 \operatorname{tg}\varphi} \cdot dx;$$

aus (9) aber folgt

$$dx = na \operatorname{tg}^{n-2}\varphi \cdot d \operatorname{tg}\varphi,$$

folglich

$$dy = \frac{na}{2} \left\{ \operatorname{tg}^{n-1}\varphi - \operatorname{tg}^n\varphi \right\} \cdot d \operatorname{tg}\varphi.$$

Integriert man nun unter der Voraussetzung, dafs $n \neq 1$, so ergiebt sich

$$2y = a\left\{\frac{n}{n-1}\operatorname{tg}^{n+1}\varphi - \frac{n}{n+1}\operatorname{tg}^{n+1}\varphi\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

wobei angenommen wird, dafs dem $y = 0$, $\varphi = 0$ entspreche. Für $n = 1$ hingegen liefert die vorige Gleichung ähnlich

$$2y = a\left\{\log\operatorname{tg}\varphi - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\varphi\right\}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Die Gleichung (10) bezw. (11) im Verein mit (9) liefern die analytische Darstellung der Kurve jenachdem $n \neq 1$ oder $n = 1$. Durch Elimination von φ erhält man nun folgende beiden Gleichungen

$$. \quad . \quad . \quad . \quad 2y = \left\{\begin{array}{l} a\left[\frac{n}{n-1}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n-1}{n}} - \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right] \\ a\left[\log\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right] \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

deren wesentliche Identität mit den Gleichungen (5) der Leser sogleich bemerken wird.

Bezeichnen wir jetzt mit S_y und S_y' die Subtangente und Subnormale in Bezug auf die y-Axe, mit T_y und N_y die Längen der entsprechenden Tangente und Normale, so erhalten wir, da zufolge von (8) $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\tau = \operatorname{ctg}2\varphi$, folgende sehr einfachen Ausdrücke:

$$\left.\begin{array}{ll} S_y = -x\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\operatorname{tg}2\varphi}, & S_y' = x\frac{dx}{dy} = x\operatorname{tg}2\varphi \\ T_y = x\frac{ds}{dx} = \frac{x}{\sin 2\varphi}, & N_y = x\frac{ds}{dy} = \frac{x}{\cos 2\varphi} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Man hat ferner

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 2\varphi}, \qquad \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{ds}{dx},$$

und daher

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sin^2 2\varphi}\,\frac{ds}{dx}.$$

Aufserdem ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\operatorname{ctg}2\varphi}{dx} = -\frac{2}{\sin^2 2\varphi}\,\frac{d\varphi}{dx};$$

wenn man also mit R den Krümmungsradius bezeichnet, so ist

$$R = \frac{1}{2}\,\frac{ds}{d\varphi}.$$

Jedoch aus

$$dx = na\operatorname{tg}^{n-1}\varphi \cdot d\operatorname{tg}\varphi, \qquad dy = \frac{na}{2}(\operatorname{tg}^{n-2}\varphi - \operatorname{tg}^n\varphi)\,d\operatorname{tg}\varphi$$

ergiebt sich, dafs $\frac{ds}{d\operatorname{tg}\varphi} = \frac{na}{2}(\operatorname{tg}^{n-2}\varphi + \operatorname{tg}^n\varphi)$. . . . . . . (14)

Somit ist $R = \frac{na\operatorname{tg}^n\varphi}{\sin^2 2\varphi}$ . . . . (15)

oder auch $R = \frac{na}{4}\operatorname{tg}^{n-2}\varphi(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)^2$. . . . . . . (15′)

Durch Integration von (15) erhält man

$$s = \begin{cases} \frac{a}{2}\left(\frac{n}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1}\varphi + \frac{n}{n+1}\operatorname{tg}^{n+1}\varphi\right) + Const., & \text{wenn } n \neq 1, \\ \frac{a}{4}(\log \operatorname{tg}^2\varphi + \operatorname{tg}^2\varphi), & \text{wenn } n = 1; \end{cases}$$

diese Gleichungen liefern die Rektifikation der Kurve. Durch Elimination von $\operatorname{tg}\varphi$ aus diesen und aus (15′) würde man die natürliche Gleichung der Kurve erhalten.

Man hat ferner

$$\int x \cdot dy = \frac{na^2}{2}\int(\operatorname{tg}^{2n-2}\varphi - \operatorname{tg}^{2n}\varphi)\,d\operatorname{tg}\varphi$$
$$= \frac{na^2}{2}\left(\frac{\operatorname{tg}^{2n-1}\varphi}{2n-1} - \frac{\operatorname{tg}^{2n+1}\varphi}{2n+1}\right) + Const.;$$

diese Quadraturformeln setzen natürlich voraus, dafs $n \neq \pm\frac{1}{2}$; die für diesen Fall nötigen Modifikationen ergeben sich sehr leicht, weshalb wir sie dem Leser überlassen. Dasselbe gilt für das durch Rotation um die y-Axe erzeugte Volumen.

Zum Schlusse wollen wir noch eine einfache Eigenschaft der durch die erste der Gleichungen (12) dargestellten Kurve für den Fall $n = 2$ mitteilen. Diese Gleichung wird alsdann

$$y = a\left(1 - \frac{x}{3a}\right)\sqrt{\frac{x}{a}}.$$ [1])

Sie stellt eine in Bezug auf Ox symmetrische Kurve dritter Ordnung dar, die durch den Anfangspunkt geht, den Punkt $x = 3a$, $y = 0$ zum Doppelpunkte hat, in welchem die Tangenten mit der x-Axe die Winkel $\frac{\pi}{6}$ bilden. Die Punkte $x = a$, $y = \pm\frac{2a}{3}$ sind Kulminationspunkte und der unendlich ferne von y ist ein Wendepunkt mit der unendlich fernen Geraden als zugehöriger Tangente. Nehmen wir eine Koordinatenverschiebung vor $\xi = \frac{p}{2} - x$, $\eta = y$, wobei $p = \frac{2a}{3}$, so ergeben die Gleichungen (9) und (10)

$$\xi = \frac{p}{2}\frac{\cos 3\varphi}{\cos^3\varphi}, \qquad \eta = \frac{p}{2}\frac{\sin 3\varphi}{\cos^3\varphi},$$

daher ist

$$\frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg} 3\varphi, \quad \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{a}{2}\frac{1}{\cos^3\varphi}.$$

Führen wir nun Polarkoordinaten ein, so haben wir

$$\frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg}\omega, \qquad \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \varrho,$$

daher ist

$$\omega = 3\varphi, \qquad \varrho = \frac{p}{2}\frac{1}{\cos^3\varphi};$$

---

1) Siehe Schlömilch, *Uebungsbuch zum Studium d. höh. Anal.* II. (2. Aufl., Leipzig 1874) S. 338, Übungsbeispiel 18.

und nach Elimination von φ

$$\varrho = \frac{p}{2} \frac{1}{\cos^3 \frac{\omega}{3}},$$

oder auch

$$\varrho^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{p}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{-1}{3}\right) \omega.$$

Die fragliche Kurve ist demnach eine Sinusspirale mit dem Index $-\frac{1}{3}$ (s. Nr. **169**); erinnern wir uns des zu Ende von Nr. **172** gelieferten Beweises, so sehen wir, dafs sie eine Trisektrix ist; wir werden ihr binnen kurzem (in Nr. **263**) wiederum von einem ganz anderen Gesichtspunkte aus begegnen.

Drittes Kapitel.

Evoluten und Evolventen.

251. Die sämtlichen Normalen einer Kurve Γ bilden zugleich die Tangenten einer anderen Kurve Γ_1, welche der Ort der Krümmungscentren der Kurve Γ ist; es ist dies die Kurve, die Huygens zuerst im III. Teile seines berühmten Werkes *Horologium oscillatorium* betrachtet hat, dessen erste Bearbeitung am 5. Febr. 1665 vollendet wurde; die betreffende Kurve heifst die Evolute oder auch Mittelpunktskurve[1]) von Γ, während umgekehrt Γ die Evolvente (oder Involute) von Γ_1 heifst. Jede Kurve hat eine bestimmte Evolute, aber unzählig viele Evolventen. Denkt man sich um die Kurve Γ_1 einen Faden geschlungen und wickelt diesen ab, so beschreibt jeder mit dem abgewickelten Faden starr verbundene Punkt eine der unzählig vielen Evolventen von Γ_1; aus dieser Erzeugungsweise resultieren die obigen Bezeichnungen. — Die Schnittpunkte einer Kurve mit ihrer Evolute sind Spitzen der ersteren.

Wenn die gegebene Kurve algebraisch und n^{ter} Ordnung, und ihre (rationale) Gleichung

$$f(x, y) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ist, so erhält man die der Evolute Γ_1, indem man die Enveloppe der Geraden

$$\frac{X - x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

bestimmt. Zu diesem Zwecke hat man die Ableitungen nach x und y von folgender Gröfse

---

1) Haas-Kleyer's *Lehrbuch der Differentialrechnung*, III. Teil (Stuttgart 1894) S. 192.

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial y}-(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda f$$

gleich Null zu setzen. Somit entstehen die Gleichungen

$$(X-x)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-(Y-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=0,$$

$$(X-x)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-(Y-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

Eliminiert man hieraus λ, so bestimmt man

$$(X-x)\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial f}{\partial x}\right]-(Y-y)\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right]$$
$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Die Gleichung der Evolute entsteht nun durch Elimination von x, y aus (1) (2) (3). Nun kann man die Gleichung (2) durch folgende beiden ersetzen:

$$X=x+\varrho\frac{\partial f}{\partial x},\qquad Y=y+\varrho\frac{\partial f}{\partial y} \quad \ldots \quad (4)$$

alsdann liefert uns die Gleichung (3)

$$\varrho=\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}{\Delta},\qquad \text{wo } \Delta=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & 0\end{vmatrix} \quad \ldots \quad (5)$$

Die Gleichungen (4) liefern die analytische Darstellung der Evolute, vorausgesetzt dafs (1) erfüllt wird, und dafs ϱ den durch (5) definierten Wert hat.

Um nun die Ordnung n_1 der Evolute aufzusuchen, kombinieren wir die Gleichungen (4) (5) mit der einer beliebigen Geraden, nämlich

$$AX+BY+C=0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

und erhalten

$$(Ax+By+C)\Delta+\left(A\frac{\partial f}{\partial x}+B\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]=0. \quad . \quad (7)$$

Hieraus ersieht man, dafs die gesuchte Ordnung n_1 gleich der Zahl der variabelen Schnitte der Kurven (1) und (7) ist. Da nun die Kurven (1) und (7) von den Ordnungen n bezw. $3(n-1)$ sind, so hat man im allgemeinen $n_1=3n(n-1)$. Wenn aber der Anfangspunkt O 1) ein Doppelpunkt ist, so hat auch die Kurve (7) daselbst einen Doppelpunkt mit denselben Tangenten wie die ursprüngliche Kurve, daher fallen 6 Schnittpunkte der beiden Kurven in O; ist er aber 2) eine Spitze, so hat die Kurve (7) in O einen dreifachen Punkt mit zwei in die Spitzentangente fallenden Tangenten; somit fallen 8 Schnitte der beiden Kurven in O. Hat daher die Kurve Γ d Doppel-

punkte und k Spitzen, so erleidet die Ordnung ihrer Evolute Γ_1 eine Verminderung um $6d + 8k$ Einheiten; also ist

$$n_1 = 3n(n-1) - 6d - 8k.$$

Ist nun w die Zahl der Wendepunkte von (1), so hat man bekanntlich

$$w = 3n(n-2) - 6d - 8k,$$

daher ist $\quad n_1 - w = 3n, \quad$ oder $\quad \boldsymbol{n_1 = 3n + w}.$

Folglich: **Die Ordnung der Evolute einer algebraischen Kurve Γ ist im allgemeinen gleich der dreifachen Ordnung vermehrt um die Zahl der Wendepunkte von Γ.** Um die Klasse ν_1 der Evolute zu bestimmen, suchen wir auf, wie viele Normalen der Kurve (1) durch einen beliebigen Punkt (X, Y) der Ebene gehen, mit anderen Worten, wie viele (mit diesem Punkte variabele) Lösungen die Gleichungen (1) und (2) haben. Beachten wir nun, dafs die Gleichung (2) einer Kurve angehört, die durch jeden Doppelpunkt von (1) geht und bei jeder Spitze die entsprechende Spitzentangente berührt, so schliefsen wir alsbald, dafs

$$\nu_1 = n^2 - 2d - 3k;$$

nun ist bekanntlich $\quad \nu = n(n-1) - 2d - 3k,$

und daraus folgt $\quad \boldsymbol{\nu_1 = \nu + n},$

folglich: **Die Klasse der Evolute einer algebraischen Kurve Γ ist im allgemeinen gleich der Summe der Ordnung und Klasse von Γ.** — Wenn man schliefslich noch beachtet, dafs Γ und seine Evolute Γ_1 Kurven vom selben Geschlechte sind, so sieht man, dafs man genügend viel Elemente hat, um alle Charakteristiken der Evolute zu bestimmen.

Modifikationen treten ein, wenn Γ metrische Besonderheiten oder höhere Singularitäten besitzt[1]). Da wir keinen Raum haben, uns mit diesen Einzelheiten zu befassen, so verweisen wir auf die bezüglichen Arbeiten von Clebsch[2]), Cayley[3]) und Halphèn[4]); es sei bemerkt, dafs letzterer die Entdeckung machte, dafs, wenigstens von einem gewissen Range an, die Ordnungen und die Klassen der successiven Evoluten einer algebraischen Kurve zwei arithmetische Progressionen bilden, welche dieselbe Differenz haben.

Das Verfahren, welches von der Kurve Γ zu Γ_1 führt, ist von der Art, wie wir es zu Anfang dieses Abschnittes besprochen haben;

---

1) Salmon-Fiedler, *Höhere ebene Curven,* II. Aufl. (Leipzig 1882) S. 119 ff.

2) *Ueber die Singularitäten algebraischer Kurven* (Crelle's Journ. LXIV, 1864).

3) *On the theory of the evolute* (Phil. Mag. XXIX, 1865; Mathem. Papers V, S. 473).

4) S. die letzten beiden Artikel der *Mémoire sur les points singuliers des courbes algébriques planes* dem Institut de France vorgelegt im April 1874, und veröffentlicht in den *Mém. prés. par divers savants etc.* (XXVI, 1879).

somit kann man eine ganze Reihe von Kurven betrachten, unendlich nach zwei Richtungen hin, und so beschaffen, dafs jede die Evolute der vorhergehenden und die Evolvente der folgenden ist. Die analytische Darstellung einer derartigen Kurvenreihe macht sich äufserst elegant, wenn man natürliche Koordinaten anwendet. Sind nämlich R und s Krümmungsradius und Bogen von Γ, R_1 und s_1 die von Γ_1, ε und ε_1 die bezüglichen Kontingenzwinkel, so erhält man:

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{1}{R}, \qquad \frac{d\varepsilon_1}{ds_1} = \frac{1}{R_1};$$

offenbar ist aber $\quad ds_1 = dR, \quad d\varepsilon_1 = d\varepsilon,$

und daher

$$\frac{ds}{R} = \frac{dR}{R_1};$$

daraus folgt, dafs

$$R_1 = R\frac{dR}{ds}, \qquad s_1 = R + c, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

wo c eine Konstante bedeutet, die man zweckmäfsig als Null annehmen kann, wenn der Anfangspunkt des Bogens auf der Evolute in geeigneter Weise gewählt wird. Eliminiert man vermittelst der Gl. (1) R und s aus der natürlichen Gleichung von Γ, $f(R, s) = 0$, so bekommt man die natürliche Gleichung von Γ_1. Umgekehrt ergiebt sich aus (8) — in welcher Gleichung wir $c = 0$ annehmen wollen —

$$R = s_1, \qquad s = \int\frac{s_1 \cdot ds_1}{R_1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

und man kann alsdann durch eine Elimination die allgemeine Gleichung der Evolventen einer gegebenen Kurve ableiten.

Machen wir sogleich eine Anwendung von diesen Formeln. Die Kurve Γ_1 sei ein Kreis mit dem Radius a; da hier $R_1 = a$, so folgt aus (9) $s = \frac{s_1^2}{2a}$, es ist aber $s_1 = R$, daher ist die natürliche Gleichung der Evolvente eines Kreises

$$R^2 = 2as,$$

welches Resultat mit dem schon (in Nr. **209**) gefundenen übereinstimmt. Um die natürliche Gleichung der zweiten Evolvente desselben Kreises zu finden, haben wir also zu setzen $R_1^2 = 2as_1$; die Gleichung liefert dann

$$s_1 = \frac{1}{\sqrt{2a}}\int\sqrt{s_1} \cdot ds_1 = \frac{2\sqrt{s_1^3}}{3\sqrt{2a}},$$

oder da $s_1 = R$

$$R^3 = \frac{3^2}{2}as^2,$$

und dies ist die natürliche Gleichung einer Spirale von Sturm oder Norwich (s. Nr. **220**). In ähnlicher Weise würde man die natürliche Gleichung der dritten, vierten Evolvente u. s. w. erhalten können; eine

Vergleichung der Resultate führt durch Induktion zu dem Schlusse, dafs die Gleichung der $(n-1)^{\text{ten}}$ Evolvente sein wird

$$R^n = \frac{n^{n-1}a}{(n-1)!} s^{n-1}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Wir wollen dies aber durch eine vollständige Induktion beweisen, indem wir die Gl. (8) benutzen. Nehmen wir also einmal an, dafs

$$R_1^n = k s_1^{n-1} \quad \left(\text{wo der Kürze wegen } \frac{n^{n-1}a}{(n-1)!} = k \text{ gesetzt wurde}\right)$$

die Gleichung der $(n-1)^{\text{ten}}$ Evolvente sei, so folgt aus (9)

$$s = \frac{1}{k^{\frac{1}{n}}} \int s_1^{\frac{1}{n}} \cdot ds_1 = \frac{s_1^{\frac{n+1}{n}}}{\frac{n+1}{n} k^{\frac{1}{n}}},$$

oder, da $s_1 = R$, $$R^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n k s^n.$$

Setzen wir nun an Stelle von k wieder seinen Wert, so erhalten wir

$$R^{n+1} = \frac{(n+1)^n a}{n!} s^n.$$

Da letztere aus (10) hervorgeht, wenn man für n, $n+1$ setzt, so ist die allgemeine Gültigkeit von Gleichung (10) bewiesen. — Es möge noch bemerkt werden: Da alle Normalen des Kreises durch einen Punkt (den Mittelpunkt) gehen, so kann man sagen, dafs der Kreis die Evolvente eines Punktes sei; **infolgedessen stellt die Gleichung (10) die n^{te} Evolvente eines Punktes dar.**

Die durch Gleichung (3) dargestellte merkwürdige Kurvenfamilie wurde wohl zuerst von du Bois-Aymé[1]), dann von Whewell schon bei seinen ersten Untersuchungen über natürliche Koordinaten-Geometrie[2]) betrachtet, sowie viel später von Sylvester[3]), der hernach auf den Rat Cayleys sie mit dem Namen Cycloden belegte; unabhängig von diesen englischen Geometern beschäftigten sich H. Onnen[4]) und E. Cesàro[5]) mit ihnen. Diese Kurvenfamilie ist noch einer

1) *De quelques propriétés des rayons de courbure et des développées planes des courbes planes* (Torino Mem. 1809—1810; Turin 1811).

2) *On the intrinsic equation of a curve and its application* (Trans. of the Cambr. phil. Soc. VIII, 1879, und IX, 1851.

3) *Note on the successive involute to a circle* (Phil. Mag. 4. Ser. XXXVI, 1868) und *Outline on the theory of reducible cyclodes* (Proc. of the London math. Soc. II, 1869).

4) *Discussion d'un système de spirales d'après leurs équations essentielles* (Arch. néerlandaises, X, 1875).

5) *Lezioni di geometria intrinseca* (Neapel 1896) S. 33; daselbst ist statt (10) unrichtiger Weise $R^n = \frac{n!}{n^n} a s^{n-1}$ geschrieben.

anderen analytischen Darstellung fähig, die man auf folgende Weise erhält[1]): Da, wie wir gesehen haben, im allgemeinen

$$R = \frac{ds}{d\varepsilon}, \quad ds_1 = dR, \quad d\varepsilon_1 = d\varepsilon, \quad R_1 = \frac{ds_1}{d\varepsilon_1},$$

so hat man
$$R_1 = \frac{dR}{d\varepsilon} = \frac{d^2 s}{d^2 \varepsilon};$$

ähnlich findet man für die zweite Evolute

$$R_2 = \frac{d^3 R}{d\varepsilon^3} \text{ u. s. w. und für die } n^{\text{te}} \quad R_n = \frac{d^{n+1} s}{d\varepsilon^{n+1}} \quad . \quad . \quad (11)$$

Wenn nun diese n^{te} Evolute ein Punkt ist, so hat man $R_n = 0$, und daher durch Integration

$$s = a_0 \varepsilon^n + a_1 \varepsilon^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \varepsilon + a_n, \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

wo die a beliebige Konstanten sind. Diese Gleichung stellt also die n^{te} Evolvente des Punktes oder die $(n-1)^{\text{te}}$ des Kreises dar, und es folgt daraus, dafs dieselbe rektifizierbar ist, wie Sylvester zuerst bemerkt hat.

Wir bemerken noch, wenn $R_n = f(\varepsilon)$ wäre, so hätte man zur Bestimmung der ursprünglichen Kurve die lineare Differenzialgleichung

$$\frac{d^{n+1} s}{d\varepsilon^{n+1}} = f(\varepsilon). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Bezeichnen wir mit S die allgemeine, und mit S_0 eine spezielle Lösung derselben, so haben wir

$$S = S_0 + a_0 \varepsilon^n + a_1 \varepsilon^{n-1} + \cdots + a_n,$$

wo die a Integrationskonstanten sind, oder wegen Gleichung (12)

$$S - S_0 = s;$$

dies beweist, „dafs die Differenz zwischen den Bogen zweier spezieller n^{ten} Evolventen einer Kurve gleich dem Bogen einer $(n-1)^{\text{ten}}$ Evolventen des Kreises ist“.

Die Betrachtung der successiven Evolventen-Krümmungsradien hat Timmermans[2]) zu der Entdeckung eines merkwürdigen Punktes geführt, die unter einer gewissen Bedingung für alle ebenen Kurven gilt. Um sie darzulegen, gehen wir von den bekannten Relationen aus

$$dx = \cos\tau \cdot ds, \qquad dy = \sin\tau \cdot ds, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

welche die gewöhnlichen Koordinaten eines Kurvenpunktes mit dem

1) W. J. Curran Sharp, *On the successive evolutes of a curve* (The Messenger, IX, 1880).

2) *Essai sur une nouvelle théorie des courbes déduites de la considération de leur rayons de courbure* (Mém. de la Soc. de Lille, VI, 1828—29). Vgl. auch *Note sur une propriété des courbes planes d'après M. Timmermans, par un abonné* (Nouv. Ann. 2. Sér. II, 1863).

Bogen s und dem Winkel τ verknüpfen, den die Tangente mit der x-Axe bildet. Ist nun ε der Winkel der Normalen mit dieser Axe, so ist $\tau + \varepsilon = \frac{\pi}{2}$, weshalb $d\varepsilon = -d\tau$, und die Formel $R_1 = \frac{ds}{d\varepsilon}$ ist offenbar äquivalent mit $ds = -R_1 \cdot d\tau$ und infolgedessen werden die Gleichungen (14) zu

$$dx = -R_1 \cos\tau \cdot d\tau, \qquad dy = -R_1 \sin\tau \cdot d\tau \quad . \; . \; . \quad (15)$$

Beachten wir, dafs die Formeln $R_{n+1} = \frac{ds_n}{d\varepsilon_n}$, $dR_n = ds_n$ im allgemeinen ergeben

$$dR_n = -R_{n+1} \cdot d\tau.$$

Nachdem dies festgelegt, wenden wir auf die erste Gleichung (15) die teilweise Integration an, benutzen die obigen Beziehungen, und erhalten

$$x = Const. - \int R_1 \cos\tau \cdot d\tau = Const. - R_1 \sin\tau - \int R_2 \sin\tau \cdot d\tau$$
$$= Const. - R_1 \sin\tau + R_2 \cos\tau + \int R_3 \cos\tau \cdot d\tau$$

oder

$$x = Const. + (R_2 - R_4 + R_6 - \cdots)\cos\tau - (R_1 - R_3 + R_5 - \cdots)\sin\tau.$$

Nimmt man als untere Grenze der Integration den Punkt, für welchen $\tau = \frac{\pi}{2}$ und bezeichnet im allgemeinen mit r_i den Wert von R_i für diesen Punkt, so folgt

$$x = (R_2 - R_4 + R_6 - \cdots)\cos\tau - (R_1 - R_3 + R_5 - \cdots)\sin\tau$$
$$+ (r_1 - r_3 + r_5 - \cdots).$$

Die in den Klammern stehenden Reihen enthalten unendlich viele Glieder; wenn man nun annimmt, dafs sie unbedingt konvergieren, so kann man ihre Summen betrachten: setzen wir also

$$R_2 - R_4 + R_6 - R_8 + \cdots = S_p, \qquad R_1 - R_3 + R_5 - R_7 + \cdots = S_d,$$
$$r_2 - r_4 + r_6 - r_8 + \cdots = s_p, \qquad r_1 - r_3 + r_5 - r_7 + \cdots = s_d,$$

so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} x &= S_p \cdot \cos\tau - S_d \cdot \sin\tau + s_d, \\ y &= S_p \cdot \sin\tau + S_d \cdot \cos\tau - s_p. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Nun sind aber die Gleichungen der Tangente und der Normale in dem betrachteten Punkte (x, y)

$$X \sin\tau - Y\cos\tau - (x\sin\tau - y\cos\tau) = 0,$$
$$X\cos\tau + Y\sin\tau - (x\cos\tau - y\sin\tau) = 0.$$

Zufolge der Werte aus Gleichung (16) kann man schreiben:

$$(X - s_d)\sin\tau - (Y + s_p)\cos\tau + S_d = 0,$$
$$(X - s_d)\cos\omega + (Y + s_p)\cos\omega - S_p = 0.$$

Diese Gleichungen zeigen, dafs der Punkt $P(s_d, -s_p)$ von der betrachteten Tangente und der Normale die Abstände S_d bezw. $-S_p$ hat, und damit ist folgender Satz erwiesen: **Sind für einen beliebigen**

Punkt M einer ebenen Kurve die successiven Evolventen-Krümmungsradien $R_1, R_2, R_3, \ldots$, so giebt es in ihrer Ebene einen ausgezeichneten Punkt, für welchen die von ihm auf die zu M gehörende Tangente und Normale gefällten Lote die Längen $R_1 - R_3 + R_5 - \cdots$ bezw. $R_2 - R_4 + R_6 - \cdots$ haben, vorausgesetzt, dafs diese beiden Reihen unbedingt konvergieren. Ist dieser Punkt ein bestimmter im Endlichen gelegener, so trägt er den Namen Kurvenpol in Bezug auf den Punkt M.

252. Die Untersuchung der successiven Evoluten und Evolventen kann auch in bequemer Weise nach einer anderen Methode ausgeführt werden, deren erste Entdeckung W. P. Hiern[1]) gebührt, die jedoch erst seit 1869 weiteren Kreisen bekannt wurde durch J. A. Serret's *Cours de calcul différentiel et intégral*[2]) und darauf auch von anderen angewendet wurde[3]); sie beruht auf Folgendem:

Es sei τ der Winkel der Tangente der Kurve Γ mit der x-Axe, dann wird der Abstand dieser Tangente vom Anfangspunkte eine gewisse Funktion $f(\tau)$ von τ sein, und die Tangente selbst kann dargestellt werden durch folgende, sogenannte magische Gleichung der Geraden

$$U \equiv y \cos\tau - x \sin\tau - f(\tau) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Ist nun die Funktion f gegeben, oder beliebig festgelegt, und man läfst τ von $-\infty$ bis $+\infty$ variieren, so stellt Gleichung (6) die unendlich vielen Tangenten der entsprechenden Kurve Γ dar. Man kann nun annehmen, dafs Γ selbst durch die Gleichung (17) dargestellt werde; variiert man f, so werden damit sämtliche Kurven der Ebene dargestellt. Um nun die Punktgleichung von Γ zu erhalten, genügt es (17) mit ihrer Ableitung nach τ zu kombinieren, also (indem wir mit $\mathfrak{D}$ die Differentiation nach τ bezeichnen) mit folgender Gleichung

$$\mathfrak{D}U \equiv -y \sin\tau - x \cos\tau - f'(\tau) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Die Gleichung $\mathfrak{D}U = 0$ stellt eine Gerade dar, die durch den Berührungspunkt der Geraden $U = 0$ mit ihrer eigenen Enveloppe geht und ist zu dieser Geraden senkrecht, folglich ist sie eine Normale der Kurve Γ. Damit ist gezeigt, dafs in derselben Weise, wie $U = 0$ die Kurve Γ darstellt, die Gleichung $\mathfrak{D}U = 0$ die Evolute Γ_1 von Γ darstellt. Die übliche Darstellung von Γ_1 würde man also erhalten, wenn man Gleichung (18) mit ihrer Abgeleiteten nach τ kombiniert, also mit der Gleichung:

$$\mathfrak{D}^2U \equiv -y \cos\tau + x \sin\tau - f''(\tau) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

---

1) *On the magical equation to the tangent of a curve* (Quart. Journ. VI, 1864).

2) S. Band I, S. 310 ff. der 2. Aufl. (Paris 1879).

3) Nicolaïdes, *Analectes, ou Mémoires et Notes sur les diverses parties des mathématiques*, VII Livraison (Athènes 1872); Mansion, *Nouv. Corr. math.* I, 1874—75.

Um aber eine Kurve Γ_{-1}, die Evolvente von Γ darzustellen, hat man die Gleichung (17) mit $d\tau$ zu multiplizieren und dann zu integrieren. Bezeichnen wir diese Operation mit $\mathfrak{D}^{-1}$, weil sie der Operation $\mathfrak{D}$ entgegengesetzt ist, so kann das Ergebnis in folgender Weise geschrieben werden,

$$\mathfrak{D}^{-1} U \equiv y \sin\tau + x \cos\tau - \int f(\tau) \cdot d\tau = 0; \quad . \quad . \quad (20)$$

mit Variation der Integrationskonstanten stellt diese Gleichung die ∞^1 Evolventen von Γ dar; es sind Kurven, welche alle dieselben Normalen haben, und von denen wir im folgenden Kap. sprechen werden. Verallgemeinern wir indessen die Methode sowie die vorigen Resultate, so sehen wir, wenn wir noch $\mathfrak{D}^0 U$ anstatt U schreiben, dafs die Kurve Γ_m, die m^{te} Evolute von Γ durch die beiden Gleichungen

$$\mathfrak{D}^m U = 0, \qquad \mathfrak{D}^{m+1} U = 0 \qquad (m = 0, 1, 2 \ldots) \quad . \quad . \quad (21)$$

bestimmt wird, die Kurve Γ_{-m} hingegen, die m^{te} Evolvente von Γ, durch

$$\mathfrak{D}^{-m+1} U = 0, \qquad \mathfrak{D}^{-m} U = 0 \qquad (m = 1, 2, 3 \ldots) \quad . \quad . \quad (22)$$

Aus den Gleichungen (17) und (19) geht hervor, dafs die Abstände des Anfangspunktes von den beiden entsprechenden Tangenten von Γ und Γ_2 bezw. $f(\tau)$ und $-f''(\tau)$ sind; diese beiden Tangenten sind parallel und ihr gegenseitiger Abstand beträgt $f(\tau) + f''(\tau)$; dieser Abstand ist aber der Krümmungsradius von Γ, folglich ist

$$R = f(\tau) + f''(\tau), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

oder, wenn man will, symbolisch

$$R = (\mathfrak{D}^0 + \mathfrak{D}^2) f(\tau); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23')$$

hieraus läfst sich ableiten, dafs die Kurve konkav oder konvex gegen den Anfangspunkt ist, jenachdem das Produkt $R \cdot f(\tau)$ negativ oder positiv ist[1]. Machen wir die Schlüsse in ähnlicher Weise für die Gleichungen (21) und (22), so erkennen wir, dafs der Krümmungsradius $R_{\pm m}$ der Kurve $\Gamma_{\pm m}$ symbolisch ausgedrückt wird durch

$$R_{\pm m} = (\mathfrak{D}^{\pm m} + \mathfrak{D}^{\pm m + 2}) f(\tau), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

welches auch der Wert der ganzen Zahl m sein möge.

253. Von ähnlicher Art wie die soeben gemachten Überlegungen sind die folgenden, die uns zur **Bestimmung der Kurven, die ihren eigenen Evoluten ähnlich sind,** führen[2]. — Wir nennen wieder R

1) Grane, *Ueber Curven mit gleichartigen successiven Developpoiden* (Diss. Lund, 1894).

2) Diese Aufgabe wurde zuerst von Euler gelöst (*Investigatio curvarum quae evolutas sui similes producunt*, Comment. Petrop. XII, 1750; *Investigatio curvarum quae similes sint suis evolutis vel primis, vel secundis, vel tertiis, vel adeo ordinis cujuscunque*, Nova Acta Petrop. I, 1787) nach Prinzipien, die im wesentlichen mit den im Texte verwendeten identisch sind; die hier benutzte Form wurde jedoch der Abhandlung von Puiseux entlehnt, *Problèmes sur les développées et les développantes des courbes planes* (Liouvilles Journ. IX, 1844).

den Krümmungsradius in einem Punkte der Kurve Γ, τ den Winkel, den die entsprechende Normale mit einer festen Geraden bildet, als welche wir die x-Axe annehmen können. $d\tau$ wird dann der Kontingenzwinkel sein, und daher

$$R = \frac{ds}{d\tau} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Ist nun der Ausdruck für R als Funktion von τ bekannt — $R = f(\tau)$ — so ist damit, abgesehen von der Lage, die Kurve T bestimmt; nämlich aus den Gleichungen

$$R = f(\tau), \qquad dx = \cos\tau \cdot ds, \qquad dy = -\sin\tau \cdot ds$$

ergiebt sich

$$dx = f(\tau)\cos\tau \cdot d\tau, \qquad dy = -f(\tau)\sin\tau \cdot d\tau,$$

daher ist

$$x = \alpha + \int f(\tau)\cos\tau \cdot d\tau, \qquad y = \beta - \int f(\tau)\sin\tau \cdot d\tau, \quad . \quad (26)$$

(wo α und β beliebige Konstanten sind), wodurch die Behauptung bewiesen ist.

Zugleich mit Γ betrachten wir auch die Kurve Γ', die durch die Beziehung

$$R = lf(\tau + \lambda)$$

definiert ist, wo l und λ beliebige Konstanten sind; für sie bestehen dann folgende der Gleichungen (26) analoge Beziehungen

$$x' = \alpha' + l\int f(\tau + \lambda)\cos\tau \cdot d\tau, \qquad y' = \beta' - l\int f(\tau + \lambda)\sin\tau \cdot d\tau,$$

oder

$$x' = \alpha' + l\int f(\tau')\cos(\tau' - \lambda)d\tau', \qquad y' = \beta' - l\int f(\tau')\sin(\tau' - \lambda)d\tau,$$

indem man $\tau + \lambda = \tau'$ setzt; werden nun noch die Gleichungen (26) herbeigezogen, so bekommt man

$$\frac{x' - \alpha'}{l} = (x - \alpha)\cos\lambda - (y - \beta)\sin\lambda,$$

$$\frac{y' - \beta'}{l} = (x - \alpha)\sin\lambda + (y - \beta)\cos\lambda.$$

Aus diesen Beziehungen erkennt man, dafs Γ und Γ_1 aus einander hervorgehen durch Ähnlichkeit, verbunden mit einer Verschiebung der Ebene; von der letzteren abgesehen kann man sagen: **Die Gleichungen $R = f(\tau)$ und $R = lf(\tau + \lambda)$ gehören zwei Kurven an, die einander direkt ähnlich sind,** insbesondere zwei **direkt kongruenten, wenn $l = 1$.** In ähnlicher Weise läfst sich zeigen, **dafs die Gleichungen $R = f(\tau)$ und $R = lf(\tau - \lambda)$ zwei Kurven bestimmen, die invers ähnlich sind,** insbesondere **invers kongruent, wenn $l = 1$.**

Nachdem diese Bemerkungen vorausgeschickt sind, wollen wir mit R_k, s_k, τ_k die für die Kurve Γ_k, der k^{ten} Evolute von Γ, den R, s, τ entsprechenden Gröfsen bezeichnen. Dann haben wir

$$\tau_1 = \tau + \frac{\pi}{2}, \quad \tau_2 = \tau_1 + \frac{\pi}{2}, \quad \ldots\ldots, \quad \tau_n = \tau_{n-1} + \frac{\pi}{2},$$

daher

$$d\tau = d\tau_1 = d\tau_2 = \cdots = d\tau_n, \qquad \tau_n = \tau + n\frac{\pi}{2}.$$

Aufserdem ist

$$ds_1 = dR, \quad ds_2 = dR_1, \quad \ldots, \quad ds_n = dR_{n-1};$$

$$R_1 = \frac{ds_1}{d\tau_1}, \quad R_2 = \frac{ds_2}{d\tau_2}, \quad \ldots, \quad R_n = \frac{ds_n}{d\tau_n};$$

folglich

$$R_1 = \frac{dR}{d\tau}, \quad R_2 = \frac{dR_1}{d\tau}, \quad \ldots, \quad R_n = \frac{dR_{n-1}}{d\tau},$$

und daher

$$\boldsymbol{R_n = \frac{d^n R}{d\tau^n}}.$$

Somit ist gezeigt: Wenn $R = f(\tau)$ die Gleichung ist, durch welche die Kurve Γ dargestellt wird, die für ihre n^{te} Evolute Γ_n sein wird

$$R_n = f^{(n)}(\tau),$$

oder auch

$$R_n = f^{(n)}\left(\tau_n - n\frac{\pi}{2}\right).$$

Daraus geht dann hervor, dafs wenn Γ und Γ_n einander direkt oder invers ähnlich sind, die Funktion f der Gleichung genügen mufs

$$f^{(n)}\left(\tau_n - n\frac{\pi}{2}\right) = lf(\lambda \pm \tau_n),$$

oder mit Einführung neuer Konstanten

$$f^{(n)}(\tau) = kf(\varkappa \pm \tau).$$

Damit haben wir die Differenzialgleichung des Problems. Um sie zu integrieren, sind die beiden Fälle $+\tau$ und $-\tau$ auseinander zu halten. Im letzteren Falle, wenn also

$$f^{(n)}(\tau) = kf(\varkappa - \tau), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

erhält man nach n-maliger Differenziation

$$f^{(2n)}(\tau) = (-1)^n k f^n(\varkappa - \tau);$$

die vorige Gleichung liefert aber

$$f^{(n)}(\varkappa - \tau) = kf(\tau);$$

folglich ist

$$f^{(2n)}(\tau) = (-1)^n k^2 f(\tau).$$

Die Funktion f genügt daher einer linearen Differenzialgleichung von der Ordnung $2n$ mit konstanten Koeffizienten; f mufs also die Summe von $2n$ Gliedern sein, jedes von der Form $Ae^{m\tau}$, wo m eine Wurzel der charakteristischen Gleichung $m^{2n} = (-1)^n k^2$ ist, und A eine Konstante; von diesen $2n$ Konstanten sind aber nur n beliebig, die anderen ergeben sich, indem man auf die ursprüngliche Gleichung (16) zurückgeht. — In dem anderen Falle, in welchem

$$f^{(n)}(\tau) = kf(\varkappa + \tau), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

sieht man, wenn $f(\tau) = \Sigma A e^{m\tau}$ gesetzt wird, dafs jedes Glied dieser

Summe der Gleichung (28) genügen mufs; die A sind beliebig, während m eine Wurzel der Gleichung $m^n = ke^{mn}$ sein mufs. Da nun diese Gleichung 0, 1, 2, 3 reelle Wurzeln und unzählig viele komplexe haben kann, so wird eine Funktion, die der Gleichung (17) genügt, aus einer endlichen Zahl (0, 1, 2 oder 3) Gliedern von der Form $Ae^{m\tau}$ bestehen, und unzähligen von der Form $Be^{\beta\tau}\sin(\gamma\tau + \delta)$; in dem Falle ferner, dafs jene Gleichung für m zwei gleiche Wurzeln hat, werden auch die Glieder $e^{m\tau}(A_0 + A_1\tau)$ gleich sein.

Damit kann das Problem als in seinen Hauptzügen gelöst erachtet werden, und wollen wir jetzt die erhaltenen Resultate auf einige Spezialfälle anwenden.

I. Es sei $R = ae^{\alpha\tau}$. Da $f(\tau) = ae^{\alpha\tau}$, so ist $f^{(n)}(\tau) = \alpha^n ae^{\alpha\tau}$. Wählen wir also eine Zahl n derart, dafs $\alpha^n = e^{\alpha n}$, so können wir schreiben $f^{(n)}(\tau) = ae^{\alpha(n+\tau)} = f(n+\tau)$, daher ist die Kurve ihren sämtlichen Evoluten gleich; wählt man hingegen n in der Art, dafs $\alpha^n = ae^{\alpha n}$, so hat man $f^{(n)}(\tau) = \alpha^n e^{\alpha(n+\tau)} = af(n+\tau)$; daher ist die betreffende Kurve auch ihren sämtlichen Evolventen ähnlich. Um zu sehen, welches diese Kurve sei, beachten wir, dafs $R = \frac{ds}{d\tau} = ae^{\alpha\tau}$, also $s + c = \frac{a}{\alpha}e^{\alpha\tau}$, somit $R = \alpha(s+c)$, welches eine logarithmische Spirale darstellt (s. Nr. **192**).

II. Es sei $R = B(\sin\beta\tau + \beta')$. β' kann offenbar gleich Null angenommen werden; dann ist

$$f(\tau) = B\sin\beta\tau, \quad f^{(n)}(\tau) = \beta^n B\sin\left(\beta\tau + n\frac{\pi}{2}\right) = \beta^n f\left(\tau + \frac{n\pi}{2\beta}\right),$$

folglich ist diese Kurve ihren sämtlichen Evoluten gleich. Man hat $\frac{ds}{d\tau} = B\sin\beta\tau$, also $s = -\frac{B}{\beta}\cos\beta\tau$. Da infolge dessen

$$\sin\beta\tau = \frac{R}{B}, \qquad \cos\beta\tau = -\frac{\beta s}{B},$$

so schliefst man, dafs die natürliche Gleichung der Kurve $R^2 + \beta^2 s^2 = B^2$ sein wird; die Kurve selbst ist demnach im allgemeinen eine Epicykloide (vgl. Nr. **206**), dagegen eine gemeine Cycloide, wenn $\beta = 1$ (s. Nr. **200**).

III. Es sei $R = A[e^{m\tau} \pm e^{m(n-\tau)}]$. Da in diesem Falle

$$\frac{ds}{d\tau} = A\left(e^{m\tau} \pm e^{m(n-\tau)}\right),$$

so hat man
$$s = A\left[\frac{e^{m\tau}}{m} \mp \frac{e^{m(n-\tau)}}{m}\right].$$

Aus den beiden Gleichungen

$$e^{m\tau} \pm e^{m(n-\tau)} = \frac{R}{A}, \qquad e^{m\tau} \mp e^{m(n-\tau)} = \frac{ms}{A},$$

ergiebt sich dann
$$R^2 - m^2 s^2 = A^2 e^{mn},$$

welches die natürliche Gleichung einer Pseudocykloide ist (vgl. Nr. **211**).

IV. Allgemeiner noch als die logarithmische Spirale und die Epicykloiden ist endlich die Kurve, deren Gleichung $R = Ae^{m\tau} \sin n\tau$ ist, und die mit diesen die Eigenschaft gemeinsam hat, allen ihren Evoluten ähnlich zu sein.

254. Auf Kurven, die ihren Evoluten gerader Ordnung gleich sind, trifft man auch bei der Lösung folgender Aufgabe[1]): „Eine Kurve Γ zu finden, dafs für alle ihre Punkte C die entsprechenden Punkte C_2 und C_4 ihrer zweiten und vierten Evolute auf einer durch den Punkt C gehenden Geraden liegen.“ Wenn dies eintrifft, liegen auch die entsprechenden Punkte $C_6, C_8 \ldots$ auf dieser Geraden, während die Punkte $C_1, C_3, C_5 \ldots$ auf einer zweiten durch C gehenden Geraden liegen, die mit der obigen einen konstanten Winkel bildet. Alle Evoluten gerader Ordnung werden dann einander ähnlich sein, und dasselbe wird von denen ungerader Ordnung gelten. Die natürliche Gleichung von Γ hat eine der beiden Formen

$$R^2 = 4ab + (ms + k)^2, \qquad R^2 = a^2 - (ms + k)^2.$$

Die Betrachtung der Krümmungscentren führt noch zu anderen neuen Kurven aufser den successiven Evoluten. Hâton de la Goupillière nämlich hat Formeln aufgestellt, welche die Koordinaten eines Punktes C_k liefern, der dem Punkte C von Γ in der k^{ten} Evolute entspricht, in Bezug auf die Tangente und Normale in C als kartesische Axen genommen; wenn man aus diesen beiden Formeln k eliminiert, so erhält man eine Kurve, auf welcher die unzählig vielen Punkte $C_1, C_2, \ldots C_k, \ldots$ liegen; es ist diese eine der angedeuteten neuen Kurven[2]); eine zweite ist der Ort des Schwerpunktes der Gruppe $C_1 C_2 \ldots C_k$ bei Variation des entsprechenden Punktes C.[3])

Viertes Kapitel.

Verallgemeinerungen der Evoluten und Evolventen.

255. Die zwischen zwei Kurven bestehende Beziehung, die man dadurch ausdrückt, dafs man sagt, dafs die eine die Evolute der anderen sei oder diese die Evolvente der ersteren, kann von mehreren verschiedenen Gesichtspunkten aus betrachtet und verallgemeinert

---

1) Pirondini, *Note géométrique* (Nouv. Ann. 3. Ser. V, 1886) und *Alcune questioni sulle evolute successive di una linea piana* (Napoli Rendic. 2. Ser. V, 1891).

2) Hâton de la Goupillière, *Des centres de courbure successifs* (Liouvilles Journ. 2. Ser. IV, 1859).

3) S. die Note Hâton de la Goupillières, *Centres des moyennes distances des centres de courbure successifs* (C. R. 21. Nov. 1892).

werden und ist auch thatsächlich in verschiedener Weise verallgemeinert worden. Wir wollen hier einen Überblick über die wichtigsten Verallgemeinerungen geben.

I. Indem man die Evolute einer Kurve Γ als die Enveloppe aller ihrer Normalen auffafst, so wird man ganz natürlich dazu geführt, die Enveloppe Γ_α aller derjenigen Geraden zu betrachten, welche Γ unter den konstanten Winkel α schneiden[1]). Dafs eine derartige Verallgemeinerung der Evolute sich von selbst aufdrängen mufste, wird durch die Geschichte bestätigt, indem dieser Begriff kurz nach der Veröffentlichung des *Horologium oscillatorium* aufgestellt wurde: die beiden Abhandlungen, in denen der berühmte Physiker Réaumur die Fundamente der Theorie jener Enveloppen legte, tragen nämlich das Datum 1709; er stellte darin einen Satz auf, der noch heute als der Angelpunkt ihrer Theorie gelten kann[2]). Die Enveloppen selbst erhielten bei ihrem ersten Auftreten den Namen „développées imparfaites"[3]), andere benutzen den Namen „développées obliques"[4]); am meisten gebräuchlich ist der Name Developpoiden oder Evolutoiden, der von Lancret in einer seiner trefflichen Abhandlungen angegeben wurde[5]).

Der erwähnte Réaumur'sche Satz kann leicht in folgender Weise bewiesen werden: Es sei $f(\xi, \eta) = 0$ die Gleichung der Kurve Γ, eine Gerade, welche sie unter einem Winkel α schneidet, hat zur Gleichung

$$(x - \xi)\left(1 - \frac{d\eta}{d\xi} \operatorname{tg} \alpha\right) + (y - \eta)\left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{d\eta}{d\xi}\right) = 0; \quad . \quad . \quad (1)$$

die Evolutoide Γ_α ist nun die Enveloppe dieser Geraden. Differenzieren wir nun (1) nach ξ, so erhalten wir

$$-(x - \xi) \operatorname{tg} \alpha + y - \eta = \frac{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

1) Beispiele: 1. Die sämtlichen Geraden, welche einen Kreis unter konstantem Winkel schneiden, umhüllen einen kleineren konzentrischen Kreis; 2. die, welche eine logarithmische Spirale unter konstantem Winkel schneiden, umhüllen eine zweite logarithmische Spirale, da ja diese Kurve die schräge Trajektorie eines Strahlenbüschels ist.

2) *Méthode générale pour déterminer le point d'intersection de deux lignes infiniment proches, qui rencontrent une courbe donnée vers le même côté sous des angles égaux moindres ou plus grandes qu'un droit* (Mém. de l'Ac. des Sciences, MDCCIX). *Formules générales pour déterminer le point d'intersection de deux lignes droites infiniment proches, qui rencontrent une courbe quelconque vers le même côté sous des angles égaux* (Das.).

3) Fontenelle, *Histoire de l'Acad. des Sciences,* Année MDCCIX, S. 65.

4) Aoust, *Analyse infinitésimale des courbes planes* (Paris 1873) S. 77.

5) *Mémoire sur les développoïdes des courbes planes* (Mém. des Savants Étr. II, 1811).

Combinieren wir (1) und (2), so bekommen wir

$$\left.\begin{aligned} x-\xi &= \cos^2\alpha \frac{1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}}\left(\operatorname{tg}\alpha+\frac{d\eta}{d\xi}\right), \\ y-\eta &= \cos^2\alpha \frac{1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}}\left(\frac{d\eta}{d\xi}\operatorname{tg}\alpha-1\right). \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Diese Gleichungen liefern die Koordinaten eines beliebigen Punktes $P(x, y)$ der Evolutoide Γ_α ausgedrückt durch die Koordinaten des entsprechenden Punktes $M(\xi, \eta)$ der Kurve Γ. Aus ihnen ergiebt sich nun

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2 = \cos^2\alpha \frac{\left[1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}};$$

ist nun R der Krümmungsradius von Γ im Punkte M, so folgt hieraus, wenn man sich eines bekannten Ausdrucks für R erinnert, dafs

$$PM = R\cos\alpha,$$

und dies besagt: **Ist C das Krümmungscentrum für den Punkt M der Kurve Γ, und fällt man von diesem auf die Gerade, welche die Kurve Γ in M unter dem Winkel α schneidet, das Lot, so ist der Fufspunkt desselben, der Berührungspunkt jener Geraden mit ihrer eigenen Enveloppe Γ_α.** Dieser Réaumur'sche Satz führt zu einer einfachen Punktkonstruktion beliebiger Evolutoiden.

256. In der Theorie der Developpoiden findet auch die, von uns schon bei den Evoluten (Nr. **252**) benutzte „magische Gleichung der Geraden" eine elegante Anwendung[1]). Nehmen wir nämlich an, dafs die Kurve Γ die Enveloppe der ∞^1 Geraden sei, welche bei Variation von τ durch die Gleichung

$$T \equiv y\cos\tau - x\sin\tau - f(\tau) = 0$$

dargestellt werden, so würde die Punktgleichung von Γ entstehen, wenn man diese Gleichung mit ihrer Ableitung nach τ kombinierte, also mit

$$T' \equiv -y\sin\tau - x\cos\tau - f'(\tau) = 0.$$

Betrachtet man nun die Gleichung

$$U \equiv T\cos\alpha + T'\sin\alpha = 0,$$

so hat man damit die analytische Darstellung der Geraden, die durch den Berührungspunkt von $T=0$ geht, und mit dieser den Winkel α

1) Mansion, *Principes de la théorie des développoïdes des courbes planes* (Nouv. Corr. math. V, 1879).

bildet; die Enveloppe der Geraden $U = 0$ ist also die Evolutoide Γ_α mit dem Winkel α der Kurve Γ. In ähnlicher Weise umhüllt die Gerade

$$V \equiv U \cos\beta + U' \sin\beta = 0$$

die Evolutoide der Kurve Γ_α mit dem Winkel β; der Analogie folgend können wir sie mit $\Gamma_{\alpha,\beta}$ bezeichnen. Setzen wir nun in diese letzte Gleichung für U seinen Wert, so wird diese zu

$$V \equiv T \cos\alpha \cdot \cos\beta + T' \sin(\alpha + \beta) + T'' \sin\alpha \cdot \sin\beta = 0\,.$$

Die Funktion V ist also symmetrisch in α und β, woraus folgt, dafs man zu der Kurve $\Gamma_{\alpha,\beta}$ auch gelangt sein würde, wenn man die Evolutoide des Winkels α von der Kurve Γ_β aufgesucht hätte. Diese wichtige Thatsache, die man als den Lancret'schen Satz zu bezeichnen pflegt, kann man in die Worte kleiden: **Die Evolutoide $\Gamma_{\alpha,\beta}$ ist identisch mit der Evolutoide $\Gamma_{\beta,\alpha}$**[1]. Wenn man daher symbolisch mit $\Gamma_{\alpha,\beta,\gamma,\delta\ldots}$ die Kurve bezeichnet, die entsteht, wenn man die Evolutoide des Winkels α von Γ, nämlich Γ_α konstruiert, hierauf die des Winkels β von Γ_α, nämlich $\Gamma_{\alpha,\beta}$, und so weiter, so kann man die Winkel $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ permutieren, ohne dafs die entstehende Kurve geändert wird.

Die Gleichung $U = 0$ lautet ausführlich geschrieben

$$y \cos(\tau + \alpha) - x \sin(\tau + \alpha) = \cos\alpha f(\tau) + \sin\alpha f'(\tau)\,,$$

oder auch, wenn man

$$\tau + \alpha = \theta\,, \qquad \cos\alpha \cdot f(\theta - \alpha) + \sin\alpha f'(\theta - \alpha) = F(\theta)$$

setzt,

$$y \cos\theta - x \sin\theta = F(\theta)\,.$$

Wenn man nun mit R_α den Krümmungsradius von Γ_α bezeichnet (sowie mit R den von Γ) und einige der Nr. **252** gewonnenen Resultate benutzt, so erhält man

$$\begin{aligned} R_\alpha = F(\theta) + F''(\theta) &= \cos\alpha f(\theta - \alpha) + \sin\alpha f'(\theta - a) \\ &\quad + \cos\alpha f''(\theta - \alpha) + \sin\alpha f'''(\theta - \alpha) \\ &= \cos\alpha\,[f(\tau) + f''(\tau)] + \sin\alpha \frac{d}{d\tau}[f(\tau) + f''(\tau)]. \end{aligned}$$

Nun ist $f(\tau) + f''(\tau) = R$, folglich ist

$$R_\alpha = R \cos\alpha + \frac{dR}{d\tau} \sin\alpha\,; \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

diese elegante Beziehung ist unter dem Namen der Habich'schen Formel bekannt[2]. Will man sie mit dem Winkel in Beziehung bringen, den die Tangente der Evolutoide (nicht mit der Tangente,

---

1) Einen geometrischen Beweis dieses Satzes findet man in der *Note* von Hâton de la Goupillière, *sur la théorie des développoïdes* (Bull. de la Soc. math. de France, V, 1896—97).

2) *Les Mondes,* XIX, 1869, S. 33.

sondern) mit der Normalen der gegebenen Kurve bildet, so ist nur notwendig, an Stelle des obigen α den Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$ zu setzen; sie wird alsdann

$$R_\alpha = R \sin\alpha + \frac{dR}{d\tau} \cos\alpha \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4')$$

Die Habich'sche Formel ermöglicht es, die natürliche Gleichung von Γ_α zu finden, wenn man die von Γ kennt; man beachte, dafs für Γ und Γ_α die Kontingenzwinkel gleich sind, daher ist

$$d\tau = d\tau_\alpha \,.$$

Da ferner im allgemeinen

$$R = \frac{ds}{d\tau}, \qquad R_\alpha = \frac{ds_\alpha}{d\tau_\alpha},$$

so hat man drei Relationen, die zugleich mit (4) und der Kurvengleichung von Γ ein System bilden, aus welchem R, s, τ, τ_α eliminiert werden können und damit die gesuchte Gleichung zwischen R_α und s_α erhalten wird.

Wenden wir dieses Verfahren auf die Epicykloide mit der natürlichen Gleichung

$$R^2 + \mu^2 s^2 = c^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

an. Wir schreiben diese in folgender Weise

$$\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 + \mu^2 s^2 = c^2$$

und erhalten daraus

$$d\tau = \frac{ds}{\sqrt{c^2 - \mu^2 s^2}},$$

und durch Integrieren

$$\tau - \tau_0 = \frac{1}{\mu} \arcsin \frac{\mu s}{c},$$

oder auch, da $\tau_\alpha = \tau + Const.$,

$$s = \frac{c}{\mu} \sin\mu(\tau_\alpha - \tau_0'), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

wo τ_0' eine neue Konstante ist. Nun kann Gleichung (4) geschrieben werden als

$$R_\alpha = \frac{ds}{d\tau_\alpha} \cos\alpha + \frac{d^2 s}{d\tau_\alpha^2} \sin\alpha,$$

oder mit Anwendung von Gleichung (6)

$$R_\alpha = c[\cos\alpha \cdot \cos\mu(\tau_\alpha - \tau_0') + \mu \sin\alpha \cdot \cos\mu(\tau_\alpha - \tau_0')] \,.$$

Da ferner $ds_\alpha = R_\alpha \cdot d\tau$, so liefert eine neue Integration bei passend gewählten Konstanten

$$\mu s_\alpha = c[\cos\alpha \cdot \sin\mu(\tau_\alpha - \tau_0') + \mu \sin\alpha \cdot \cos\mu(\tau_\alpha - \tau_0')] \,.$$

Werden die beiden letzten Gleichungen quadriert und addiert, so erhält man

$$R_\alpha^2 + \mu^2 s_\alpha^2 = c^2(\cos^2\alpha + \mu^2 \sin^2\alpha) \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Dies ist die natürliche Gleichung der Evolutoide des Winkels α der betrachteten Epicykloide; eine Vergleichung mit (6) belehrt uns:

Alle Evolutoiden einer Epicykloide sind ihr ähnliche Kurven[1]. Wenn $\mu = 1$, so stellt (5) eine gemeine Cykloide dar; dann wird Gleichung (7) $R_\alpha^2 + s_\alpha^2 = c^2$; daher: **Alle Evolutoiden einer gemeinen Cykloide sind ihr gleiche Kurven.** — In gleicher Weise läfst sich zeigen: **Alle Pseudocykloiden sind ihren Evolutoiden gerader Ordnung ähnlich.**

Wenn in der Gleichung (4′) R als Funktion von τ ($= \tau_\alpha + Const.$) gegeben ist, so ist sie eine Gleichung zwischen R_α und τ_α, also die natürliche Gleichung von Γ_α. Wenn man dagegen voraussetzt[2], dafs in ihr R_α als Funktion von τ_α gegeben sei, so stellt sie sich als eine Differenzialgleichung zwischen R und τ dar, durch deren Integration man eine Kurve Γ erhält, zu welcher Γ_α die Evolutoide des Winkels α ist, und die man die inverse Evolutoide des Winkels α in Bezug auf Γ als Ausgangskurve nennt[3]; wir wollen diese durch das Symbol $\overline{\Gamma}_\alpha$ bezeichnen. Die Gleichung (1) ist nun eine lineare Gleichung in R mit konstanten Koeffizienten, kann daher integriert werden, und ergiebt:

$$R = \frac{e^{-\tau \operatorname{tg} \alpha}}{\cos \alpha} \int_\lambda^\tau R_\alpha e^{\tau \operatorname{tg} \alpha} \cdot d\tau, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

wo λ eine durch die Integration eingeführte Konstante ist; durch Variation derselben erhalten wir die unendlich vielen inversen Evolutoiden. Aus leicht begreiflichen Gründen ist es vorteilhaft (8) in etwas anderer Weise zu schreiben, indem man $R, \alpha, \lambda, R_\alpha$ ersetzt bezw. durch $\overline{R}_\alpha, \alpha_1, \lambda_1, R$; dann hat man

$$\overline{R}_{\alpha_1} = \frac{e^{-\tau \operatorname{tg} \alpha_1}}{\cos \alpha_1} \int_{\lambda_1}^\tau R e^{\tau \operatorname{tg} \alpha_1} \cdot d\tau.$$

Analog wird die allgemeine natürliche Gleichung der Evolutoide $\overline{\Gamma}_{\alpha_1 \alpha_2}$ des Winkels α_2 von $\overline{\Gamma}_{\alpha_1}$ sein

$$\overline{R}_{\alpha_1, \alpha_2} = \frac{e^{-\tau \operatorname{tg} \alpha_2}}{\cos \alpha_2} \int_{\lambda_2}^\tau R_{\alpha_2} e^{\tau \operatorname{tg} \alpha_2} \cdot d\tau,$$

oder wegen der vorigen Gleichung

$$\overline{R}_{\alpha_1, \alpha_2} = \frac{e^{-\tau \operatorname{tg} \alpha_2}}{\cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2} \int_{\lambda_1}^\tau R_{\alpha_2} e^{\tau (\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1)} \cdot d\tau \int_{\lambda_1}^\tau R e^{\tau \operatorname{tg} \alpha_1} \cdot d\tau.$$

Fahren wir in dieser Weise fort, so gelangen wir zu dem Schlusse,

---

1) S. die Questions 799 u. 800, gestellt von Fouret in den Nouv. Ann. de Math. und gelöst von Rouquet 1867 und von Fouret 1880.

2) S. die Abh. von Hâton de la Goupillière, *Recherches sur les développoïdes des diverses ordres* (Ann. de la Soc. Sc. de Bruxelles II, 1877).

3) Man könnte sie auch Evolventoide nennen.

dafs die inversen Evolutoiden $\overline{\Gamma}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ die allgemeine natürliche Gleichung haben

$$\overline{R}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = \frac{e^{-\tau \operatorname{tg} \alpha_n}}{\cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 \ldots . \cos\alpha_n} \int_{\lambda_n}^{\tau} e^{\tau(\operatorname{tg}\alpha_n - \operatorname{tg}\alpha_{n-1})}$$

$$\cdot d\tau \int_{\lambda_{n-1}}^{\tau} e^{\tau(\operatorname{tg}\alpha_{n-1} - \operatorname{tg}\alpha_{n-2})} d\tau \ldots\ldots \int R e^{\tau \operatorname{tg}\alpha_1} \cdot d\tau . \quad . \quad . \quad (9)$$

Wenn im speziellen $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots \alpha_n$, kann man schreiben

$$\overline{R}_\alpha^{(n)} = \frac{e^{-\tau \operatorname{tg}\alpha}}{\cos^n \alpha} \int_{\lambda_n}^{\tau} d\tau \int_{\lambda_{n-1}}^{\tau} d\tau \ldots\ldots \int_{\lambda_1}^{\tau} R e^{\tau \operatorname{tg}\alpha} \cdot d\tau , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9')$$

und wenn aufserdem $\alpha = 0$

$$\overline{R}^{(n)} = \int_{\lambda_n}^{\tau}\int_{\lambda_{n-1}}^{\tau} \ldots . \int_{\lambda_1}^{\tau} R d\tau^n ,$$

welches Resultat im wesentlichen schon im vorigen Kapitel gefunden wurde.

Die allgemeine Formel (9) ist analog zu einer andern, welche die (direkten) Evolutoiden betrifft und die man auf folgende Weise erhält: Wir nehmen die Gleichung (4′) und schreiben sie in folgender Weise:

$$R_{\beta_1} = R \sin\beta_1 + \frac{dR}{d\tau} \cos\beta_1 ,$$

oder

$$R_{\beta_1} = e^{-\tau \operatorname{tg}\beta_1} \cdot \cos\beta_1 \frac{d}{d\tau} \left(R e^{\tau \operatorname{tg}\beta_1}\right);$$

dies ist die natürliche Gleichung der Evolutoide Γ_{β_2} von Γ. Demnach wird

$$R_{\beta_1,\beta_2} = e^{-\tau \operatorname{tg}\beta_2} \cdot \cos\beta_2 \frac{d}{d\tau} \left(R_{\beta_1} e^{\tau \operatorname{tg}\beta_2}\right)$$

die Evolutoide Γ_{β_1,β_2} des Winkels β_2 von Γ_{β_1} darstellen; kombinieren wir diese Gleichung mit der vorigen, so erhalten wir

$$R_{\beta_1,\beta_2} = \cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2 \cdot e^{-\tau \operatorname{tg}\beta_2} \frac{d}{d\tau} \left(e^{\tau(\operatorname{tg}\beta_2 - \operatorname{tg}\beta_1)} \frac{d}{d\tau} \left(R e^{\tau \operatorname{tg}\beta_1}\right)\right).$$

Fahren wir so fort, so erhalten wir als natürliche Gleichung von $\Gamma_{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n}$ folgende

$$R_{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n} = \cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2 \ldots . \cos\beta_n e^{-\tau \operatorname{tg}\beta_n}$$

$$\cdot \frac{d}{d\tau}\left[e^{\tau(\operatorname{tg}\beta_n - \operatorname{tg}\beta_{n-1})} \cdot \frac{d}{d\tau}\left(e^{\tau(\operatorname{tg}\beta_{n-1} - \operatorname{tg}\beta_{n-2})} \frac{d}{d\tau}\left(\ldots\ldots\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\ldots \frac{d}{d\tau}\left(e^{\tau(\operatorname{tg}\beta_2 - \operatorname{tg}\beta_1)} \frac{d}{d\tau}\left(R e^{\tau \operatorname{tg}\beta_1}\right)\right)\right)\right)\right], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

welches die angekündigte Formel ist. Wenn $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \cdots \beta_n$, so wird sie

$$R_\beta^{(n)} = \cos^n \beta \cdot e^{-\tau \operatorname{tg} \beta} \frac{d^n}{d\tau^n}(R e^{\tau \operatorname{tg} \beta}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10')$$

und wenn überdies $\beta = 0$,

$$R^{(n)} = \frac{d^n R}{d\tau^n},$$

welchem Resultate wir schon im vorigen Kapitel begegnet sind.

Die Gleichung (10) ist zwar von eleganter Form, hat aber geringen praktischen Nutzen; besser ist es, bei Anwendung auf eine Formel zurückzugreifen, die man durch folgenden Kunstgriff erhält. Aus den beiden Relationen

$$R_{\beta_1} = R \sin \beta_1 + \frac{dR}{d\tau} \cos \beta_1, \qquad R_{\beta_1, \beta_2} = R_{\beta_1} \sin \beta_2 + \frac{dR_{\beta_1}}{d\tau} \cos \beta_2$$

erhält man durch Elimination von R_{β_1} die dritte

$$R_{\beta_1, \beta_2} = \cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2 \left\{ \frac{d^2 R}{d\tau^2} + (\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2) \frac{dR}{d\tau} + R \operatorname{tg} \beta_1 \cdot \operatorname{tg} \beta_2 \right\}.$$

Setzen wir diesen Wert in

$$R_{\beta_1, \beta_2, \beta_3} = R_{\beta_1, \beta_2} \sin \beta_3 + \frac{dR_{\beta_1, \beta_2}}{d\tau} \cos \beta_3$$

ein und fahren in dieser Weise fort, so gelangen wir schließlich zu

$$R_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n} = \cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2 \ldots \cos \beta_n \left\{ \frac{d^n R}{d\tau^n} + S_1 \frac{d^{n-1} R}{d\tau^{n-1}} \right.$$
$$\left. + \cdots + S_{n-1} \frac{dR}{d\tau} + S_n R \right\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

wo $S_1, S_2, \ldots . S_n$ bezw. die Summe der Größen $\operatorname{tg} \beta_1, \operatorname{tg} \beta_2, \ldots, \operatorname{tg} \beta_n$, die Summe ihrer binären Produkte u. s. w., schließlich das Produkt aller bedeuten. Wenn insbesondere $\beta_1 = \beta_2 = \cdot\cdot = \beta_n = \beta$, so wird Gleichung (11)

$$R_\beta^{(n)} = \cos^n \beta \left\{ \frac{d^n R}{d\tau^n} + \binom{n}{1} \operatorname{tg} \beta \frac{d^{n-1} R}{d\tau^{n-1}} + \binom{n}{2} \operatorname{tg} \beta^2 \frac{d^{n-2} R}{d\tau^{n-2}} + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \binom{n}{1} \operatorname{tg}^{n-1} \beta \frac{dR}{d\tau} + \operatorname{tg} \beta^n \cdot R \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11')$$

Um die Anwendung von (11) zu zeigen, wollen wir die Aufgabe lösen: „Die n^{te} inverse Evolutoide eines Punktes aufzufinden, wenn $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$ die gegebenen Winkel sind.“ Da in diesem Falle $R_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n} = 0$, so giebt uns Gleichung (11) zur Bestimmung von R als Funktion von τ folgende lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\frac{d^n R}{d\tau^n} + S_1 \frac{d^{n-1} R}{d\tau^{n-1}} + \cdots + S_{n-1} \frac{dR}{d\tau} + S_n R = 0;$$

da die entsprechende charakteristische Gleichung die Wurzeln $-\operatorname{tg}\beta_1$, $-\operatorname{tg}\beta_2, \ldots, -\operatorname{tg}\beta_n$ hat, so haben, wenn die β alle verschieden sind, die entsprechenden Kurven die natürliche Gleichung

$$R = \sum_{k=1}^{k=n} C_k e^{-\tau \operatorname{tg}\beta_k}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

wo die C beliebige Konstanten sind. Wenn hingegen $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = \beta$, so erhält man die Kurve

$$R = \sum_{k=0}^{k=n-1} C_k \tau^k e^{-\tau \operatorname{tg}\beta}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12')$$

Als zweite Anwendung wollen wir eine Kurve Γ von der Art aufsuchen, dafs ihre n^{te} Evolutoide eine ihr ähnliche Kurve sei unter der Voraussetzung, dafs $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_n = \beta$, und dafs bei der vorausgesetzten Ähnlichkeit einem beliebigen Punkte von Γ auch gerade der Punkt entspricht, den man durch n-malige Anwendung des Réaumur'schen Satzes erhält. Da in einem solchen Falle $R_\beta^{(n)} = \mu R$ ist, so wird die Gleichung (10) zu

$$\frac{d^n}{d\tau^n}\left(R e^{\tau \operatorname{tg}\beta}\right) - \frac{\mu}{\cos^n \beta}\left(R e^{\tau \operatorname{tg}\beta}\right) = 0;$$

da dies eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten in $R e^{\tau \operatorname{tg}\beta}$ ist, und da $\omega^n = \frac{\mu}{\cos^n \beta}$ ihre charakteristische Gleichung ist, so erhält man die allgemeine natürliche Gleichung der gesuchten Kurven als

$$R = e^{-\tau \operatorname{tg}\beta} \cdot \sum_{k=1}^{k=n} C_k e^{\tau \frac{\sqrt[n]{\mu}}{\cos\beta} e^{\frac{2ki\pi}{n}}},$$

wo $\sqrt[n]{\mu}$ die n^{te} arithmetische Wurzel der Zahl μ darstellt. — In ähnlicher Weise läfst sich das allgemeine Problem lösen, bei welchem die Winkel β alle verschieden sind, wie der Leser aus der oben citierten Abhandlung von Hâton de la Goupillière ersehen kann.

257. Eine andere Art, die hier besprochene Theorie zu behandeln, ist folgende[1]): Es sei eine beliebige Kurve $\mathfrak{C}$ gegeben; in einem beliebigen Punkte C derselben ziehe man die Tangente t und bestimme eine Kurve Γ, welche die Trajektorie des Winkels λ aller Geraden t ist. Alsdann ist $\mathfrak{C}$ die Enveloppe aller zur Kurve Γ unter einem Winkel von λ schiefen Geraden, mit anderen Worten die Evolutoide des Winkels λ von Γ, daher ist umgekehrt Γ die inverse Evolutoide in Bezug auf denselben Winkel λ. Wenn λ gegeben ist, giebt es noch unendlich viele inverse Evolutoiden von $\mathfrak{C}$; durch

1) Vorgeschlagen vom Verfasser H. Herwig in seiner Dissertation, *Über Trajectorien zu den Tangenten ebener Curven* (Göttingen 1867).

jeden Punkt M der Ebene gehen ihrer so viele, als es Tangenten von ihm aus an die Kurve $\mathfrak{C}$ giebt. — Um analytisch die Beziehung zwischen $\mathfrak{C}$ und Γ auszudrücken, bezeichnen wir mit x, y die Koordinaten eines beliebigen Punktes C von $\mathfrak{C}$, und mit ξ, η die des entsprechenden Punktes Γ von Γ; x und y wollen wir als in Funktionen des Bogens s der Kurve $\mathfrak{C}$ ausgedrückt annehmen, und die entsprechenden Ausdrücke für ξ, η aufsuchen; ist nun R der Krümmungsradius der Kurve $\mathfrak{C}$, so haben wir

$$\frac{1}{R} = \begin{vmatrix} \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \end{vmatrix}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \tag{13}$$

aufserdem ist, wenn wir zur Abkürzung $\operatorname{tg} \lambda = \tau$ setzen,

$$\tau = \frac{1}{\frac{dx}{ds}\frac{d\xi}{ds} + \frac{dy}{ds}\frac{d\eta}{ds}} \cdot \begin{vmatrix} \frac{d\xi}{ds} & \frac{d\eta}{ds} \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \end{vmatrix} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \tag{14}$$

Ist nun ϱ die Länge der Strecke zwischen den beiden entsprechenden Punkten C und Γ von $\mathfrak{C}$ und Γ, so wird auch ϱ eine Funktion von s sein, und wir können schreiben

$$\xi = x + \varrho \frac{dx}{ds}, \qquad \eta = y + \varrho \frac{dy}{ds} \cdot \quad . \; . \; . \; . \tag{15}$$

Die Bestimmung der Kurve Γ ist somit auf die Aufsuchung der Funktion von ϱ zurückgeführt. Durch Differenzieren der Gl. (15) erhalten wir

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{dx}{ds} + \frac{d\varrho}{ds}\frac{dx}{ds} + \varrho \frac{d^2x}{ds^2}, \qquad \frac{d\eta}{ds} = \frac{dy}{ds} + \frac{d\varrho}{ds}\frac{dy}{ds} + \varrho \frac{d^2y}{ds^2} \cdot \tag{16}$$

Setzen wir diese Werte in (14) ein, und berücksichtigen (13) sowie die Identitäten

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1, \qquad \frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} = 0,$$

so finden wir

$$\tau = \frac{\frac{\varrho}{R}}{1 + \frac{d\varrho}{ds}},$$

oder auch

$$\varrho - \tau R \frac{d\varrho}{ds} - \tau R = 0 \, . \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \tag{17}$$

Dies ist eine lineare Differenzialgleichung in ϱ, und liefert

$$\varrho = e^{\frac{1}{\tau}\int\frac{ds}{R}} \left(a - \int e^{-\frac{1}{\tau}\int\frac{ds}{R}} . \, ds\right), \quad . \; . \; . \; . \; . \tag{18}$$

wo a die Integrationskonstante ist. Setzen wir diesen Wert in (15) ein, so erhalten wir die gesuchte analytische Darstellung aller inversen

Evolutoiden des Winkels λ von $\mathfrak{C}$. Die Konstante a bestimmt sich, wenn man den Punkt der Kurve $\mathfrak{C}$ kennt, von welchem die Kurve Γ ausgeht, es ist also der Wert von s, welcher $\varrho = 0$ macht.

Nehmen wir z. B. als Kurve $\mathfrak{C}$ den Kreis $x^2 + y^2 = 1$, so ist $R = 1$, und die Gleichungen (15) und (18) ergeben

$$\xi = \cos s - \sin s\left(\tau + ae^{\frac{s}{\tau}}\right), \qquad \eta = \sin s + \cos s\left(\tau + ae^{\frac{s}{\tau}}\right)$$

und stellen dann alle inversen Evolutoiden des Winkels λ von dem betrachteten Kreise dar.

Es möge bemerkt werden, dafs die vorigen Formeln keine Gültigkeit haben für $\tau = \frac{\pi}{2}$; in diesem Falle ist (14) durch folgende Relation zu ersetzen

$$\frac{dx}{ds}\frac{d\xi}{ds} + \frac{dy}{ds}\frac{d\eta}{ds} = 0;$$

setzen wir diesen Wert in (16) ein, erhalten wir $1 + \frac{d\varrho}{ds} = 0$, daher $\varrho = a - s$ (wo a die Integrationskonstante ist), und somit

$$\xi = x + (a - s)\frac{dx}{ds}, \qquad \eta = y + (a - s)\frac{dy}{ds}.$$

Im speziellen erhalten wir für den Kreis $x^2 + y^2 = 1$

$$\xi = \cos s - (a - s)\sin s, \qquad y = \sin s + (a - s)\cos s,$$

welches die bekannten Gleichungen der Kreisevolvente sind (vgl. Nr. **209**).

Bevor wir weiter gehen, wollen wir noch bemerken, dafs E. Beltrami das Wort Evolutoiden in einem anderen, noch weiteren Sinne gebraucht[1]). Er nennt Evolutoiden (Sviluppoide) einer Linie eine andere Kurve von der Art, dafs jede ihrer Tangenten von der ersteren Linie unter einem Winkel geschnitten wird, der eine gegebene Funktion der Koordinaten des Schnittpunktes ist. Ist jener Winkel konstant, so haben wir wieder die gewöhnlichen Evolutoiden.

258. II. T. Olivier hat gewisse spezielle ebene Linien betrachtet[2]), die er unvollkommene Evolventen des Kreises nannte, und für welche er eine stereometrische Konstruktion der Tangente angegeben hat. Die von ihm vorgeschlagene Definition läfst sich auf beliebige ebene Kurven ausdehnen und führt zu einer neuen Verallgemeinerung der Evolventen[3]). Es sei Γ eine gegebene Kurve, auf der ein positiver Sinn festgelegt ist, O ein fester Punkt derselben und μ eine reelle, positive oder negative, ebenfalls gegebene Zahl;

1) *Sulla teoria delle sviluppoidi e delle sviluppanti* (Annali di Matem. IV, 1861).

2) *Développements de géométrie déscriptive* (Paris 1843).

3) D. Levi, *Sulle evolventi allungate ed accorciate delle linee piane* (Atti dell' Acc. di Torino, IV, 1868—69).

man nehme einen beliebigen Punkt M von Γ, ziehe die zugehörige Tangente t und bestimme auf derselben den Punkt M_0 so, dafs $\frac{MM_0}{\text{arc } OM} = \mu$ wird. Jenachdem nun μ positiv oder negativ, wird M_0 auf den positiven oder negativen Teil von t zu liegen kommen. Der Ort Γ_0 der Punkte M_0 ist dann eine gewöhnliche (oder vollkommene) Evolvente, wenn $\mu = 1$, jedoch eine unvollkommene Evolvente, wenn $\mu \neq 1$, genauer eine verlängerte, wenn $|\mu| > 1$, eine verkürzte, wenn $|\mu| < 1$.

Nehmen wir, wie vorhin, die Koordinaten x, y des Punktes M als Funktionen des Bogens s gegeben an, so werden die von M_0, x_0, y_0 offenbar durch folgende Formeln bestimmt werden

$$x_0 = x + \mu s \frac{dx}{ds}, \qquad y_0 = y + \mu s \frac{dy}{ds} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Wir können nun eine elegante Konstruktion der Normalen in M_0 zu Γ_0 herleiten; beachten wir nämlich, dafs die Normalen n und n_0 in M und M_0 von Γ und Γ_0 bezw. die Gleichungen haben

$$(X - x)\frac{dx}{ds} + (Y - y)\frac{dy}{ds} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

$$\left(X - x - \mu s \frac{dx}{ds}\right)\left(\overline{1 + \mu} \frac{dx}{ds} + \mu s \frac{d^2x}{ds^2}\right)$$
$$+ \left(Y - y - \mu s \frac{dy}{ds}\right)\left(\overline{1 + \mu} \frac{dy}{ds} + \mu s \frac{d^2y}{ds^2}\right) = 0 \quad . \quad . \quad (21)$$

und kombinieren diese miteinander, so erhalten wir die Koordinaten X, Y des Punktes N, in welchem die Normalen sich schneiden. Nun ergiebt sich aus (20) und (21)

$$(X - x)\frac{d^2x}{ds^2} + (Y - y)\frac{d^2y}{ds^2} = 1 + \mu$$

und diese Gleichung im Verein mit (19) und (20) führt zu

$$(X - x) = (1 + \mu) R \frac{dy}{ds}, \qquad (Y - y) = -(1 + \mu) R \frac{dx}{ds};$$

folglich ist $\sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2} = \overline{MN} = (1 + \mu) R$.

Demnach: Ist das Krümmungscentrum C für den Punkt M der Kurve Γ gezeichnet, so hat man $\frac{MN}{MC} = 1 - \mu$ und also $\frac{NC}{MC} = \mu$. Vermittelst dieser Relation kann, wenn man für die Kurve Γ alle Konstruktionen auszuführen weifs, der Punkt N bestimmt werden, und somit auch die Normale n_0 für Γ_0. — Beispiels halber sei Γ der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$; da $x = r \cos\frac{s}{r}$, $y = r \sin\frac{s}{r}$, so ergeben die Gleichungen (19)

$$x_0 = r \cos\frac{s}{r} - \mu s \sin\frac{s}{r}, \qquad y_0 = r \sin\frac{s}{r} + \mu s \cos\frac{s}{r};$$

oder, wenn wir $\frac{s}{r} = \omega$ setzen,

$$x_0 = r \cos \omega - \mu s \omega \sin \omega, \qquad y_0 = r \sin \omega + \mu r \omega \cos \omega.$$

Durch Differenzieren bekommen wir

$$\frac{dx_0}{d\omega} = -y - \mu r \sin \omega, \qquad \frac{dy_0}{d\omega} = x + \mu r \cos \omega,$$

$$\frac{d^2 x_0}{d\omega^2} = -x - 2\mu r \cos \omega, \qquad \frac{d^2 x_0}{d\omega^2} = -y - 2\mu r \sin \omega.$$

Sind daher R_0 und s_0 Krümmungsradius und Bogen der neuen Kurve, so findet man

$$\left(\frac{ds_0}{d\omega}\right)^2 = r^2[(1+\mu)^2 + \mu^2\omega^2], \qquad R_0 = \frac{r[(1+\mu)^2 + \mu^2\omega^2]^{\frac{3}{2}}}{\mu^2\omega^2 + (1+\mu)(1+2\mu)},$$

oder setzen wir $\mu r = a$, $(1+\mu) r = h$,

$$\frac{ds_0}{d\omega} = r\sqrt{h^2 + a^2\omega^2}, \qquad R_0 = \frac{[h^2 + a^2\omega^2]^{\frac{3}{2}}}{a^2\omega^2 + h^2 + ah}.$$

Vergleichen wir diese mit den Gleichungen (5) und (7) in Nr. **209**, so sehen wir, dafs diese Kurven von den früher erhaltenen nicht verschieden sind; **demnach sind die verlängerten Kreisevolventen Oliviers dieselben wie die früher mit diesem Namen bezeichneten Kurven,** für sie haben wir hier nur eine andere Erzeugungsweise.

259. III. Denken wir uns einen biegsamen und undehnbaren Faden um eine Kurve geschlungen, dessen eines Ende in einem Punkte derselben befestigt ist, während das andere Ende in der Richtung der Tangente gespannt wird, und wickeln diesen Faden ab, so beschreibt das andere Ende eine der gewöhnlichen Evolventen der Kurve. Eine ganz andere Kurve aber entsteht, wenn beide Enden des Fadens auf zwei verschiedenen Kurven befestigt sind und der Faden durch einen Schreibstift so gespannt wird, dafs immer beide Teile desselben die beiden Kurven berühren. An Stelle der zweiten Kurve kann auch ein Punkt treten; dann entsteht folgende Aufgabe: „Ein Faden von der Länge l sei mit dem einen Ende F auf einer Kurve Λ, mit dem anderen in einem Punkte O ihrer Ebene befestigt; die Kurve Γ aufzufinden, die ein Schreibstift M beschreibt, wenn er sich so bewegt, dafs er immer beide Teile des Fadens gespannt erhält"[1]).

Auflösung: Für eine beliebige Lage von M seien OM und PM (Taf. XVI, Fig. 134) die beiden geradlinigen Teile des Fadens; sie geben zugleich mit dem Bogen $FP = s$ die Gesamtlänge des Fadens, folglich ist

$$\overline{OM} + \overline{MP} + s = l;$$

---

1) Diese Frage und ihre Lösung finden sich in der Abh. von Pietro Maggi, *Intorno una maniera più generale d'evolute ed evolventi, ed intorno un sistema di rette nello spazio* (Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto, VIII 1838, IX 1839).

nehmen wir nun O als Anfangspunkt, nennen x, y die Koordinaten von P, und X, Y die von M, so haben wir

$$\sqrt{X^2 + Y^2} + \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2} = l - s \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Da aber die Gerade PM Tangente an $\varDelta$ im Punkte P ist, so ist

$$\frac{Y-y}{X-x} = y', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

wo y' die Ableitung von y nach x sich aus der bekannten Gleichung von $\varDelta$ berechnen läfst. Nun kann man aus (22) und (23) X und Y in Funktionen von x, y ableiten; setzt man noch zur Abkürzung $(l-s)^2 - (x^2 + y^2) = \mu$, so erhält man

$$X = x - \frac{\mu}{\mu'}, \qquad Y = y - \frac{\mu}{\mu'} y' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

welche Gleichungen zur Bestimmung der Kurve Γ dienen können, wenn $\varDelta$ und O gegeben sind. — Bevor wir hieraus einige Folgerungen ziehen, wollen wir bemerken, dafs, wenn man, auf der Verlängerung von MP, $MN = MO$ nimmt, $PN = PM + MN = PM + MO = l - s$ wird; daher sind die Koordinaten von N

$$x + (l-s)\frac{dx}{ds}, \qquad y + (l-s)\frac{dy}{ds},$$

oder

$$x + \frac{l-s}{s'}, \qquad y + \frac{(l-s)y'}{s'};$$

infolgedessen lautet die Gleichung der Geraden ON:

$$\frac{Y}{X} = \frac{y + (l-s)\frac{y'}{s'}}{x + (l-s)\frac{1}{s'}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Nachdem dies festgesetzt, wollen wir die Tangente in M an die Kurve Γ aufsuchen; es genügt hierzu ihren Neigungskoeffizienten zu bestimmen. Nun ergeben die Gleichungen (24)

$$X' = \frac{\mu\mu''}{\mu'^2}; \qquad Y' = \frac{\mu}{\mu'^2}(\mu'' y' - \mu' y''),$$

daher ist

$$\frac{Y'}{X'} = \frac{\mu'' y' - \mu' y''}{\mu''},$$

oder, wenn für μ sein Wert gesetzt wird:

$$\frac{Y'}{X'} = -\frac{x + (l-s)\frac{1}{s'}}{y + (l-s)\frac{y'}{s'}}.$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung reziprok und entgegengesetzt dem Neigungskoeffizienten der durch Gleichung (25) dargestellten Geraden ON ist, so folgt, dafs die Gerade m, Tangente der Kurve Γ in M nichts anderes ist, als das von M auf ON gefällte Lot; diese Tangente

ist also Höhe im Dreiecke NMO, und da dieses gleichschenklig, halbiert sie auch den Winkel NMO. **Die Tangente an Γ bildet also mit den beiden geradlinigen Teilen des Fadens gleiche Winkel**[1]. Infolgedessen bildet auch die Normale n mit PM und MO gleiche Winkel; erstere Gerade ist nun Tangente der Kurve Λ; denken wir uns also O als leuchtenden Punkt, die Kurve Γ als spiegelnd, so wird Λ die Enveloppe der reflektierten Strahlen sein, oder anders ausgedrückt, Λ ist die Brennlinie durch Reflexion oder Katakaustika von Λ, oder umgekehrt **Γ ist also die Antikaustika von Λ in Bezug auf O als leuchtenden Punkt.** Konstruiert man die Ellipse $\mathfrak{E}$ mit den Brennpunkten O und P, die durch M geht, so ist auch für sie m die Tangente in M, folglich berühren sich die beiden Kurven Γ und $\mathfrak{E}$ im Punkte N. Man kann daher die Kurve Γ als Enveloppe der Ellipse betrachten, deren einer Brennpunkt O, deren anderer ein Punkt P von Λ ist, und deren grofse Axe gleich der Differenz zwischen der Gesamtlänge l des Fadens und der Länge des Bogens der Kurve Λ, gemessen vom festen Punkte F bis zum variabeln Punkte P. Diese Betrachtungsweise hat Veranlassung gegeben, die Kurve Γ als die elliptische Evolvente von Λ, diese dagegen als elliptische Evolute von Γ zu bezeichnen.

Durch Anwendung der obigen Sätze läfst sich zeigen, dafs auch die elliptische Evolute einer logarithmischen Spirale in Bezug auf das Auge als Punkt O wieder eine logarithmische Spirale ist; es genügt hierfür, sie als schräge Trajektorie eines Strahlenbüschels aufzufassen.

260. IV. Statt die Evolute als Enveloppe aller Normalen einer Kurve zu betrachten, kann man auch die Enveloppe des vom Berührungspunkte ausgehenden und in Bezug auf zwei feste Punkte zur Tangente konjugiert harmonischen Strahles betrachten; man erhält dann eine Kurve, die Salmon Quasi-Evolute genannt hat[2]. — Von noch gröfserer Allgemeinheit ist folgende Konstruktion: In der Ebene der Kurve Γ sei ein Kegelschnitt K gegeben; man lasse jedem Punkte M von Γ den Punkt M' entsprechen, in welchem die Tangente t in M an Γ die Polare von M in Bezug auf K schneidet; der Ort Γ' der Punkte M' heifst dann die Halphen'sche Evolute nach dem Geometer, der sie zuerst betrachtet hat[3]. Verfährt man mit Γ' gerade so wie mit Γ, so erhält man eine zweite Kurve Γ'', dann eine dritte Γ''' u. s. f. Auch für diese Reihe von Kurven gilt dasselbe

---

1) Dies ergiebt sich auch daraus, dafs man ein unendlich kleines Teilchen der Kurve als Ellipsenbogen ansehen darf.

2) *Analytische Geom. der höh. ebenen Curven.* Deutsch v. Fiedler, II. Aufl. (Leipzig 1882) S. 114.

3) S. die Abh. *Sur une série de courbes analogues aux développées* (Liouvilles Journ. 3. Ser. II, 1876).

wie für die Evoluten (Nr. 252), dafs von einem gewissen Elemente an die Ordnungen und Klassen zwei arithmetische Progressionen mit derselben Differenz bilden.

Wenn wir, um es einfach zu machen, mit $\Gamma = 0$, $K = 0$ die Gleichungen von Γ und K in homogenen Koordinaten x_1, x_2, x_3 bezeichnen, so haben die beiden Geraden, deren Schnitt der Punkt M' ist, die Gleichungen

$$\Gamma_1 X_1 + \Gamma_2 X_2 + \Gamma_3 X_3 = 0, \qquad K_1 X_1 + K_2 X_2 + K_3 X_3 = 0,$$

wo X_1, X_2, X_3 die laufenden Koordinaten, $\Gamma_1 \ldots K_1 \ldots$ die Werte der Abgeleiteten von Γ und K im Punkte $M(x_1, x_2, x_3)$ bedeuten. Die Koordinaten von M' werden dann gegeben durch die Relationen

$$x_1', x_2', x_3' \equiv \left\| \begin{matrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 \\ K_1 & K_2 & K_3 \end{matrix} \right\|. \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

Man beachte auch, dafs, weil

$$x_1 \Gamma_1 + x_2 \Gamma_2 + x_3 \Gamma_3 = 0, \qquad dx_1 \cdot \Gamma_1 + dx_2 \cdot \Gamma_2 + dx_3 \cdot \Gamma_3 = 0$$

auch

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \equiv \left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{matrix} \right\|;$$

und da

$$x_1 K_1 + x_2 K_2 + x_3 K_3 = 0, \qquad dx_1 \cdot K_1 + dx_2 \cdot K_2 + dx_3 \cdot K_3 = 0,$$

so besteht die Beziehung

$$\left| \begin{matrix} x_2 & x_3 \\ dx_2 & dx_3 \end{matrix} \right| \cdot \left| \begin{matrix} \Gamma_2 & \Gamma_3 \\ K_2 & K_3 \end{matrix} \right| = \Gamma_1 \left| \begin{matrix} 2K & dK \\ x_1 & dx_1 \end{matrix} \right|$$

und noch zwei analoge. Zufolgedessen können die Gleichungen (25) durch folgende ersetzt werden, die in der Praxis meistens bequemer sind

$$\frac{x_1'}{x_2\, dK - 2\, dx_1\, K} = \frac{x_2'}{x_2\, dK - 2\, dx_2\, K} = \frac{x_3'}{x_3\, dK - 2\, dx_3\, K}.$$

Derselbe Geometer hat noch einen Spezialfall der obigen Konstruktion betrachtet[1]): Wenn nämlich der K genannte Kegelschnitt sich auf einen Kreis reduziert mit dem Mittelpunkte O und dem Radius Null, so ist der Punkt M' nichts anderes als der Schnitt der Tangente t mit der in O zum Vector OM errichteten Senkrechten. Die Kurve Γ' heifst in diesem Falle die Tangentielle von Γ in Bezug auf den Punkt O. Nehmen wir O als Pol, nennen ϱ, ω die Polarkoordinaten von M, ϱ', ω' die von M' und μ den Winkel der Tangente t mit dem Vector OM, so haben wir

$$\varrho_1 = \varrho \operatorname{tg} \mu;$$

es ist aber $\operatorname{tg} \mu = \varrho : \frac{d\varrho}{d\omega}$, und daher $\varrho_1 = \varrho^2 : \frac{d\varrho}{d\omega}$,

---

1) Halphèn, *Étude sur les points singuliers de courbes algébriques planes. Appendice au Traité de courbes planes de G. Salmon* (Paris 1883) S. 29.

oder auch
$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\varrho} &= -\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\\ \omega_1 &= \omega + \frac{\pi}{2}\cdot\end{aligned}\right\}$$
aufserdem ist

Diese beiden Gleichungen können zur Auffindung der Gleichung von Γ' dienen, wenn man die von Γ kennt. Ist z. B. Γ die Ährenkurve (Nr. **137**) mit der Gleichung
$$\frac{a}{\varrho} = \cos\mu\omega,$$
so erhält man als Gleichung ihrer Tangentielle
$$\frac{a}{\varrho_1} = \sin\mu\omega = \sin\mu\left(\omega_1 - \frac{\pi}{2}\right),$$
daher ist diese Tangentielle eine der ursprünglichen gleiche Kurve.

Wenn Γ eine algebraische Kurve n^{ter} Ordnung ist, definiert durch die Gleichung
$$f(x,y) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$
so ist es leicht die Ordnung von Γ' zu finden. Sind nämlich α, β die Koordinaten von O, so entsteht die Gleichung von Γ' durch Elimination von x, y aus (26) und den beiden folgenden
$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y-y)\frac{\partial f}{dy} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad , \quad (27)$$
$$(X-\alpha)(x-\alpha) + (Y-\alpha)(y-\alpha) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$
Die auf einer gegebenen Geraden $Ax + By + C = 0$ gelegenen Punkte von Γ' erhält man, wenn man diejenigen Wertepaare X, Y aufsucht, die den obigen Gleichungen und
$$Ax + By + C = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$
genügen. Um ihre Anzahl zu bestimmen, beachte man zunächst, dafs, wenn man X, Y aus den Gleichungen (27) (28) (29) eliminiert, man erhält
$$\begin{aligned}(Ax + By + C)&\left[(y-\beta)\frac{\partial f}{\partial x} - (x-\alpha)\frac{\partial f}{\partial y}\right]\\ &+ \left[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2\right]\left(A\frac{\partial f}{\partial y} - B\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0. \quad . \quad . \quad (30)\end{aligned}$$

Die Anzahl der gesuchten Wertepaare X, Y ist also gleich der Anzahl der (variabelen) Schnitte der Kurven (26) und (30), ist daher im allgemeinen gleich $n(n+1)$. Wenn aber z. B. der Anfang ein vielfacher Punkt von der Ordnung r für Γ ist, so ist er für die Kurve (30) im allgemeinen ein $(r-1)$-facher, ruft daher in der Ordnung n' von Γ' eine Verminderung von $r(r-1)$ hervor, ausgenommen wenn dieser vielfache Punkt sich in O befindet, wo er für die Kurve (30) von derselben Vielfachheit ist, also eine Verminderung um r^2 bewirkt. So wird z. B. ein Doppelpunkt von Γ im allgemeinen eine Verminderung von 2 Einheiten hervorrufen, wenn die Doppelpunktstangenten getrennt sind, jedoch von 3 Einheiten, wenn sie zusammenfallen.

Dies alles zeigt, wenn Γ' aufser dem r-fachen Punkte O, d Doppelpunkte und k Spitzen hat,

$$n' = n(n+1) - r^2 - 2d - 3k.$$

Um dieser Relation eine einfachere Form zu geben, beachten wir, dafs die Klasse ν gegeben wird durch

$$\nu = n(n+1) - r(r-1) - 2d - 3k;$$

zieht man die beiden Gleichungen voneinander ab, so bekommt man

$$n' - \nu = 2n - r, \qquad \text{oder} \qquad n' = \nu + 2n - r,$$

und dies ist die gesuchte Formel.

Fünftes Kapitel.

Die Parallelkurven.

261. Behalten wir die in Nr. **252** eingeführten Bezeichnungen bei und erinnern uns der daselbst gemachten Betrachtungen, so werden wir leicht erkennen, dafs die Gleichung

$$y \cos \tau - x \sin \tau - f(\tau) = c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

bei Variation der Konstanten c, ∞^1 Kurven darstellt, die mit der durch

$$y \cos \tau - x \sin \tau - f(\tau) = 0$$

dargestellten Kurve ihre Normalen gemeinsam haben; in entsprechenden Punkten sind daher ihre Tangenten parallel [1]). Wir wollen sie, indem wir die von Leibniz [2]) vorgeschlagene Benennung adoptieren, die Parallelkurven der Kurve Γ nennen [3]). Es ist einleuchtend, dafs jede Parallelkurve von Γ auch als die Enveloppe eines Kreises von konstantem Radius c, dessen Mittelpunkt die Kurve Γ durchläuft, aufgefafst werden kann [4]); die Untersuchung der Parallelkurve ist also ein Spezialfall des Problems der Enveloppen, und kann

1) Vgl. Bertrand, *Calcul différentiel* (Paris 1864) S. 12 und 83.

2) *Generalia de natura linearum, anguloque contactus et osculi provocationibus aliisque cognatis et eorum usibus nonnullis* (Acta erudit. 1692; *Leibniz,* ed. Gerhardt, V, S. 280).

3) Andere ziehen den Namen äquidistante Kurven vor.

4) Daraus kann man folgenden Satz ableiten: „Unterwirft man die Kurve Γ einer Translation, indem man einen ihrer Punkte einen Kreis durchlaufen läfst, so ist die Enveloppe von Γ eine zu dieser parallele Kurve“ (S. Roberts, *On the order and singularities of the parallel of an algebraic curve,* Proc. of the London math. Soc. III, 1869—71). — Ebenfalls kann die Parallelkurve durch den Mittelpunkt eines auf Γ rollenden Kreises beschrieben werden, somit als spezielle Rollkurve aufgefafst werden.

daher durch Differenziation und Elimination gelöst werden. Wenn man jeder Kurve einer Ebene die zu ihr in einem gegebenen Abstande parallele Kurve entsprechen läfst, so erhält man eine besondere Art von Berührungstransformation, die S. Lie Dilatation genannt hat[1]); in ihr entsprechen den Punkten Kreise, den Geraden wiederum Gerade. Die Originalkurve und ihre Parallelkurven haben dieselben Brennpunkte gemeinsam. Ist Γ algebraisch, so sind es auch alle ihre Parallelkurven. Sind n und ν Ordnung und Klasse von Γ, d und δ die Zahl ihrer Doppelpunkte bezw. Doppeltangenten, k und $\varkappa$ die ihrer Spitzen und Wendepunkte, und sind n', ν', d', δ', k', $\varkappa'$ die entsprechenden Zahlen für die Parallelkurve Γ', so sieht man leicht ein, dafs im allgemeinen

$$\nu' = 2\nu, \quad \delta' = 2\delta, \quad \varkappa' = 2\varkappa.$$

Durch Anwendung der Plücker'schen Formeln ergeben sich daraus die Werte für die anderen Charakteristiken, z. B. $n' = 2(n + \nu)$. Diese Zahlen erfahren jedoch Modifikationen, wenn Γ durch die Kreispunkte — sagen wir f-mal — hindurchgeht und die unendlich ferne Gerade — g-mal — berühren[2]); in diesem Falle findet man nämlich

$$n' = 2n + 2\nu - 2f - 2g; \quad \nu' = 2\nu; \quad n' = 2n;$$
$$k' = 6\nu + 2k - 6f - 6g; \quad f' = 2\nu - 2g; \quad g' = 2g.$$

Bemerkenswert ist der Fall $\nu = f + g$, dann werden diese Formeln

$$n' = 2n, \quad \nu' = 2\nu, \quad k' = 2k, \quad \varkappa' = 2\varkappa, \quad f' = 2f, \quad g' = 2g,$$
$$d' = n^2 + 2d, \quad \delta' = \nu^2 + 2\delta,$$

bei deren Untersuchung Cayley zu der Vermutung gelangte, dafs die Kurve Γ' (wie es eintritt, wenn Γ ein Kreis ist) in zwei zerfiele, welche dieselben Charakteristiken hätten wie Γ.

Zwischen den Längen entsprechender Bogen zweier Parallelkurven besteht eine sehr einfache Beziehung, die A. L. Crelle durch Rechnung nachgewiesen hat[3]), die man aber auch durch eine sehr einfache geometrische Überlegung nachweisen kann, die zugleich zu einer Quadraturformel führt, die man demselben Gelehrten verdankt.

Betrachten wir nämlich (Taf. XVI, Fig. 135) zwei aufeinander folgende Punkte M und N der Kurve Γ und die ihnen entsprechenden M', N' der parallelen Kurve Γ'. Die Geraden MM' und NN' sind dann sowohl zu Γ, als auch zu Γ' normal. Setzen wir nun

---

1) *Geometrie der Berührungstransformationen* I. (Leipzig 1896) S. 14.

2) S. die schon citierte Abh. *On evolutes and parallel Curves* (Quart. Journ. XI, 1871; Math. Papers VIII, S. 31), daselbst sind die Parallelkurven auch in einer beliebigen projektiven Mafsbestimmung betrachtet.

3) *Mémoire sur le parallelisme des courbes et surfaces courbes* (Ann. de Gergonne, XII, 1821); vgl. Magnus, *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie der Ebene* (Berlin 1833) S. 539.

$MN = ds$, $M'N' = ds'$, die Fläche $MNN'M' = dA$ und den Winkel, den MM' mit einer festen Geraden bildet, $= v$, so dürfen wir den entsprechenden der Geraden NN' mit $v + dv$ bezeichnen. Ziehen wir nun die Parallele NP zu MM', so ist $\sphericalangle PNN' = dv$; das Viereck $MNPM'$ kann nun als Rechteck angesehen werden, und der Bogen PN' als Kreisbogen mit dem Mittelpunkte N. Ist nun der Abstand der beiden Parallelkurven c, so haben wir

$$PN' = M'N' - MN = ds' - ds = c\,dv, \quad dA = \text{Fläche } MNN'M'$$
$$= \text{Rechteck } MNPM' + \text{Sektor } PNN' = c\,ds + \tfrac{1}{2} c^2 dv;$$

durch Integrieren erhält man nun

$$s' = s + cv + Const.; \quad A = cs + \tfrac{1}{2} c^2 v + Const. \quad . \quad . \quad (2)$$

Dies sind die gesuchten Beziehungen; die erste giebt uns den Bogen der Parallelkurve Γ' als Summe des entsprechenden Bogens von Γ und eines Kreisbogens, die zweite dient zur Bestimmung der Fläche des krummlinigen Vierecks, das von zwei entsprechenden Bogen von Γ und Γ', sowie den gemeinsamen Normalen in den Endpunkten begrenzt ist.

Wenn man die natürliche Gleichung einer Kurve Γ kennt, ist es leicht, die ihrer Parallelkurve Γ' zu finden; da nämlich Γ und Γ' die nämliche Evolute haben, so ergeben sich bei Anwendung von Formel (1) in Nr. **251** folgende Beziehungen

$$R\frac{dR}{ds} = R'\frac{dR'}{ds'}, \qquad R + c = R' + c';$$

setzt man zur Abkürzung $c - c' = a$, so ist $R' = R + a$ und die erste Gleichung wird

$$R\frac{dR}{ds} = (R + a)\frac{dR}{ds}\,\frac{ds}{ds'},$$

oder

$$\frac{ds'}{ds} = 1 + \frac{a}{R};$$

hieraus geht hervor, dafs man als natürliche Darstellung der Kurve Γ' folgendes Gleichungspaar ansehen kann

$$R' = R + a, \qquad s' = s + a\int\frac{ds}{R} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

262. Die Parallelkurve einer Geraden besteht aus einem Geradenpaar parallel zur gegebenen Geraden in gleichem Abstande; die eines Kreises aus einem Paar konzentrischer Kreise. Neue Kurven erhalten wir dagegen in den Parallelkurven der Kegelschnitte. Betrachten wir zunächst die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Da man jede Parallelkurve derselben als Umrifs der Projektion einer Ringfläche (torus) ansehen kann, wenn diese von einem unendlich

fernen Punkte auf eine beliebige Ebene projiziert wird, so ist sie Toroide genannt worden[1]). Um ihre Gleichung zu finden, betrachten wir einen der sie umhüllenden Kreise, der durch die Gleichung

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = c^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

dargestellt sein möge, wo die α und β der Gleichung genügen müssen

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1 \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Die Gleichung der Toroide wird man erhalten, wenn man diese Gleichungen mit den Ableitungen nach α und β von folgender kombiniert

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - c^2 + \lambda\left[\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right] = 0.$$

Da nun diese Ableitungen sind

$$x - \alpha = \frac{\lambda\alpha}{a^2}, \qquad y - \beta = \frac{\lambda\beta}{b^2},$$

so hat man

$$\alpha = \frac{a^2 x}{\lambda + a^2}, \qquad \beta = \frac{b^2 y}{\lambda + b^2}.$$

Setzt man diese Werte in (4) und (5) ein, so erhält man

$$\frac{a^2x^2}{(\lambda+a^2)^2} + \frac{b^2y^2}{(\lambda+b^2)^2} = 1, \qquad \frac{\lambda^2x^2}{(\lambda+a^2)^2} + \frac{\lambda^2y^2}{(\lambda+b^2)^2} = c^2, \quad . \quad . \quad (5')$$

nun ist die Aufsuchung der Toroidengleichung auf die Elimination von λ aus diesen beiden Gleichungen zurückgeführt[2]); ausgeführt ist diese Rechnung von Catalan und Cayley[3]) und ergiebt folgendes Resultat:

$$\begin{aligned}(x^2+y^2-a^2-b^2-c^2)^2(a^2y^2+b^2x^2-a^2c^2-b^2c^2-a^2b^2)^2 \\ +4a^2b^2c^2(x^2+y^2-a^2-b^2-c^2)-27a^4b^4c^4 \\ +18a^2b^2c^2(x^2+y^2-a^2-b^2-c^2)(a^2y^2+b^2x^2-a^2c^2-b^2c^2-a^2b^2) \\ +4(a^2y^2+b^2x^2-a^2c^2-b^2c^2-a^2b^2)^3 = 0 \, . \quad . \quad (6)\end{aligned}$$

Die Toroide ist demnach eine Kurve achter Ordnung, symmetrisch in Bezug auf beide Axen der Ellipse. Sie besteht aus zwei völlig getrennten in sich geschlossenen Zügen, einem äufseren und einem inneren. Der äufsere Zug verläuft immer stetig, bei kleinem c nähert sich seine Gestalt der Ellipse, bei gröfser werdendem c einem

1) E. Catalan, *Sur la toroïde* (Nouv. Ann. III, 1844); dort wird die Entdeckung des Zusammenhanges zwischen dem Kreisringe und der Parallelkurve der Ellipse dem Fleur St. Dénis zugeschrieben, und die Wahl des Namens der betr. Kurve auf diesen Zusammenhang zurückgeführt. — Der Beweis ist leicht; man betrachte den Kreisring als die Parallelfläche eines Kreises K, also als die Enveloppe der Kugeln von gleichem Radius, die ihren Mittelpunkt auf K haben; K projiziert sich als Ellipse, die Kugeln als Kreise. (Anm. d. Übers.)

2) Vgl. Cauchy, *Notes sur divers théorèmes rélatifs à la rectification des courbes et à la rectification des surfaces* (C. R. XVIII, 1841).

3) *Sur la courbe parallèle à l'ellipse* (Ann. di Matem. XIII, 1860).

Kreise. Der innere hat je nach der Gröfse von c ganz verschiedene Gestalt: wenn 1) $c < \frac{b^2}{a}$, so ist er ellipsenähnlich. 2) $c = \frac{b^2}{a}$, ellipsenähnlich mit zwei dreifachen Punkten auf der grofsen Axe, die aber äufserlich nicht erkennbar, sich nur durch eine scharfe Biegung verraten. 3) $b > c > \frac{b^2}{a}$, mit zwei Doppelpunkten auf der grofsen Axe und vier reellen Spitzen. 4) $c = b$, vier Spitzen und ein Berührungsknoten im Mittelpunkte. 5) $a > c > b$, vier reelle Spitzen. 6) $c = a$, vier Spitzen und ein Berührungsknoten, aber mit der kleinen Axe als Doppeltangente. 7) $a < c < \frac{a^2}{b}$, vier Spitzen und zwei Doppelpunkte auf der kleinen Axe. 8) $c = \frac{a^2}{b}$, zwei dreifache Punkte wie im Falle 2) aber auf der kleinen Axe. 9) $c = \frac{a^2}{b}$, die Kurve hat wieder ellipsenähnliche Gestalt, die bei wachsendem c in Kreisform übergeht. In den letzten Fällen, wenn $2a > c > 2b$, wird der Zweig sogar die Ellipse schneiden[1]; wenn $c = 2a$ berührt er sie, und wenn $c > 2a$ liegt der innere Zweig ganz aufserhalb der Ellipse.

Die Gleichung (6) ist so kompliziert, dafs sie wenig geeignet ist, für die Untersuchung der Toroide benutzt zu werden. Besser ist es schon die Gleichungen (5′) nach x und y aufzulösen, wobei man folgende beiden Ausdrücke erhält

$$x = \frac{\lambda + a^2}{\lambda} \sqrt{\frac{\lambda^2 - b^2 c^2}{a^2 - b^2}}, \quad y = \frac{\lambda + b^2}{\lambda} \sqrt{\frac{a^2 c^2 - \lambda^2}{a^2 - b^2}}, \quad \ldots \quad (7)$$

also eine parametrische Darstellung. Auch folgende analytische Darstellung kann man anwenden. Es sei $P_1(x_1, y_1)$ ein Punkt der Ellipse, $P(x, y)$ der entsprechende der Toroide; da die Strecke $P_1 P = c$ und normal zur Ellipse ist, so bestehen folgende Gleichungen:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = c^2, \quad \frac{x - x_1}{b^2 x_1} = \frac{y - y_1}{a^2 y_1},$$

und daher ist

$$x = x_1 \pm \frac{b^2 c x_1}{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}}, \quad y = y_1 \pm \frac{a^2 c y_1}{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}}; \quad \ldots \quad (8)$$

Nehmen wir das $+$Zeichen, so erhalten wir den äufseren Kurventeil, das $-$Zeichen, den inneren. Zu beachten ist noch, dafs die x_1, y_1 durch die Gleichung $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ miteinander verknüpft sind; daher kann man setzen $x_1 = a \cos \omega$, $y_1 = b \sin \omega$, und dann schreiben

1) Dafs sich zwei parallele Kurven schneiden, und dafs die eine Spitzen hat, während die andere kontinuierlich verläuft, erscheint geradezu paradox. Dieser Widerspruch klärt sich dadurch auf, dafs die Parallelkurven ihrer innern Natur nach Tangentengebilde sind; für eine Kurve als Tangentengebilde aber ist eine Spitze keine Singularität, weil ja in einem solchen Punkte die Tangente sich kontinuierlich weiter bewegt. (Anm. d. Übers.)

$$x = a \cos \omega \mp \frac{bc \cos \omega}{\sqrt{a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega}}, \quad y = a \sin \omega \mp \frac{ac \sin \omega}{\sqrt{a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega}}.$$

Aus dieser parametrischen Darstellung kann man ebenfalls entnehmen, dafs die Toroide 8 **Doppelpunkte** hat: vier liegen im Endlichen, zwei auf der x-Axe, zwei auf der y-Axe, von diesen beiden Paaren ist höchstens eins reell; die anderen vier liegen im Unendlichen, zwei fallen mit den unendlich fernen Punkten der Ellipse, zwei mit den Kreispunkten zusammen. Sie hat ferner 12 **Spitzen**: acht von diesen sind immer imaginär, vier können reell sein; sie liegen an den Stellen, wo der Krümmungsradius der Ellipse gleich c ist. Sie hat **keine Wendepunkte** aber **zwei Doppeltangenten**, die nur dann reell sind, wenn die Doppelpunkte imaginär, und zugleich die Spitzen reell sind. Aus dem Obigen folgt dann: **Die Toroide ist von der vierten Klasse und vom Geschlechte Eins.** Dasselbe ergiebt sich, wenn man die Tangentialgleichung der Kurve bestimmt. Hierzu benutzen wir die Gleichungen, die entstehen, wenn man die (5′) nach x, y auflöst; diese liefern dann als Gleichung der Tangente im Punkte (λ)

$$x\sqrt{a^2c^2 - \lambda^2} + y\sqrt{\lambda^2 - b^2c^2} = (\lambda + c^2)\sqrt{a^2 - b^2};$$

daher sind die Koordinaten u und v der Tangente

$$u = \frac{\sqrt{a^2c^2 - \lambda^2}}{(\lambda + c^2)\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad v = \frac{\sqrt{\lambda^2 - b^2c^2}}{(\lambda + c^2)\sqrt{a^2 - b^2}}. \quad . \quad . \quad (9)$$

Durch Elimination von λ ergiebt sich dann

$$[(a^2 - c^2)v^2 + (b^2 - c^2)u^2 - 1]^2 = 4c^2(u^2 + v^2) \quad . \quad . \quad (10)$$

als Tangentialgleichung der Toroide; sie ist bedeutend einfacher als die Punktgleichung[1]). Überhaupt lassen sich die Parallelkurven bequemer vermittelst Linienkoordinaten untersuchen; insbesondere eignen sich für die der Kegelschnitte die bekannten Unverzagt-Schwering'-schen Linienkoordinaten[2]).

Wenden wir auf die Toroide die Crelle'schen Sätze über die Rektifikation und Quadratur der Parallelkurven an, so erkennt man: **Die Differenz zwischen der Länge des äufseren und des inneren Zweiges der Toroide ist gleich $4\pi c$**, wenn $2c$ ihr gegenseitiger Abstand ist; **die von ihnen umschlossene Fläche ist gleich einem Rechteck, dessen Länge gleich dem Umfange der gegebenen Ellipse, dessen Breite gleich $2c$ ist**[3]).

---

1) Weitere Eigenschaften der bezüglichen Kurven findet man in einer Abh. von F. Gomes Teixeira, *Sur les courbes parallèles à l'ellipse* (Belgique Mém. LVIII, 1898).

2) K. Schwering, *Die Parallelkurve der Ellipse als Curve vom Range Eins, unter Anwendung eines neuen Liniencoordinatensystems* (Progr. Brilon, 1878) und *Theorie und Anwendung der Linienkoordinaten* (Leipzig 1884) S. 69.

3) Dienger, *Ueber die Rektification und Quadratur der Toroide* (Archiv Math. IX, 1847).

Wechseln wir in den Formeln (7) und (8) das Vorzeichen, so bekommen wir die analytische Darstellung der Parallelkurve der Hyperbel; die früheren Doppeltangenten werden dann zu Asymptoten der Kurve. Eine ähnliche analytische Darstellung hat die Parallelkurve der Parabel, welche von der sechsten Ordnung und vierten Klasse ist. Die bezüglichen Rechnungen auszuführen, wollen wir dem Leser überlassen.

263. Eine Kurvenfamilie, bei welcher die Untersuchung der Parallelkurven leicht wird, ist die der Epi- bezw. Hypocykloiden[1]). Benutzen wir nämlich die Gleichungen (4_e) aus Nr. **204**, so sehen wir, dafs die Parallelkurve zu der durch diese Gleichungen für den Fall $h = r$ dargestellten Epicykloide, die Enveloppe des Kreises:

$$\left[x - \frac{n+1}{n} r \cos n\psi + r \cos (n+1)\psi\right]^2$$
$$+ \left[y - \frac{n+1}{n} r \sin n\psi + r \sin (n+1)\psi\right]^2 = c^2$$

ist; kombiniert man diese mit ihrer Ableitung nach ψ, so erhält man

$$x = \frac{n+1}{n} r \cos n\psi - r \cos (n+1)\psi \mp c \sin \frac{2n+1}{2} \psi,$$
$$y = \frac{n+1}{n} r \sin n\psi - r \sin (n+1)\psi \pm c \cos \frac{2n+1}{2} \psi,$$

wodurch die fragliche Kurve dargestellt wird. Führen wir komplexe Variabelen ein, so erhalten wir

$$z = \frac{n+1}{n} r e^{ni\psi} - r e^{(n+1)i\psi} - k e^{\frac{2n+1}{2} i\psi}.$$

Erinnern wir uns nun der in Note 2) S. 487 erwähnten Gleichung, so ergiebt sich: **Die Parallelkurven der gemeinen Epi- oder Hypocykloiden sind Cykloiden zweiter Ordnung**[2]).

Ein besonderes Interesse bietet der Fall der vierspitzigen Hypocykloide oder regulären Astroide, der zu einer wichtigen Folgerung führt, zu deren Nachweis wir folgende Bemerkungen vorausschicken.

Zwei beliebige sich schneidende Geraden können immer durch Gleichungen von der Form

$$y = \pm x \operatorname{tg} \alpha$$

dargestellt werden. Es sei ferner

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$$

die Gleichung einer beliebigen Geraden, aus welcher die beiden obigen eine Strecke von der Länge l ausschneiden. Es ergiebt sich dann leicht, dafs

$$p = \frac{l \cos (\varphi + \alpha) \cos (\varphi - \alpha)}{\sin 2\alpha};$$

---

1) S. einen Artikel von Audibert im *Intermédiaire* III, 1896, S. 72—73, wo die Rektifikation dieser Kurven behandelt wird.

2) Vgl. Note 4 auf S. 643, Schlufs.

daher kann die von diesen Geraden eingehüllte schiefe Astroide angesehen werden als definiert durch die Gleichung (vgl. Nr. **251**)

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = \frac{l \cos(\varphi + \alpha)\cos(\varphi - \alpha)}{\sin 2\alpha},$$

oder die äquivalente

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = \frac{l}{2 \sin 2\alpha}\left[\cos 2\varphi + \cos 2\alpha\right]. \quad . \quad . \quad (11)$$

Differenzieren wir diese, so bekommen wir

$$x \sin\varphi - y \cos\varphi = \frac{l}{2 \sin 2\alpha} \sin 2\varphi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

und kombinieren wir sie mit der vorigen

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{l}{2\sin 2\alpha}\left[\frac{3}{2}\cos\varphi - \frac{1}{2}\cos 3\varphi + \cos 2\alpha \cdot \cos\varphi\right] \\ y &= \frac{l}{2\sin 2\alpha}\left[-\frac{3}{2}\sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 3\varphi + \cos 2\alpha \cdot \sin\varphi\right] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (13)$$

Aus dieser parametrischen Darstellung der schiefen Astroide erhält man folgenden Wert für den Differenzialquotienten des Bogens

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{l}{2 \sin 2\alpha}(\cos 2\alpha - 3 \cos 2\varphi),$$

und nach Integration

$$s = \frac{l}{2 \sin 2\alpha}\left(\varphi \cos 2\alpha - \frac{3}{2}\sin 2\varphi\right) + Const. \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Differenzieren wir Gleichung (12) von neuem, so erhalten wir

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = \frac{2l}{2 \sin 2\alpha} \cos 2\varphi;$$

daher wird der Krümmungsradius der schiefen Astroide gegeben durch

$$R = \frac{l}{2 \sin 2\alpha}(\cos 2\alpha - 3\cos 2\varphi). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Setzen wir nun $2\varphi = \omega + \frac{\pi}{4}$ und wählen den Anfang und den positiven Sinn in geeigneter Weise, so können die Gleichungen (14) und (15) ersetzt werden durch

$$R = \frac{l}{2 \sin 2\alpha}(3 \sin\omega + \cos 2\alpha), \quad s = \frac{l}{4 \sin 2\alpha}(3\cos\omega - \omega\cos 2\alpha). \quad (16)$$

Da nun diese R und s in Funktionen der unabhängigen Variabelen ω geben, so ist das System derselben äquivalent mit der natürlichen Gleichung der schiefen Astroide (welche man eben durch Elimination von ω aus (16) erhalten würde). Beachten wir nun, dafs die Gleichungen (16) von folgender Form sind:

$$R = k \sin\omega + a, \qquad s = \frac{1}{2}(k \cos\omega - a\omega), \quad . \quad . \quad (17)$$

so entsteht die Frage, ob diese Gleichungen vom Typus (17) immer eine Astroide darstellen. Um diese zu beantworten, beachten wir, dafs die Gleichungen (17) sich mit (16) identifizieren, wenn man setzt

$$k = \frac{3l}{2 \sin 2\alpha}, \qquad a = \frac{l}{2 \operatorname{tg} 2\alpha};$$

hieraus ergiebt sich

$$\cos 2\alpha = \frac{3\alpha}{k}, \qquad l = \frac{2\sqrt{k^2 - 3a^2}}{3},$$

und diese Gleichungen liefern für α und l nur dann reelle Werte, wenn

$$|k| > 3|a|. \qquad (18)$$

Wir können daher schliefsen: **Die Gleichungen (17) stellen nur dann eine Astroide dar, wenn die Konstanten a und k der Bedingung (18) genügen.** Wenn dies nicht zutrifft, so stellen die Gleichungen (17) eine Kurve dar, die nicht mehr in reeller Weise ebenso wie die Astroide in Nr. **103** erzeugt werden kann; sie soll als Parastroide bezeichnet werden[1]), und kann auf reelle Weise durch ein Verfahren konstruiert werden, das wir jetzt darlegen wollen. — Betrachten wir die reguläre durch folgende Gleichungen dargestellte Astroide (s. die Gl. (16), in welchen $2\alpha = \pi$ zu setzen ist)

$$R = \frac{3l}{2} \sin \omega, \qquad s = \frac{3l}{4} \cos \omega,$$

und benutzen die Formel (2), so erhalten wir für die Parallelkurve derselben

$$R = \frac{3l}{2} \sin \omega + a, \quad s = \frac{3l}{4} \cos \omega - \frac{a}{2}. \qquad (19)$$

Folglich: **Die Parallelkurve einer regulären Astroide ist im allgemeinen eine Parastroide.** Aus der Gleichung (18) ersieht man, dafs sie nur dann eine Astroide ist, wenn

$$|a| < \frac{l}{2}.$$

Somit ergiebt sich die Notwendigkeit, die Tragweite eines von Salmon dargelegten Satzes[2]) einzuschränken, wie aus der aufmerksamen Prüfung der angewandten Begründung hervorgeht. Überdies verlangen die auf S. 645 aufgestellten Formeln, dafs die fragliche Kurve von der 12ten Ordnung sei; nun zeigt uns die geometrische Überlegung oder eine Zeichnung leicht, dafs die Parallelkurve der regulären Astroide aus zwei kongruenten Kurven besteht; jede von diesen gehört teils dem äufseren, teils dem inneren Zweige an, wie es Taf. XVI, Fig. 136 zeigt.

---

1) G. Loria, *Les courbes parallèles aux astéroïdes sont elles toujours des astéroïdes?* (Mathésis, 2e Ser. X, 1900); vgl. die darauf folgende *Note sur l'astroïde et ses courbes parallèles* von J. Neuberg, wo auf ältere Arbeiten von Mannheim und d'Ocagne über dasselbe Thema hingewiesen wird.

2) Salmon-Fiedler, *Höhere ebene Curven,* II. Aufl. (Leipzig 1882) S. 129.

Sechstes Kapitel.

Die Radialen[1]).

264. Nach dem Vorschlage von R. Tucker[2]) bezeichnet man mit dem Namen Radiale einer ebenen Kurve Γ den Ort Γ_0 der Endpunkte der von einem festen Punkte O ausgehenden und mit den Krümmungsradien der Kurve Γ äquipollenten (d. h. gleichen und gleichgerichteten) Strecken. Aus dieser Definition ergiebt sich 1) dafs die Radiale für eine Kurve eine ähnliche Bedeutung hat wie der Hodograph für eine Bewegung[3]); so wie dieser eine graphische Darstellung der Änderungen der Geschwindigkeit liefert, so giebt diese ein Bild davon, wie sich die Krümmung der Kurve ändert; 2) dafs, wenn man den festen Punkt O verlegt, die Radiale ihre Gröfse und Lage beibehält, also nur eine Verschiebung in der Ebene erleidet.

Es sei nun

$$f(x, y) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

die auf ein gewöhnliches kartesisches System bezogene Gleichung der beliebigen Kurve Γ. Wir nehmen an, dafs die Funktion f partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung besitze, und bezeichnen diese bezw. mit $f_1, f_2, f_{11}, f_{12} = f_{21}$ und f_{22}. Aus bekannten Formeln (s. Nr. **251**) ergiebt sich dann, dafs die Projektionen der Strecke zwischen dem Punkte $P(x, y)$ von Γ und dem entsprechenden Krümmungscentrum $C(x_1, y_1)$, also die Gröfsen $x_1 - x$ und $y_1 - y$ die Produkte sind aus f_1 bezw. f_2 und dem Quotienten

$$(f_1^2 + f_2^2) : \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_2 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Sind nun α, β die Koordinaten des festen Punktes O, und x_0, y_0 die des Punktes P_0 auf Γ_0, welcher dem Punkte $P(x, y)$ auf Γ entspricht, so ist offenbar

$$x_0 - \alpha = x_1 - x, \qquad y_0 - \beta = y_1 - y,$$

und daher zufolge der vorigen Gleichung:

$$x_0 = \alpha + (f_1^2 + f_2^2) : \Delta, \qquad y_0 = \beta + (f_1^2 + f_2^2) : \Delta, \quad . \quad (3)$$

wenn wir die in (2) vorkommende Determinante der Einfachheit halber

---

1) G. Loria, *Intorno alle radiali delle curve piane* (Rendic. del Circ. matem. di Palermo, XVI, 1902); *La radiale di una curva algebrica* (Perodico di matem. XVII, 1901).

2) *On radial curves* (Proc. of the Lond. Math. Soc. I, 1865).

3) Hamilton, *Elements of Quaternions* (London 1866) S. 100.

mit Δ bezeichnen. Für jedes Wertepaar x, y, welches der Gl. (1) genügt, liefern uns diese Gleichungen die Koordinaten des entsprechenden Punktes der Radialen, man würde also durch Elimination von x und y aus den drei Gleichungen (1) und (3) zur Gleichungen der Radialen gelangen. Diese Elimination ist nicht im allgemeinen ausführbar, aber auch ohne sie auszuführen kann man den Grad der resultierenden Gleichung, d. i. die Ordnung der Radiale bestimmen für den Fall, dafs f eine rationale algebraische Funktion vom n^{ten} Grade ist. Betrachten wir nämlich eine beliebige Gerade g in der Ebene, deren Gleichung

$$Ax + By + C = 0$$

sein möge. Wenn g den Punkt P_0 enthält, dessen Koordinaten durch (3) gegeben sind, so hat man

$$(A\alpha + B\beta + C)\Delta + (Af_1 + Bf_2)(f_1^2 + f_2^2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Dies ist aber die Gleichung einer Kurve, im allgemeinen von der Ordnung $3(n-1)$, die die gegebene also in $3n(n-1)$ Punkten schneidet, in der Weise, dafs die entsprechenden Punkte der Radiale zugleich auf die Gerade g fallen. Dies berechtigt uns zu dem Schlusse: **Die Radiale einer algebraischen Kurve n^{ter} Ordnung ist im allgemeinen von der Ordnung $3n(n-1)$.** Beispiele: Die Radiale eines Kegelschnittes ist im allgemeinen eine Kurve sechster Ordnung, welches Resultat schon von Tucker gefunden wurde (vgl. Nr. **102**); die einer Kurve dritter Ordnung ist von der Ordnung 18.

Die gefundene Ordnungszahl $3n(n-1)$ erfährt jedoch beträchtliche Änderungen, wenn die Originalkurve vielfache Punkte enthält. Nehmen wir nämlich an, dafs diese im Anfange einen p-fachen Punkt habe, so kann man schreiben

$$f(x, y) = f^{(p)} + f^{(p+1)} + \cdots + f^{(n)},$$

wo $p > 1$ und $f^{(k)}$ $(k = p,\ p+1, \ldots, n)$ eine binäre Form vom Grade p in x, y ist; $f^{(p)} = 0$ stellt dann die Gruppe der p Tangenten im Anfangspunkte dar. Setzen wir nun diesen Wert von f in die Gleichungen (3) ein und ordnen nach fallenden Potenzen von x, y, so erkennen wir, dafs die Gruppe der Glieder niedrigsten Grades gegeben wird durch

$$(A\alpha + B\beta + C) \cdot \begin{vmatrix} f_{11}^{(p)} & f_{12}^{(p)} & f_1^{(p)} \\ f_{12}^{(p)} & f_{22}^{(p)} & f_2^{(p)} \\ f_1^{(p)} & f_2^{(p)} & 0 \end{vmatrix}.$$

Wenden wir jetzt den Euler'schen Satz über die homogenen Funktionen an und führen an der obigen Determinante einige übliche Transformationen aus, so kann dieser Ausdruck nach und nach in folgenden umgewandelt werden

$$\frac{A\alpha+B\beta+C}{p-1}\begin{vmatrix} f_{11}^{(p)} & f_{12}^{(p)} & xf_{11}^{(p)}+yf_{12}^{(p)} \\ f_{21}^{(p)} & f_{22}^{(p)} & xf_{12}^{(p)}+yf_{22}^{(p)} \\ f_{1}^{(p)} & f_{2}^{(p)} & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{A\alpha+B\beta+C}{p-1}\begin{vmatrix} f_{11}^{(p)} & f_{12}^{(p)} & 0 \\ f_{21}^{(p)} & f_{22}^{(p)} & 0 \\ f_{1}^{(p)} & f_{2}^{(p)} & -(xf_{1}^{(p)}+yf_{2}^{(p)}) \end{vmatrix}$$

$$=-\frac{p}{p-1}(A\alpha+B\beta+C)f^{(p)}\begin{vmatrix} f_{11}^{(p)} & f_{12}^{(p)} \\ f_{21}^{(p)} & f_{22}^{(p)} \end{vmatrix}.$$

Aus diesem Ausdrucke geht hervor, dafs der Anfangspunkt für die durch Gleichung (4) dargestellte Hilfskurve ein Punkt von der Vielfachheit $p+2(p-2)=3p-4$ ist, und dafs die Tangenten dort an diese Kurve insgesamt bilden 1) die p Tangenten an die gegebene Kurve Γ; 2) die Hesse'sche der von diesen gebildeten Gruppe. In dem allgemeinen Falle, dafs alle Tangenten an Γ im Anfangspunkte getrennt sind, sind in diesem Punkte $p(3p-4)+p=3p(p-1)$ Schnitte der Hilfskurve mit Γ vereint, daher: **Jeder p-fache Punkt der Originalkurve mit lauter getrennten Tangenten verursacht bei der Ordnung der Radiale eine Verminderung von $3p(p-1)$ Einheiten.** Um auch in dem Falle, dafs von den Tangenten mehrere zusammenfallen, den Einflufs zu bestimmen, ist dieselbe Methode anzuwenden, die das Verhalten der Hesse'schen in einem vielfachen Punkte der Fundamentalkurve aufdeckt, und es ist zu beachten: 1) dafs ein s-faches Element ($s<p$) einer Gruppe von p Elementen einer Form I. Species ein $2(p-1)$-faches für die Hesse'sche der Gruppe ist; 2) dafs die Hesse'sche einer Gruppe von p zusammenfallenden Elementen unbestimmt ist.

Wenden wir das Vorige auf den Fall $p=2$ an, so bekommen wir: **Jeder Doppelpunkt mit getrennten Tangenten bewirkt bei der Ordnung der Radiale eine Verminderung um sechs Einheiten**[1]. Hat

---

1) Eine Bestätigung dieses Resultats ist folgende: Man denke sich eine Kurve Γ, die aus ν Kurven $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_\nu$ besteht, deren Ordnungen bezw. n_1, $n_2, \ldots n_\nu$ seien und keine vielfachen Punkte haben. Γ ist dann als Kurve von der Ordnung $n=n_1+n_2+\cdots+n_\nu$ mit $\Sigma n_i\cdot n_k$ Doppelpunkten ($i, k=1, 2, \ldots, \nu$); zufolge des obigen Satzes mufs dann die Radiale von Γ von der Ordnung sein

$$3(n_1+n_2+\cdots+n_\nu)(n_1+n_2+\cdots+n_\nu-1)-6\Sigma n_in_k$$
$$=3(n_1+n_2+\cdots n_\nu)^2-3(n_1+n_2+\cdots+n_\nu)-6\Sigma n_in_k$$
$$=3(n_1{}^2+n_2{}^2+\cdots+n_\nu^2)-3(n_1+n_2+\cdots n_\nu)=\Sigma 3n_i(n_i-1)$$

aber die Originalkurve im Anfangspunkte eine Spitze, mit der x-Axe als Spitzentangente, so sieht man leicht ein, dafs die Hilfskurve (4) ebendaselbst einen dreifachen Punkt hat, in welchem zwei Tangenten mit der Spitzentangente zusammenfallen; daraus ergiebt sich eine Verminderung der Ordnung um 8 Einheiten. Hat nun die Originalkurve d Doppelpunkte und k Spitzen, so erhält man für die Ordnung n_r der Radiale

$$n_r = 3n(n-1) - 6d - 8k$$

Nun ist bekanntlich die Zahl der Wendepunkte w einer Kurve n^{ter} Ordnung

$$w = 3n(n-2) - 6d - 8k,$$

folglich ist $\quad n_r - w = 3n, \quad$ oder $\quad n_r = 3n + w.$

Das heifst: **Die Ordnung der Radiale einer algebraischen Kurve ist im allgemeinen gleich der dreifachen Ordnung, vermehrt um die Zahl der Wendepunkte dieser Kurve.** Erinnern wir uns noch des in Nr. **251** gefundenen Satzes, so können wir auch sagen: **Die Radiale einer algebraischen Kurve ist von derselben Ordnung wie die Evolute.**

Ist die Kurve Γ rational und hat die gewöhnlichen singulären Punkte von der Vielfachheit $p_1, p_2, p_3 \ldots$, so ist

$$\sum_i \frac{p_i(p_i-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Die Ordnung der Radiale Γ_0 wird also sein

$$\begin{aligned} 2n(n-1) - \sum_i 3p_i(p_i-1) &= 3n(n-1) - 3(n-1)(n-2) \\ &= 6(n-1); \end{aligned}$$

folglich: **Die Radiale einer rationalen Kurve n^{ter} Ordnung ist im allgemeinen von der Ordnung $6(n-1)$**[1]. Diese Zahl erfährt aber Abänderungen, wenn die Kurve mit der unendlich fernen Geraden besondere Beziehungen hat; um dies an einem Beispiele zu zeigen, betrachten wir die durch

$$x = \xi(\tau), \qquad y = \eta(\tau) \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

dargestellte Kurve, wo ξ und η ganze Polynome n^{ten} Grades sind; diese Kurve hat ihre sämtlichen Schnitte mit der unendlich fernen Geraden in einem Punkte vereinigt, und ist allgemeiner als die Parabeln höherer Ordnung. Als parametrische Darstellung der entsprechenden Radiale findet man leicht

$$x = \frac{\eta'(\xi'^2 + \eta'^2)}{\xi'\eta'' - \xi''\eta'}, \qquad y = \frac{\xi'(\xi'^2 + \eta'^2)}{\xi'\eta'' - \xi''\eta'};$$

die Radiale ist also eine rationale Kurve von der Ordnung $3(n-1)$; für $n = 2$ erhalten wir: **Die Radiale einer gewöhnlichen Parabel ist eine Kurve dritter Ordnung.**

---

und dies Resultat mufste eintreten, da die Radiale von Γ nichts anderes ist als die Gesamtheit der Radialen von $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\nu$.

1) Vgl. das Beispiel der Kegelschnitte S. 221.

Schliefslich möge noch hervorgehoben werden, was sich aus der Definition der Radiale leicht ergiebt: **Den Wendepunkten und den unendlich fernen Punkten der Originalkurve entsprechen die unendlich fernen Punkte der Radiale**; auch analytisch läfst sich dies mit Hilfe der Gl. (3) nachweisen.

265. Aus den obigen Entwicklungen ersieht man schon, dafs die Untersuchung der Radiale einer durch eine kartesische Gleichung gegebenen Kurve — selbst wenn man sich auf algebraische Kurven beschränken wollte — mühsame Forschungen erheischt, und dafs die Bestimmung ihrer Gleichung im allgemeinen unausführbare Eliminationen erfordert, oder in den günstigeren Fällen sehr mühevolle. Es dürfte sich daher folgende Bemerkung als nützlich erweisen: **Im allgemeinen ist es möglich, durch eine begrenzte Anzahl wohl bestimmter Operationen die Gleichung der Radialen einer Kurve in Polarkoordinaten zu finden, wenn man deren natürliche Gleichung kennt.** Es sei diese, wenn wie sonst s den Bogen, R den Krümmungsradius bedeutet,

$$s = \varphi(R) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Ist nun θ der Winkel der Normalen im Punkte P der gegebenen Kurve (also die Gerade, auf welcher der Krümmungsradius in P liegt) mit einer festen Geraden, z. B. der x-Axe, so hat man

$$R = \frac{ds}{d\theta}, \quad \text{oder} \quad ds = R \cdot d\theta.$$

Aus der Gleichung (6) folgt nun

$$ds = \varphi'(R) \cdot dR,$$

daher

$$R \cdot d\theta = \varphi'(R) \cdot dR,$$

bezw.

$$\theta = \int \frac{\varphi'(R) \cdot dR}{R}.$$

Bezeichnen wir nun mit ϱ, ω die Polarkoordinaten des dem Punkte P entsprechenden Punktes P_0 der Radialen, und kommen überein, als Pol immer den gemeinsamen Ausgangspunkt der die Radiale erzeugenden Strecken zu nehmen, so wird offenbar $\varrho = R$ sein und $\omega = \theta$; deswegen ist die Polargleichung dieser

$$\omega = \int \frac{\varphi'(\varrho) \cdot d\varrho}{\varrho}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

wobei zu beachten ist, dafs die Integrationskonstante nur Einflufs auf die Lage der dargestellten Kurve hat.

Für den Krümmungsradius R_0 der Radiale ergiebt sich leicht eine Formel aus dem Ausdrucke desselben in Polarkoordinaten

$$R_0 = \frac{\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 + 2\left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2 - \varrho\frac{d^2\varrho}{d\omega^2}}.$$

Da nämlich für die Radiale $\varrho = R$, $\omega = \theta$, so hat man, wenn wie gewöhnlich R_1 und R_2 die Krümmungsradien der ersten und zweiten Evolute sind,

$$\frac{d\varrho}{d\omega} = \frac{dR}{d\theta} = R_1 \quad \text{und} \quad \frac{d^2\varrho}{d\omega^2} = \frac{d^2R}{d\theta^2} = R_2;$$

daraus folgt

$$R_0 = \frac{(R^2 + R_1{}^2)^{\frac{3}{2}}}{R^2 + 2R_1{}^2 - 2RR_2} \text{ [1]}.$$

Wenden wir obiges Rechnungsverfahren auf spezielle ebene Kurven an, so erhalten wir Sätze, die uns Beziehungen zwischen Kurven ganz verschiedener Natur enthüllen: die hervorstechendsten Resultate, zu denen man auf diese Weise gelangt, mögen hier Platz finden.

I. Wir betrachten eine beliebige Epicykloide, etwa die durch die Gleichung

$$\frac{s^2}{a^2} + \frac{R^2}{b^2} = 1 \quad \text{. . . . . (8)}$$

dargestellte. Dann ist

$$s = a\sqrt{1 - \frac{R^2}{b^2}}.$$

Differenzieren wir und setzen dann an Stelle von ds seinen Wert $R \cdot d\theta$, so haben wir

$$\frac{b}{a}d\theta = -\frac{d\frac{R}{b}}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{b^2}}},$$

folglich ist die Polargleichung der Radialen

$$\frac{b\omega}{a} = \arccos\frac{\varrho}{b},$$

oder

$$\varrho = b \cdot \cos\frac{b\omega}{a}. \quad \text{. . . . . (9)}$$

Da nun diese (vgl. Nr. **133**) immer eine Rhodonee darstellt, so gewinnen wir als Resultat: **Die Radiale einer beliebigen Epicykloide ist eine Rhodonee.** Ist das Verhältnis $\frac{b}{a}$ rational, so sind die beiden Kurven algebraisch; die zweite ist von der Ordnung $a + b$, wenn a und b beide ungerade sind, andernfalls von der Ordnung $2(a+b)$ (s. S. 302). Z. B. die Radialen einer Kardioide, einer dreispitzigen Hypocykloide und einer regulären Astroide (Kurven von der Ordnung 4, 4, 6) haben bezw. Polargleichungen von folgendem Typus

$$\varrho = b\cos\frac{\omega}{3}, \quad \varrho = b\cos 3\omega, \quad \varrho = b\cos 2\omega$$

und sind von der Ordnung bezw. 4, 4, 6.

---

1) Dem Verf. briefl. mitgeteilt von Prof. E. Cesàro. Vgl. auch Sucharda, *Construction de la normale et du centre de courbure de la radiale d'une courbe plane quelconque* (Bull. international de l'Ac. des Sciences, IV, Prag 1897).

II. Wir betrachten mit E. Cesàro[1]) die Kurven mit folgender natürlichen Gleichung

$$s = \int \frac{\lambda \cdot dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{a}\right)^{\mu} - 1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Bei Anwendung des dargelegten Verfahrens erhält man

$$d\theta = \frac{\lambda \cdot dR}{R\sqrt{\left(\frac{R}{a}\right)^{\mu} - 1}}.$$

Nun ist die linke Seite ein binomisches Differenzial, das immer integrierbar ist; setzt man nämlich

$$\left(\frac{R}{a}\right)^{\mu} - 1 = y^2,$$

so findet man

$$d\theta = \frac{2\lambda}{\mu} \cdot \frac{dy}{y^2 + 1},$$

daher

$$\theta = \frac{2\lambda}{\mu} \operatorname{arc\,tg} y,$$

wenn man die Integrationskonstante gleich Null setzt. Setzt man für y seinen Wert wieder ein, so ergiebt sich, dafs

$$\varrho = \frac{a}{\cos^{\frac{2}{\mu}} \frac{\mu\omega}{2\lambda}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

die Polargleichung der gesuchten Radiale ist. — Die durch diese Gleichung dargestellten Kurven sind (so weit uns bekannt) in ihrer Allgemeinheit noch nicht untersucht worden; wenn man jedoch den Konstanten λ und μ spezielle Werte zuerteilt, so können sowohl die Gleichungen (10) als auch (11) schon bekannte Kurven darstellen, von denen wir die hauptsächlichsten anführen wollen.

a) $\mu = -2,\ \lambda = 1$; Gleichung (10) stellt dann eine Cykloide dar, (11) wird zu $\varrho = a \cos \omega$; folglich: **Die Radiale einer Cykloide ist ein Kreis,** bei welchem der feste Punkt, von dem die den Krümmungsradien äquipollenten Strecken ausgehen, auf der Peripherie liegt.

b) $\mu = 1,\ \lambda = \frac{1}{2}$; alsdann gehört (10) einer Kettenlinie an, und (11) wird zu $\varrho = \frac{a}{\cos^2 \omega}$; vergleichen wir dies mit Gleichung (8) auf S. 319, so schliefsen wir: **Die Radiale einer Kettenlinie ist die Kampyla des Eudoxus.**

c) $\mu = 2,\ \lambda = 1$; (10) stellt dann eine Kettenlinie gleichen Widerstandes dar (vgl. Nr. **235**), während (11) übergeht in $\varrho = \frac{a}{\cos \omega}$, d. h. $x = a$. **Die Kettenlinie gleichen Widerstandes hat als Radiale die Gerade.**

---

1) *Sur une classe de courbes planes remarquables* (Nouv. Ann. 3e Ser. XIX, 1900).

d) $\mu = \frac{2}{3}$, $\lambda = \frac{1}{3}$; dann stellt (10) eine Parabel, (11) die Kurve $\varrho = \frac{a}{\cos^2 \omega}$ dar, welches eine Multiplikatrix ist (vgl. S. 318).

e) $\mu = \frac{4}{3}$, $\lambda = \frac{1}{3}$; (10) giebt eine gleichseitige Hyperbel, (11) giebt mit einer leichten Veränderung

$$\varrho^2 \cos^3 2\omega = a^2;$$

beim Übergang zu kartesischen Koordinaten wird diese

$$(x^2 - y^2)^3 = a^2(x^2 + y^2)^2,$$

sie gehört offenbar dem Typus der in Nr. **102** betrachteten Kurven an.

III. Die Originalkurve sei die durch folgende natürliche Gleichung definierte Traktrix

$$R = a\sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Schreiben wir diese, wie folgt

$$\frac{2s}{a} = \log\left(1 + \frac{R^2}{a^2}\right),$$

so erhalten wir daraus

$$d\theta = \frac{d\frac{dR}{a}}{1 + \frac{R^2}{a^2}};$$

Hieraus ergiebt sich dann, dafs

$$\varrho = a \cdot \operatorname{tg} \omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

die Gleichung der zugehörigen Radiale sein mufs; diese stellt nun, wie uns Nr. **85** lehrt, eine Kappa-Kurve dar, wir erhalten also als Resultat: **Die Radiale einer Traktrix ist die Kappa-Kurve**[1]).

IV. Die Gleichung $\quad y^{m+n} = p^m x^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$

stellt, wenn das Verhältnis der beiden positiven Zahlen m, n rational ist, eine Parabel höherer Ordnung dar (Nr. **115**), wenn es aber irrational ist, eine Kurve **W** von Klein und Lie (Nr. **225**). Im ersteren Falle kann man m und n immer als ganz und relativ prim annehmen; in jedem Falle aber kann (14) durch folgende beiden ersetzt werden,

$$x = p\lambda^{m+n}, \qquad y = p\lambda^n;$$

wo λ ein beliebiger Parameter ist; daraus folgt nun

$$\frac{ds}{d\lambda} = p\lambda^{n-1}[(m+n)^2\lambda^{2m} + n^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$R = \frac{p\lambda^{n-1}[(m+n)^2\lambda^{2m} + n^2]^{\frac{3}{2}}}{mn(m+n)};$$

---

1) Die Rechnung kann mit geringen Abänderungen auch für die Pseudo-Traktrix angewendet werden.

zufolge der allgemeinen Relation $ds = R \cdot d\theta$ wird diese Gleichung nach einigen Reduktionen zu

$$\frac{d\theta}{mn(m+n)} = \frac{\lambda^{m-1} \cdot d\lambda}{(m+n)^2 \lambda^{2m} + n^2}.$$

Setzen wir hierin

$$\mu = \frac{m+n}{n} \lambda^m,$$

so ergiebt sich

$$d\theta = \frac{d\mu}{1+\mu^2},$$

und daher

$$\theta = \text{arc tg}\, \mu$$

oder

$$\frac{m+n}{n} \lambda^m = \text{tg}\, \theta.$$

Eliminieren wir mit Hilfe dieser Beziehung den Parameter λ aus dem Werte für R, ersetzen R durch ϱ, θ durch ω, so folgt

$$\varrho = \frac{pn^2}{m(m+n)} \frac{\left(\frac{n}{m+n} \text{tg}\, \theta\right)^{\frac{n-m}{m}}}{\cos^3 \theta} \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

als Polargleichung der Radiale der betrachteten Kurven. Die entsprechende kartesische Gleichung ist

$$\frac{x^{3m}}{(x^2+y^2)^m} = \left[\frac{pn^2}{m(m+n)}\right]^m \left(\frac{n}{m+n}\right)^{n-m}$$

Wenn das Verhältnis $m:n$ rational ist, so stellt diese Gleichung eine Kurve von der Ordnung $2m+n$ dar, wenn $n > m$; wenn hingegen $n < m$, so läfst sich die ganze Gleichung durch x^{m-n} dividieren, und wird nach Abscheidung dieses Faktors vom Grade $3m$; folglich: **Die Radiale der Parabel $y^{m+n} = p^m x^n$ ist eine Kurve, deren Ordnung gleich der gröfseren der beiden Zahlen $2m+n$ und $3m$ ist.** Z. B. für die gewöhnliche Parabel ist die Radiale von der dritten (s. o.), für die semikubische ($y^3 = px^3$) von der vierten, für die kubische ($y^3 = p^2 x$) von der sechsten Ordnung.

V. Führen wir eine ähnliche Rechnung wie die obige für die Kurve

$$x^m y^m = a^{m+n} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

aus, so bekommen wir die Polargleichung der Radialen als

$$\varrho = \frac{a}{n(m+n)} \frac{m}{\left(\frac{m}{n} \text{tg}\, \omega\right)^{\frac{2m+n}{m+n}} \cdot \cos^3 \omega} \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

Aus dieser ergiebt sich, dafs, wenn m, n ganze, relativ prime Zahlen sind, diese Kurve algebraisch und von der Ordnung $3(m+n)$ ist. **Die Radiale der durch $x^m y^n = a^{m+n}$ dargestellten Hyperbel ist eine Kurve von der Ordnung $3(m+n)$.**

VI. Ähnliche andere Sätze würde man erhalten, wenn man die dargelegten allgemeinen Betrachtungen auf die Kurven anwendet, bei denen der Bogen proportional einer Potenz des Krümmungsradius ist; es ist leicht einzusehen, daſs ihre Radialen Spiralen höheren Grades sind[1]).

266. Das obige Verfahren zur Auffindung der Radiale einer Kurve, deren natürliche Gleichung man kennt, läſst sich umkehren und führt zu dem umgekehrten Probleme der Radialen, nämlich die Aufsuchung derjenigen Kurven — Antiradialen wollen wir sie nennen — die eine vorher bestimmte Kurve als Radiale haben. Ist nämlich eine Kurve gegeben, die in Polarkoordinaten dargestellt wird durch

$$\omega = f(\varrho), \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

so erhält man, wenn man $\omega = \theta$, $\varrho = R$ setzt und differenziert

$$d\theta = f'(R) \cdot dR.$$

Multipliziert man mit R und beachtet, daſs $R \cdot d\theta = ds$, so ergiebt sich schlieſslich

$$s = \int R \cdot f'(R) \cdot dR, \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

und dies ist die natürliche Gleichung der Antiradialen der Kurve (18).

Suchen wir z. B. die Antiradiale einer beliebigen Geraden

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0;$$

wir transformieren diese Gleichung, führen Polarkoordinaten ein, und bekommen

$$\omega = \alpha + \operatorname{arc\,cos} \frac{p}{\varrho}.$$

Da nun hier $f(\varrho) = \alpha + \operatorname{arc\,cos} \frac{p}{\varrho}$, so liefert uns die Gleichung (19)

$$s = \int \frac{p \cdot dR}{\sqrt{R^2 - p^2}},$$

daher ist

$$\frac{s}{p} = \frac{1}{2} \log \frac{R + \sqrt{R^2 - p^2}}{R - \sqrt{R^2 - p^2}},$$

oder auch

$$R = \frac{e^{\frac{1}{p}} + e^{-\frac{1}{p}}}{2};$$

vergleichen wir das Resultat mit der Gleichung (21) in Nr. **236**, so ergiebt sich: **Die Antiradiale einer beliebigen Geraden ist eine Kettenlinie gleichen Widerstandes.**

---

1) Eine Bemerkung von G. Pirondini. — Andere Beispiele von Radialen findet man in dem neuen Aufsatze von F. P. Ruffini, *Intorno alle radiale della linea generata dal fuoco di una conica la quale rotoli sopra una retta* (Bologna Rend. 1901—1902).

Siebentes Kapitel.

Die Brennlinien[1]).

267. In einer Ebene sei ein einfach unendliches System $\mathfrak{S}$ von leuchtenden Strahlen gegeben, die ein bestimmtes Gesetz befolgen; wir können sie entweder als parallel, oder in einen Punkt zusammenlaufend, oder allgemeiner als eine gegebene Linie **A** berührend, oder als zu einer anderen **A**′ (der Evolvente von **A**) senkrecht stehend annehmen. Es sei dann in derselben Ebene eine Kurve Γ gegeben, die entweder als spiegelnd oder Grenze eines lichtbrechenden Mediums angesehen werde. Dann verwandeln sich die Strahlen des Systems $\mathfrak{S}$ in die eines anderen $\mathfrak{S}'$, die dann ihrerseits eine andere Kurve **B** tangieren bezw. zu einer anderen **B**′ (der Evolvente von **B**) normal sind. **B** heifst dann die Brennlinie (Kaustika) von Γ und genauer — um eine übliche, von Johann Bernoulli[2]) vorgeschlagene Benennung zu benutzen — die Katakaustika, wenn Γ spiegelnd, Diakaustika, wenn Γ als brechende Kurve gedacht wird[3]). Der

---

1) Ausführliche bibliographische Notizen über diese Kurven finden sich in der *Dissertatio mathematica de invenienda aequatione causticarum* (Lugd. Batav. 1837) von C. J. Matthes; aufserdem in einigen Artikeln als Beantwortung einer von A. Cornu im *Intermédiaire* gestellten Frage (II, 1895, S. 208 u. 321; VI, 1899, S. 101).

2) S. die Abh. *Lineae cycloidales, evolutae, antevolutae, causticae, anticausticae, pericausticae* (Acta erud. Mai 1692; *Joh. Bernoulli Opera* I, S. 491—802).

3) Aufser diesen Kurven hat Bernoulli noch zwei andere Kurven betrachtet, deren Definition folgende ist: „Wenn alle Strahlen eines Systems $\mathfrak{S}$ durch einen Punkt F gehen, und es ist FM einer derselben, MP der von der Kurve Γ reflektierte Strahl, wobei M der Einfallspunkt und P der Berührungspunkt mit der Kaustika ist; ist ferner P_1 der zu P symmetrische Punkt auf dem austretenden Strahle, und P_2 der Punkt der Einfallsstrahles, der von M denselben Abstand hat, wie P, so heifst der Ort der Punkte P_1 die Antikaustika, der von P_2 die Perikaustika von Γ." Heutzutage giebt man jedoch den Namen Antikaustika einer Kurve, deren die Kaustika die gegebene Kurve ist in Bezug auf ein gegebenes Strahlensystem (s. z. B. Laguerre, *Sur les anticaustiques par réflexion de la parabole les rayons incidents étant parallèles,* Nouv. Ann. 3e Sér. II, 1883). Diese Bemerkung steht in Zusammenhang mit der anderen, dafs man jede beliebige Kurve (ausgenommen die Gerade) ansehen kann als durch Reflexion oder Refraktion aus einer anderen geeignet gewählten entstanden; die Aufsuchung der letzteren bildet das „inverse Problem der Kaustiken": diesem ist eine Abhandlung gewidmet von G. W. Strauch, *Das umgekehrte Problem der Brennlinien* (Wiener Denkschriften, XX, 1859). — Die oben definierten Kurven sind nicht die einzigen, die ihre Entstehung der geometrischen Optik verdanken; wir führen noch die von Leibniz als Acampte, Aclaste und Synacampte bezeichneten an (vgl. den Anhang zu einem Briefe an Joh. Bernoulli vom 7. Jan. 1764, *Leibniz*, ed. Gerhardt, III, S. 734) sowie die von Mairan betrachteten (*Quatrième partie des Recherches physico-mathématiques sur la reflexion des corps,* Mém. de Paris, 1740) und von Fontenelle angegebenen (*Histoire de l'Acad.*

gewöhnliche Fall ist der, dafs S ein Strahlenbüschel mit endlichem oder auch unendlich fernem Scheitel ist, und diesen Fall hatte auch Tschirnhausen im Auge, der — wenn man von einigen unbestimmten Äufserungen von Maurolico[1]) absieht oder von solchen in der Optik Barrow's[2]) — als der erste bezeichnet werden müfste, der die Idee der berühmten Kurven, denen dies Kapitel gewidmet ist, gefafst hat[3]), „wenn er sie nicht 1678 in Paris durch Huygens kennen gelernt hat“[4]).

Die älteste bestimmte Spur derselben findet sich in einem Briefe Tschirnhausens an Leibniz vom 7. April 1681, in welchem er diesen fragt, ob er sich schon mit der Kurve beschäftigt habe, die durch die Schnitte (paralleler) Lichtstrahlen entstehe, nachdem diese eine Reflexion an einer Kurve erlitten haben, wobei er hinzufügte, dafs jene geometrisch sei, wenn diese es ist[5]). Leibniz antwortete unterm 13. Mai desselben Jahres[6]), indem er erklärte, dafs er die ihm vorgelegte Frage wohl nicht richtig verstanden habe, da es ihm schiene, dafs die Schnitte der reflektierten Strahlen keine Kurve bildeten, sondern die ganze Ebene bedeckten. In der Erwiederung, geschrieben von Paris unterm 27. Mai 1682[7]), wurden dann die Gesetze über die Brennlinien dargelegt, die Tschirnhausen in den *Acta eruditorum* vom Nov. 1682 unter dem Titel *Inventa nova, exhibita Parisiis Societati regiae Scientiarum* veröffentlichte; die hauptsächlichsten von ihnen finden sich auch in einem Briefe von Leibniz an denselben Tschirnhausen[8]). Nächst Leibniz ist Johann Bernoulli derjenige, der die Theorie mit gröfserem Erfolge bearbeitete[9]); ihm verdankt

---

des Sciences, 1740, S. 89—102); eine derselben nannte er courbe réfractoire ou anaclastique, eine andere courbe réflexoire ou anacamptique. Die Anaklastika Mairans ist eine Kurve 4ter Ordnung, ähnlich der Konchoide des Nikomedes; ihre Gleichung ist

$$\frac{m^2 - n^2}{n^2} y^2 = \frac{(a^2 - x^2)(x + b)^2 - a^2 b^2}{x^2}.$$

Bei der Untersuchung dieser Kurven bediente sich Mairan gewisser erzeugender Kurven, die von ihm ‚courbes des sécantes ouvertes en éventail‘ bezw. ‚courbes sécantes fermées en éventail‘ genannt wurden, und die nichts anderes als centrische Kegelschnitte sind.

1) Macri, *Commemorazione del IV Centenario di Francesco Maurolico,* Messina MDCCCXCIV, S. 111.

2) Montucla, *Histoire des Mathématiques* II. Nouv. éd. (Paris 1799) S. 389.

3) Vgl. den § 9 des Werkes von Weissenborn, *Lebensbeschreibung von E. W. von Tschirnhausen* (Eisenach 1866).

4) So M. Cantor, *Vorlesungen* III. (2e Aufl., Leipzig 1901) S. 148.

5) *Leibniz,* ed. Gerhardt, IV, (Halle a. S. 1859) S. 484. 6) Das.

7) Das. S. 487. 8) Das. S. 491.

9) Die bezügl. Arbeiten finden sich in *Joh. Bernoulli Opera,* in Abschnitten, die man leicht vermittelst des *Index rerum* bei dem Artikel *Caustica* auffinden kann. An diese knüpfen sich einige Schriften Jakob Bernoullis, die in *Jacobi*

man die Betrachtung solcher Strahlen, die in einem besonderen Punkte zusammenlaufen, den Begriff der Diakaustika, sowie die Bestimmug der Brennlinien spezieller Kurven; durch ihn erlangte die Theorie der bezüglichen Kurven schon einen solchen Grad der Vollkommenheit, dafs die Geometer längere Zeit hindurch dieses Thema fallen liefsen, da es keine Früchte zu bringen versprach, die der Mühe lohnten.

Der von Tschirnhausen und später von anderen angewendete Kunstgriff bei der Bestimmung der Brennlinien durch Reflexion besteht in der Betrachtung der „Länge des reflektierten Strahles“; darunter versteht man die Länge l der Strecke zwischen dem Einfallspunkte und demjenigen Punkte, in welchem der Strahl die von ihm umhüllte Brennlinie berührt. Für diese Länge erhält man nämlich einen sehr einfachen Ausdruck in dem Falle, dafs die Lichtstrahlen parallel sind. Diese kann durch folgende Rechnung erhalten werden.

Es sei

$$f(\xi, \eta) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

die Gleichung der spiegelnden Kurve Γ in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten. Nehmen wir den unendlich fernen Punkt der Ordinataxe als leuchtenden Punkt, so wird $x - \xi = 0$ die Gleichung eines beliebigen Lichtstrahles, $(x-\xi) + (y-\eta)\frac{d\eta}{d\xi} = 0$, die der entsprechenden Normalen sein, und demnach

$$(x-\xi)\left[1 - \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2\right] + 2(y-\eta)\frac{d\eta}{d\xi} = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

die des reflektierten Strahles. Die Katakaustika, die ja die Enveloppe dieser Strahlen ist, hat zur Gleichung das Resultat der Elimination von ξ und η, aus (1), (2) und der Abgeleiteten von (2), also der Gleichung

$$-(x-\xi)\frac{d\eta}{d\xi} + (y-\eta) = \frac{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}{2\frac{d^2\eta}{dx^2}}, \quad \ldots \quad (3)$$

werden nun die Gleichungen (2), (3) nach $x - \xi$, $y - \eta$ aufgelöst, so erhält man

$$x - \xi = -\frac{\frac{d\eta}{d\xi}}{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}}, \qquad y - \eta = \frac{1 - \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}{2\frac{d^2\eta}{d\xi^2}}, \quad \ldots \quad (4)$$

wodurch die Koordinaten x, y eines beliebigen Punktes der Katakaustika in Funktionen der Koordinaten ξ, η des Einfallspunktes gegeben sind. Aus ihnen ergiebt sich

$$l^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = \frac{1}{2}\frac{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}}.$$

Bernoulli Opera S. 473, 549 u. 1077 stehen. Vgl. auch de l'Hôpital, *Méthode facile pour déterminer les points des caustiques par réfraction etc.* (Mém. de Paris, X, 1666—1699).

Ist nun R der Krümmungsradius und τ der Reflexionswinkel, so hat man

$$R = \frac{\left[1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}}, \qquad \cos\tau = \frac{1}{\left[1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

und daher

$$l = \frac{1}{2} R \cos\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Dies ist die angekündigte Beziehung; sie sagt aus: **Ist $M(\xi, \eta)$ ein Punkt der spiegelnden Kurve und C das zugehörige Krümmungscentrum, so findet man den entsprechenden Punkt $P(x, y)$ der Brennlinie für parallele Strahlen, indem man dem Mittelpunkt der Strecke MC auf den reflektierten Strahl projiziert.**

Wenden wir die erhaltenen Resultate auf spezielle Kurven an, so erhalten wir interessante Resultate, wie folgende Beispiele zeigen.

a) Die spiegelnde Kurve sei ein Kreis $\xi^2 + \eta^2 = a^2$. Betrachten wir (Taf. XVI, Fig. 137) einen beliebigen in M parallel mit der y-Axe einfallenden Strahl s, der die x-Axe in N schneidet und den entsprechenden reflektierten r. Projizieren wir nun die Mitte Q des Radius OM auf r als P, so ist P ein Punkt der Katakaustika, ist nun H die Mitte der Strecke MN, so ist offenbar $MH = MP$, folglich läfst sich die Katakaustika des Kreises punktweise konstruieren, wenn man auf jedem reflektierten Strahl vom Einfallspunkte aus ein Viertel der auf dem einfallenden Strahle abgeschnittenen Kreissehne abträgt. — Die analytische Darstellung der fraglichen Kurve erhält man leicht, indem man entweder obige Konstruktion in Formeln kleidet, oder die Gleichung (4) benutzt[1]. Setzt man $\xi = a\cos\varphi$, $\eta = a\sin\varphi$, so findet man auf die eine oder andere Weise

$$x = \frac{a}{4}(3\cos\varphi + \cos 3\varphi), \qquad y = \frac{a}{4}(3\sin\varphi + \sin 3\varphi),$$

und diese Gleichungen zeigen: **Die Katakaustika für parallele Strahlen eines Kreises mit dem Radius a ist eine gemeine Epicykloide, die entsteht, wenn ein Kreis mit dem Radius $\frac{a}{4}$ auf einem andern mit dem Radius $\frac{a}{2}$ rollt**[2].

---

1) Die Tangentialgleichung der fraglichen Brennlinie findet sich bei J. Booth, *A treatise on some new geometrical methods* I. (London 1873) Cap. XIII.

2) Diese elegante Folgerung, sowie die vorige Punktkonstruktion der Kaustika wurde von de La Hire entdeckt und in der Abh. *Examen de la courbe formée par les rayons réflechis dans un quart de cercle* (Mém. de l'Acad. des Sciences, depuis 1666 jusqu'à 1699, Paris 1730, S. 294—310) dargelegt. Daselbst ist übrigens irrtümlich folgende, von Tschirnhausen angegebene Konstruktion bewiesen: Man beschreibe einen Kreis, der den zu den Lichtstrahlen senkrechten Radius OA des gegebenen Kreises zum Durchmesser hat, nehme auf jeder Ordinate die Mittelpunkte D des Segmentes BC, das von beiden Kreisen begrenzt wird; diese bilden die Katakaustika des gegebenen Kreises.

b) Eine neue bemerkenswerte Kurve erhält man, wenn man von der Parabel

$$\eta^2 = 2p\xi$$

ausgeht. Dann liefern uns die Gleichungen (4)

$$x = 3\xi, \qquad y = \frac{\eta(3p - 2\xi)}{2p};$$

eliminiert man ξ, η, so gelangt man zu

$$54py^2 = x(2x - 9p)^2,$$

als Gleichung der gesuchten Katakaustika. Diese läſst sich jedoch noch auf eine andere Weise darstellen, die ihre interne Natur klarlegt. Aus der letzten Gleichung erhalten wir nämlich für das Bogendifferenzial und den Krümmungsradius

$$\frac{ds}{dx} = \frac{2x + 3p}{2\sqrt{6px}}, \qquad R = \frac{(2x + 3p)^2}{12p};$$

durch Elimination von x erhält man dann

$$s = -\frac{1}{2}\int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{\frac{3}{4}p}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}}$$

als natürliche Gleichung der Brennlinie der Parabel. Nun stellt diese Gleichung den Entwickelungen in Nr. **172** zufolge (s. S. 400) eine Sinusspirale mit dem Index $-\frac{1}{3}$ dar; infolgedessen kann die fragliche Kurve in Polarkoordinaten durch

$$\varrho^{-\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{3}} \cos\left(-\frac{1}{3}\omega\right) \quad \text{oder} \quad a = \varrho \cos^3 \frac{\omega}{3}$$

dargestellt werden. Diese Kurve erhielt den Namen Orthogenide[1]), der von Allégret ersonnen war, zunächst um eine beliebige Sinusspirale zu bezeichnen.

c) Nehmen wir als spiegelnde Kurve die Cykloide

$$\xi = a \arccos \frac{a - \eta}{a} - \sqrt{2a\eta - \eta^2},$$

so findet man als Gleichung der Brennlinie:

$$\eta = a - \sqrt{a^2 - ay}, \qquad \xi = x - \sqrt{a\eta} + \sqrt{a\eta - \eta^2},$$

und nach Elimination von ξ, η

$$x = \frac{a}{2} \arccos \frac{a - 2y}{a} - \sqrt{ay - y^2}.$$

Die Brennlinie einer Cykloide ist also eine andere Cykloide, bei welcher der Durchmesser des rollenden Kreises gleich dem Radius

1) S. Question 1266 der Nouv. Ann., gelöst von Fauquenberg (2. Ser. XIV, 1894, S. 5*); dieselbe Kurve war schon vorher von Barbier und Lucas untersucht worden (Nouv. Ann. 2. Ser., V. S. 27 ff.).

des die ursprüngliche Cykloide erzeugenden Kreises ist. Dieses Resultat verdanken wir Joh. Bernoulli.

d) Wir betrachten die logarithmische Kurve, dargestellt durch

$$\frac{y}{a} = \log \frac{x}{a}$$

und ein System von Lichtstrahlen, die parallel zur x-Axe einfallen. Der Strahl $y = k$ wird alsdann reflektiert in die Gerade mit der Gleichung

$$x - ae^{\frac{k}{a}} - \frac{y-k}{2}\left(e^{\frac{k}{a}} - e^{-\frac{k}{a}}\right) = 0\,.$$

Differenzieren wir nach k, so erhalten wir $k = y + a$. Durch Eliminieren von k findet man dann die Gleichung

$$x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{y+a}{2}} + e^{-\frac{y+a}{2}}\right),$$

die eine Kettenlinie darstellt. Folglich: **Die logarithmische Kurve $y = a \log \frac{x}{a}$ hat für parallel der x-Axe einfallende Strahlen zur Katakaustika die Kettenlinie** $x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{y+a}{2}} + e^{-\frac{y+a}{2}}\right)$ [1].

268. Wir kehren zu allgemeinen Betrachtungen zurück und bemerken zunächst, dafs die Gleichung (6) nur ein Spezialfall der Beziehung ist, welche die Länge l des einfallenden Strahles mit der Länge l' des reflektierten oder gebrochenen Strahles verknüpft, in dem allgemeinen Falle, dafs der leuchtende Punkt in endlicher Entfernung liegt. Bezeichnen wir den Einfalls- und den Brechungswinkel bezw. mit μ und μ' und das konstante Verhältnis ihrer Sinus (den sog. Brechungskoeffizienten) mit $\frac{n}{n'}$, so lautet die allgemeine Beziehung

$$n'\left\{\frac{\cos\mu}{R} \pm \frac{\cos^2\mu}{l}\right\} = n\left\{\frac{\cos\mu'}{R} \pm \frac{\cos^2\mu'}{l'}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

wozu bemerkt werden möge, dafs im Falle der Reflexion $n + n' = 0$ und $\mu + \mu' = 0$. Der Hauptsache nach findet sie sich in dem Werke Joh. Bernoulli's, in dieser Form jedoch in der *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie* (Berlin 1833, S. 467) von Magnus. Den Beweis wollen wir uns schenken, da das Feld ihrer Anwendbarkeit kein grofses ist; desgleichen den Beweis für die Relation

$$n'[l_1 - l_1 \pm s] = n[l_2' - l_1' \pm s'],$$

die den Bogen s der reflektierenden Kurve, der begrenzt ist von den Punkten, die vom leuchtenden die Abstände l_1 und l_2 haben, mit dem entsprechenden der Kaustika verknüpft [2].

---

1) Briefliche Mitteilung von Oberlehrer J. Finsterbusch in Zwickau.

2) Magnus, a. a. O. S. 543. Im Falle $n + n' = 0$ geht (7) auf die Bernoulli'sche Gleichung zurück.

Ein neuer mächtiger Antrieb zum Studium der Kaustika ging 1808 von Malus aus durch seine berühmte *Mémoire sur l'Optique* (Journ. de l'École polyt. VII). Es ist hier nicht der Ort, auf die bewunderungswürdigen Resultate derselben einzugehen, zumal sie gröfstenteils die Verteilung der Lichtstrahlen im Raume betreffen und somit mehr Beziehung zur Geometrie der Oberflächen und der Linienkongruenzen als zur Geometrie der Ebene haben, auf die wir uns hier beschränken müssen. Nur eine Ausnahme soll gemacht werden, und zwar wegen eines Satzes, dem man die Einführung eines neuen Begriffes verdankt, der so fundamental ist, dafs er eine radikale Änderung in der Theorie der Kaustiken hervorgerufen hat.

Wir betrachten zu dem Zwecke die Kurve $\mathbf{A}'$, zu der alle einfallenden Strahlen normal sind; ξ', η' seien die Koordinaten eines beliebigen Punktes derselben, x, y die des entsprechenden der Kurve Γ, welche die brechenden Medien trennt. Wenn wir dann mit ξ, η die laufenden Koordinaten bezeichnen und $\frac{dy}{dx} = p$ setzen, so werden die Gleichungen des einfallenden Strahles, der Normale zur Kurve Γ und des austretenden Strahles bezw. von folgender Gestalt sein

$$\eta - y = k'(\xi - x), \qquad \eta - y = -\frac{1}{p}(\xi - x), \qquad \eta - y = k(\xi - x);$$

da nun der einfallende Strahl durch den Punkt (ξ', η') der Kurve $\mathbf{A}'$ geht, so ist

$$\eta' - y = k'(\xi' - x),$$

während die Gleichung

$$\frac{n'(1 + kp)}{\sqrt{1 - k^2}} = \frac{n(1 + k'p)}{\sqrt{1 - k'^2}}$$

das Grundgesetz ausdrückt, welches die Erscheinung der Refraktion beherrscht. Mit Berücksichtigung der vorigen Gleichung kann nun diese geschrieben werden

$$n' \frac{\xi - x + p(\eta - y)}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}} = n \frac{\xi' - x + p(\eta' - y)}{\sqrt{(\xi' - x)^2 + (\eta' - y)^2}};$$

sie stellt den austretenden Strahl dar und wird offenbar befriedigt durch die Koordinaten ξ, η eines Punktes N, von der Art, dafs

$$\frac{n' \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}}{n \sqrt{(\xi' - x)^2 + (\eta' - y)^2}} = 1, \qquad \frac{n'^2[\xi - x + p(\eta - y)]}{n^2 [\xi' - x + p(\eta' - y)]} = 1.$$

Schreiben wir diese Beziehungen folgendermafsen:

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = \frac{n^2}{n'^2}\left((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2\right);$$

$$\xi - x + p(\eta - y) = \frac{n^2}{n'^2}\left((\xi' - x + p(\eta' - y)\right),$$

so sehen wir, indem ξ, η die laufenden Koordinaten sind, dafs die erste dieser Gleichungen einen Kreis $\mathbf{K}$ darstellt, dessen Centrum im

Incidenzpunkte liegt, und dessen Radius das Produkt aus dem Brechungskoeffizienten $\frac{n}{n'}$ und dem Abstande jenes Punktes vom leuchtenden Punkte ist. Die zweite Gleichung entsteht dann durch Differenzieren der ersten nach x. $N(\xi, \eta)$ ist demnach der Berührungspunkt des Kreises **K** mit der Kurve, die von allen diesen analog konstruierten Kreisen umhüllt wird. Der austretende Strahl enthält sowohl diesen Punkt N als auch den Mittelpunkt (x, y) von **K**, er ist daher normal zu diesem Kreise, also auch zu der umhüllten Kurve; letztere ist also normal zu allen austretenden Strahlen, mit anderen Worten: sie ist eine Evolvente der Kaustika. Aus allem diesen ergiebt sich nun folgender Satz von Gergonne: **Die Kaustika B einer beliebigen (spiegelnden oder brechenden) Kurve Γ für solche Strahlen, die eine Kurve A berühren (oder zu einer Kurve A′, der Evolvente von A, normal sind) ist die Evolute einer Kurve B′, welche die Enveloppe der unendlich vielen Kreise K ist, deren Mittelpunkte auf der Kurve Γ liegen, und deren Radien zu den Abständen der Mittelpunkte von den entsprechenden Punkten der Kurve A′ in einem konstanten Verhältnisse stehen**, nämlich des Sinus des Einfallswinkels zu dem des Brechungswinkels[1]). Zufolge dieses Satzes zerfällt die Untersuchung der Brennlinien in zwei Teile, nämlich die Untersuchung der Enveloppe des nach einem bestimmten Gesetze variabelen Kreises und die der Evolute einer gegebenen Kurve, und diese beiden können sowohl geometrisch, als auch analytisch ausgeführt werden. Die Kurven **B′**, die Evolventen der Brennlinien **B**, tragen den ihnen von Quetelet[2]) gegebenen Namen sekundäre Kaustiken (Nebenbrennlinien).

Wenden wir den soeben bewiesenen Satz von Gergonne an für den Fall der Refraktion, wenn die Brechungskurve eine Gerade ist und die Strahlen von einem Punkte ausgehen, so finden wir, daſs die sekundäre Kaustika eine Ellipse ist; ist dagegen die brechende Kurve ein Kreis, so ist sie ein Cartesisches Oval[3]). **Die Diakaustika einer Geraden ist also die Evolute einer Ellipse**[4]); **die eines Kreises ist im allgemeinen die Evolute eines Cartesischen Ovales**[5]); liegt aber der leuchtende Punkt auf der Peripherie des Kreises, so ist die Dia-

---

1) Gergonne, *Sur les caustiques planes* (Annales de Math. XV, 1824—25).

2) *Démonstration et développements des principes fondamentaux de la théorie des caustiques sécondaires* (Belgique Mém. V, 1829).

3) Salmon-Fiedler, *Höhere ebene Curven*, II. Aufl. (Leipzig 1882) S. 127.

4) Dieser spezielle Satz wurde von Gergonne schon 1820 bewiesen (*De la manière dont les poissons nous voyent et dont nous les voyons*, Annales de Math. XI, 1820—21), ein direkter analytischer Beweis steht in Schlömilch, *Compendium d. höh. Analysis* (5. Aufl., Braunschweig 1881) I, S. 132.

5) Auch dieser Satz ist älteren Datums als der von Gergonne, indem er sich schon in den *Recherches d'analyse sur les caustiques planes* von C. Sturm findet (Ann. de Math. XV, 1824—25).

kaustika eine Kardioide, welcher Umstand schon dem Joh. Bernoulli bekannt war.

Der Satz von Gergonne, der auf die Existenz der sekundären Kaustiken hinweist, bedeutet einen Höhepunkt in der Geschichte der Theorie der Brennlinien; die späteren Arbeiten haben zu den bekannten Resultaten nur weniges von Bedeutung hinzugefügt: einige wandten auf diese Kurven die Methoden der natürlichen Koordinaten an[1]), andere suchten den Zusammenhang mit einer anderen Klasse von Kurven, nämlich den Fufspunktkurven[2]), wieder andere stellten Beziehungen auf zwischen den Kaustiken und der Theorie der Bewegungen[3]), noch andere beschäftigten sich mit den Sätzen über ihre Rektifikation[4]). Viel zahlreicher jedoch sind die Schriften, die sich mit der Bestimmung und Untersuchung der Brennlinien spezieller Kurven befafst haben: unter ihnen ragt die *Memoir upon Caustics* von A. Cayley hervor (Phil. Trans. CXLVII, 1857 und CXVII 1867), worin der Fall, dafs die betrachtete Kurve eine Gerade oder ein Kreis sei, erschöpfend behandelt ist. Nicht zu vergessen seien auch die Arbeiten, in denen die Katakaustika einer Kardioide bestimmt wird[5]), sowie der Beweis, dafs alle Kurven, welche eine Polargleichung von der Form

$$a^n = \varrho^n (\cos m\omega)^{\pm 1}$$

haben, zur Katakaustika eine Kurve von folgender Gleichung haben[6])

$$\varrho = a \cos^{\pm 2} p\omega \cdot \sin q\omega .$$

Nennenswert sind auch die Arbeiten G. F. Steiner's[7]), die sich die Bestimmung der Plücker'schen Charakteristiken der Katakaustiken einer algebraischen Kurve, deren Charakteristiken bekannt sind, zur Aufgabe gestellt haben; sich stützend auf die fundamentalen Betrachtungen Björling's in der Arbeit *Ueber entsprechende Singularitäten in algebraischen ebenen Curven* (Nova Acta Reg. Soc. Upsal. 1879) gelangt der Verfasser zur Lösung dieses Problemes, nicht ohne bemerkenswerte Benutzung von Resultaten, die an speziellen Kurven

1) Habich, *Sur un système particulier de coordonnées. Application aux caustiques planes* (Ann. di Mat. 2. Ser. II, 1868—69).

2) Vgl. Em. Weyr, *Ueber die Identität der Brennlinien mit den Evoluten der Fufspunktcurven* (Zeitschrift f. Math. XIV, 1869).

3) G. Koenigs, *Leçons de cinématique* (Paris 1897) S. 166.

4) A. Genocchi, *Intorno alla rettificazione e alle proprietà delle caustiche secondarie* (Annali di Matem. VI, 1864).

5) A. H. Curtis, *Geometrical proof, that the caustic by reflexion of a cardioid produced by rays proceeding from its cusp is an epicycloid* (The Messenger, 2. Ser. XII, 1882).

6) Lord M'Laren, *On the reflexion-caustics of symetrical curves* (Edinburgh Proc. XVII, 1889).

7) *Ueber die Katakaustiken algebraischer ebener Kurven* (Dissert. Lund, 1896).

erhalten sind; die uns gesteckten Grenzen verbieten uns, mehr als diesen Hinweis auf jene Forschungen zu geben.

269. Der Begriff der Kaustika erhielt eine bemerkenswerte Verallgemeinerung[1]), die wir hier nicht unbeachtet lassen dürfen. — In einer Ebene sei eine Kurve Γ und ein Büschel paralleler Lichtstrahlen gegeben. Man betrachte einen beliebigen dieser Strahlen a; M sei der Einfallspunkt, μ der Winkel, den er mit der Tangente m an Γ in M bildet (Taf. XVI, Fig. 138), durch M ziehe man alsdann eine Gerade b, die mit m einen Winkel μ' bildet, derart, dafs immer

$$\frac{\mu}{\mu'} = \varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Ist $\varrho = 1$, so ist die Enveloppe der Strahlen b die gewöhnliche Katakaustika der Kurve Γ, hat ϱ einen beliebigen Wert, so heifst die Enveloppe die Kaustikoide. Bemerkenswert sind die Fälle $\varrho = -\frac{1}{2}$ und $\varrho = -2$; im ersteren Falle ist b die Halbierungslinie des Winkels (a, m), im zweiten dagegen die Halbierungslinie des Winkels (b, m), wie es die Figuren 139 a und b zeigen.

Die bequemste analytische Darstellung der Kaustikoiden erhält man, wenn man die Kurve Γ als durch die Gleichung einer beliebigen ihrer Tangenten, in der Art wie in Nr. **252** dargestellt, ansieht, also durch

$$y \cos \tau - x \sin \tau = F(\tau).$$

Setzen wir $\tau = \theta - \frac{\pi}{2}$, so können wir sie schreiben auch als

$$x \cos \theta + y \sin \theta = f(\theta).$$

Wir bezeichnen nun mit $y \cos \alpha - x \sin \alpha = 0$ die Gleichung der durch den Anfang parallel zu den einfallenden Strahlen gezogenen Geraden. Die allgemeine Gleichung der Geraden b ist offenbar von der Form

$$(x - f \cos \theta + f' \sin \theta) \cos \lambda + (y - f \sin \theta - f' \cos \theta) \sin \lambda = 0$$

oder $$x \cos \lambda + y \sin \lambda = f(\theta) \cos (\lambda - \theta) + f'(\theta) \sin (\lambda - \theta). \quad . \quad (8)$$

Da nun $\mu = \theta - \alpha$, $\mu' = \lambda - \theta$, so wird die Gleichung (7) zu

$$\frac{\theta - \alpha}{\lambda - \theta} = \frac{1}{\varrho},$$

und diese ermöglicht uns, θ aus der Gleichung (8) zu eliminieren; man erhält

$$x \cos \lambda + y \sin \lambda = f\left(\frac{1 - a}{\varrho + 1} + \alpha\right) \cos \frac{\varrho(\lambda - \alpha)}{\varrho + 1}$$
$$+ f'\left(\frac{\lambda - a}{\varrho + 1} + \alpha\right) \sin \frac{\varrho(\lambda - \alpha)}{\varrho + 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Dies ist die „magische Gleichung“ einer beliebigen Tangente der Kau-

1) Grane, *Ueber Curven mit gleichartigen successiven Developpoiden* (Dissert. Lund, 1894).

stikoide und kann somit als analytische Darstellung der Kurve selbst angesehen werden. Setzen wir im speziellen $\varrho = 1$ und verwandeln der Bequemlichkeit halber λ in θ, so erhalten wir

$$x \cos\theta + y \sin\theta = f\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right) \cos\frac{\theta - \alpha}{2} + f'\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right) \sin\frac{\theta - \alpha}{2},$$

oder auch

$$x \cos\theta + y \sin\theta = 2\frac{d}{d\theta}\left[f\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right) \sin\frac{\theta - \alpha}{2}\right];$$

nun entsteht diese Gleichung durch Differenzieren nach θ folgender Gleichung

$$x \sin\theta - y \cos\theta = 2f\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right) \sin\frac{\theta - \alpha}{2},$$

demnach stellt die letzte Gleichung die Evolvente der durch die vorletzte dargestellten Kurve dar, also der sekundären Kaustika von Γ; die Existenz dieser Kurve ist somit von neuem dargethan und aufserdem eine bequeme analytische Darstellung derselben gezeigt worden.

Schliefslich soll eine einfache Anwendung der Gleichung (9) gemacht werden, nämlich für den Fall, dafs Γ ein Kreis mit dem Centrum O, dem Radius a sei. Dann ist $f(\theta) = a$, folglich wird Gl. (9)

$$x \cos\lambda + y \sin\lambda = a \cos\frac{\varrho(\lambda - \alpha)}{\varrho + 1},$$

die interpretiert aussagt: **Alle Kaustikoiden eines Kreises sind Epicykloiden,** die algebraisch sind oder nicht, jenachdem ϱ rational oder irrational ist.

Achtes Kapitel.

Fufspunktkurven, Gegenfufspunktkurven und Podoiden.

270. Gegeben eine Kurve Γ und ein fester Punkt P, man fälle von diesem auf alle Tangenten von Γ das Lot, die Fufspunkte dieser Lote bilden dann eine neue Kurve, die man die Fufspunktkurve oder Pedale von Γ in Bezug auf P nennt. Der Begriff rührt von Maclaurin[1]) her; jedoch der Name wurde ihr von O. Terquem gegeben[2]). Wenn man dagegen den Punkt P auf alle Normalen von Γ projiziert, so erhält man die Fufspunktkurve der Evolute von Γ in Bezug

1) Phil. Trans. 1718 und 1719; *Geometria organica* (London 1720) S. 95 ff. Bilden die durch P gezogenen Geraden einen konstanten, aber von $\frac{\pi}{2}$ verschiedenen Winkel, so hat man dagegen eine schiefe Fufspunktkurve; vgl. Barisien, *Aire de la podaire oblique de la développée oblique de l'ellipse* (Nouv. Ann. 4e Sér. I. 1900).

2) Nouv. Ann. V, 1848, S. 239.

auf P; sie heiſst die Gegenfuſspunktkurve oder Contrapedale[1]) und kann punktweise konstruiert werden, indem man durch P die Parallelen zu den Tangenten zieht und ihren Schnitt mit der jedesmal zugehörigen Normale bestimmt. Wenn man zu jeder Kurve in der Ebene die Fuſspunktkurve bestimmt hat, so hat man damit eine spezielle Berührungstransformation ausgeführt, die Lie die Fuſspunkttransformation[2]) genannt hat; sie kann als das Produkt einer Inversion und einer Polarität in Bezug auf einen Kreis aufgefaſst werden[3]).

Ist die Kurve Γ algebraisch und von der Ordnung n, so wollen wir mit

$$f = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

ihre Gleichung bezeichnen, sei es, daſs wir gewöhnliche kartesische Koordinaten x, y anwenden, oder der gröſseren Symmetrie halber homogene x, y, z $(= 1)$; der Punkt P, von welchem die Lote auf die Tangenten gefällt werden, habe die Koordinaten α, β. Dann wird die Gleichung der Tangente im Punkte $M(x, y)$ lauten

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

wenn x, y, z der Gl. (1) genügen. Das von P darauf gefällte Lot hat die Gleichung

$$\frac{X-\alpha}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y-\beta}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Man erhält demnach die Gleichung der Fuſspunktkurve durch Elimination von x und y aus (1), (2), (3). Nun haben die beiden Seiten der Gleichung (3) den gemeinsamen Wert

$$\frac{(X-\alpha)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y-\beta)\frac{\partial f}{\partial y}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \frac{X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} - \left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2},$$

oder wegen Gleichung (2)

$$-\frac{\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = D.$$

Dies beweist, daſs die Gleichungen (2), (3) gleichbedeutend mit folgenden beiden sind:

$$X = \alpha + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot D, \qquad Y = \beta + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot D; \quad \ldots \quad (4)$$

also würde man die Gleichung der Fuſspunktkurve auch aus (1) und (4)

1) Craig, *The counter-pedal surface of the Ellipsoid* (Amer. Journ. IV, 1882).

2) S. Lie und G. Scheffers, *Geometrie der Berührungstransformationen* I. (Leipzig 1896) S. 17.

3) Daselbst S. 27—29.

durch Elimination von x, y erhalten können. Um nun die Ordnung n_1 der Fuſspunktkurve zu finden, kombinieren wir diese Gleichungen mit der folgenden

$$AX + BY + C = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

und erhalten

$$(A\alpha + B\beta + C)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] - \left(A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0. \quad . \quad . \quad (6)$$

Die gesuchte Ordnung ist nun gleich der Zahl der variabelen Schnitte der beiden durch die Gleichungen (1) und (6) dargestellten Kurven mit der Geraden (5); erstere ist von der Ordnung n, letztere von der Ordnung $2(n-1)$, daher ist im allgemeinen $n_1 = 2n(n-1)$. Um zu sehen, welche Veränderung die Existenz eines Doppelpunktes oder einer Spitze (in endlicher Entfernung) hervorruft, wollen wir annehmen, daſs der Anfangspunkt ein Doppelpunkt oder eine Spitze sei.

Im ersten Falle können wir schreiben: $f = f_2 + \cdots = 0$, und sehen dann, daſs die Glieder niedrigsten Grades auf der rechten Seite der Gleichung (6) lauten

$$(A\alpha + B\beta + C)\left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2\right],$$

demnach ist auch der Anfangspunkt von (6) ein Doppelpunkt, und damit haben wir für n_1 eine Verminderung um vier Einheiten.

Im zweiten Falle schreiben wir: $f = y^2 + \cdots = 0$, und die rechte Seite von Gl. (6) beginnt dann mit $(A\alpha + B\beta + C)\,4y^2 + \cdots$; die beiden Kurven haben dann eine Spitze und die Spitzentangente gemeinsam; die Spitze absorbiert demnach sechs Schnitte der beiden Kurven. Hat nun die gegebene Kurve d Doppelpunkte und k Spitzen, so wird

$$n_1 = 2n(n-1) - 4d - 6k.$$

Nun gilt bekanntlich für die Klasse ν einer Kurve die Formel

$$\nu = n(n-1) - 2d - 3k,$$

demnach ist

$$n_1 = 2\nu,$$

und das heiſst in Worten: **Die Ordnung der Fuſspunktkurve einer algebraischen Kurve ist im allgemeinen doppelt so groſs als die Klasse dieser**[1]).

Nehmen wir z. B.[2]) als Kurve Γ die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

---

1) Weiteres über diese und ähnliche Fragen s. m. bei A. Rosén, *Om fotpunktkurvers karakterer*, *Akademisk afhandling* (Lund 1884).

2) S. Roberts, *On the pedals of conic sections* (Proc. of the London math Soc. III, 1869—71).

so kann die Gleichung ihrer Tangente dargestellt werden durch

$$\frac{x \cos \varphi}{a} + \frac{y \sin \varphi}{b} = 1;$$

das auf sie vom Punkte $P(\alpha, \beta)$ gefällte Lot hat die Gleichung

$$\frac{(x-\alpha) \sin \varphi}{b} - \frac{(y-\beta) \cos \varphi}{a} = 0.$$

Die Gleichung der Fufspunktkurve ist nun das Resultat der Elimination von φ aus diesen letzten beiden Gleichungen: man erhält

$$[x^2 + y^2 - (\alpha x + \beta y)]^2 = a^2(x-\alpha)^2 - b^2(y-\beta)^2.$$

Die Fufspunktkurve ist also eine bizirkulare Kurve vierter Ordnung mit P als Doppelpunkt, demnach eine Lemniskate von Booth (s. Nr. **64** und **65**). — Geben wir dem b^2 das entgegengesetzte Vorzeichen, so erhalten wir die Fufspunktkurve der Hyperbel. Besonders bemerkenswert ist der Fall, dafs P auf eine Axe oder in das Centrum des Kegelschnittes fällt.

Andere Beispiele von Fufspunktkurven finden sich in Nr. **24**, **30** und **42** für die Parabel, in welchem Falle jene von der dritten Ordnung ist[1]), ferner in Nr. **70** für den Kreis, in Nr. **75**—**77** für die dreispitzige Hypocykloide und in Nr. **105** für die reguläre Astroide (s. auch Nr. **136** IV).

Wenn Γ_1 die Fufspunktkurve von Γ in Bezug auf P ist, so kann man in derselben Weise auch die von Γ_1 in Bezug auf P konstruieren als Γ_2, sowie die Fufspunktkurve Γ_3 von Γ_2 u. s. w.; die so entstandenen Kurven heifsen die zweite, dritte ... Fufspunktkurve. — Betrachten wir z. B. die Sinusspirale mit der Gleichung

$$\varrho^m \cos m\omega = a^m,$$

so erhält man als Gleichung der n^{ten} Fufspunktkurve in Bezug auf den Pol

$$\varrho^{-\frac{m}{mn-1}} \cos\left(-\frac{m}{mn-1}\omega\right) = a^{-\frac{m}{mn-1}},$$

weshalb die erhaltene Kurve wiederum eine Sinusspirale ist[2]).

---

1) Barisien, *Podarie rispetto alla parabola* (Period. di matem. XVI, 1900—1901).

2) Unter den Kurven, deren successive Fufspunktkurven zu wichtigen Folgerungen führen, tritt besonders die gleichseitige Hyperbel hervor; nimmt man als festen Punkt das Centrum der Kurve, so erhält man Linien, die seit 1847 von W. Roberts als Verallgemeinerungen der Bernoulli'schen Lemniskate betrachtet wurden (s. die Abh. *Généralisation d'une propriété de la lemniscate,* Liouvilles Journ. XII, 1847); er schuf dadurch eine bedeutende Erweiterung des Talbot'schen Satzes (vgl. C. Sturm, *Démonstration de deux théorèmes sur la lemniscate*; Annales de Math. XIV, 1823—24), die besagt: „Multipliziert man die Differenz zwischen dem unendlich langen Bogen der gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = a^2$ und ihrer Asymptote mit der Länge des Quadranten der Lemniskate $(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0$, so erhält man $\frac{\pi a^2}{4}$."

271. Wenn Γ eine geschlossene und überall konvexe Kurve ist, und der Punkt P innerhalb derselben liegt, so besteht zwischen den Flächen A und A_1 der Fufspunktkurve und der Gegenfufspunktkurve von Γ eine bemerkenswerte Beziehung, die 1881 von E. Catalan entdeckt wurde[1]), die sich 1894 bei K. Tsuruta[2]) wiederfindet und auf welche im folgenden Jahre einige Mitarbeiter des *Intermédiaire des mathématiciens* stiefsen, als sie von E. Barisien[3]) ausgesprochene Sätze verallgemeinerten. Um diese Beziehung zu erhalten, machen wir zweckmäfsig von der „magischen Gleichung" der Tangente von Γ Anwendung, indem wir diese so schreiben:

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0, \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

wo p eine gegebene Funktion von φ ist. Es ist klar, dafs φ und p die Polarkoordinaten eines erzeugenden Punktes der Fufspunktkurve von Γ in Bezug auf den Anfangspunkt sind; daher hat man

$$A = \frac{1}{2} \int p^2 \cdot d\varphi,$$

wobei das Integral auf den ganzen Umfang von Γ auszudehnen ist. Differenzieren wir (7), so erhalten wir

$$-x \sin \varphi + y \cos \varphi - p' = 0$$

oder auch $$x \cos \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) + y \sin \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) - p' = 0;$$

da diese eine Normale der Kurve Γ darstellt, so ist klar, dafs $\frac{\pi}{2} + \varphi$ und p' die Polarkoordinaten eines beliebigen Punktes der Gegenfufspunktkurve sind. Infolgedessen ist

$$A_1 = \frac{1}{2} \int p'^2 \cdot d\varphi;$$

und daher $$A - A_1 = \frac{1}{2} \int (p^2 - p'^2) \cdot d\varphi. \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Bezeichnen nun ϱ, ω die Koordinaten eines Punktes von Γ, so erkennt man alsbald, dafs die Relationen bestehen

$$p = \varrho \cos(\omega - \varphi), \qquad p' = \varrho \sin(\omega - \varphi),$$

oder auch $$p^2 + p'^2 = \varrho^2, \qquad \omega - \varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{p'}{p};$$

daraus folgt $$d\omega - d\varphi = \frac{pp'' - p'^2}{p^2 + p'^2} \cdot d\varphi,$$

daher $$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{p^2 + pp''}{\varrho^2} \quad \text{oder} \quad \varrho^2 d\omega = (p^2 + pp'') \cdot d\varphi.$$

---

1) Vgl. die *Mélanges mathématiques* (Mém. de la Soc. de Liège, 2. Ser. XIII, 1886) S. 230.

2) *Counter pedals* (The Messenger, 2. Ser. XXIII, 1894).

3) *Intermédiaire* II, 1896, S. 107—109 und 344—345.

Wird nun die Fläche der Kurve Γ mit C bezeichnet, so erhält man

$$C = \frac{1}{2}\int (p^2 + pp'') \cdot d\varphi,$$

wobei das Integral sich über die ganze Kurve Γ zu erstrecken hat. Integriert man teilweise, so erhält man

$$\int pp'' \cdot d\varphi = pp' - \int p'^2 \cdot d\varphi,$$

der integrierte Teil wird aber zu Null, wenn das Integral sich über die ganze Kurve erstreckt, demnach ist

$$C = \frac{1}{2}\int (p^2 - p'^2) \cdot d\varphi. \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Ein Vergleich der beiden Gleichungen (8) und (9) ergiebt dann

$$C = A - A_1, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

welche Beziehung folgender Satz ausdrückt: **Die Differenz der Flächeninhalte der Fufspunktkurve und Gegenfufspunktkurve einer geschlossenen, überall konvexen Kurve Γ in Bezug auf einen innerhalb Γ gelegenen Punkt P ist gleich der Fläche der Kurve Γ selbst.**

Als Beispiel nehmen wir für Γ eine Ellipse mit den Halbaxen a, b und als P einen ihrer Brennpunkte; dann ist die Fufspunktkurve ein Kreis mit dem Radius a, also $A = \pi a^2$; da $C = ab\pi$, so ist die Fläche der Gegenfufspunktkurve gleich $\pi a(a - b)$, ist also an Inhalt gleich einer Ellipse mit den Halbaxen a und $a - b$.

Auf die Fläche der Fufspunktkurve einer geschlossenen und konvexen Linie bezieht sich auch ein bemerkenswerter Satz, den Steiner entdeckt hat[1]). Um diesen darzulegen, erinnern wir zunächst daran, dafs man nach diesem Geometer unter dem Krümmungsschwerpunkt einer Kurve denjenigen Schwerpunkt versteht, den die Kurve haben würde, wenn die Dichtigkeit ihres Umfanges nicht gleichmäfsig, sondern der Krümmung proportional wäre. Ist daher s der Bogen, R der Krümmungsradius der Kurve Γ, so werden die Koordinaten x_0, y_0 des Krümmungsschwerpunktes gegeben sein durch

$$x_0 = \frac{\int \frac{x \cdot ds}{R}}{\int \frac{ds}{R}}, \qquad y_0 = \frac{\int \frac{y \cdot ds}{R}}{\int \frac{ds}{R}},$$

wobei die Integration sich über alle Punkte von Γ zu erstrecken hat. Führen wir noch den Kontingenzwinkel $d\tau = \frac{ds}{R}$ ein, so dafs also τ den Winkel der Normalen mit der x-Axe bezeichnen würde, so können wir schreiben:

$$x_0 = \frac{\int x \cdot d\tau}{\int d\tau}, \qquad y_0 = \frac{\int y \cdot d\tau}{\int d\tau}.$$

---

1) S. die berühmte Abhandlung *Vom Krümmungsschwerpunkte ebener Curven* (Crelles Journ. XXI, 1838; *Gesammelte Werke* II, S. 97).

Da nun nach der Annahme Γ eine geschlossene Kurve ist, so ist $\int d\tau = 2\pi$, also

$$x_0 = \frac{1}{2\pi}\int x \cdot d\tau, \qquad y_0 = \frac{1}{2\pi}\int y \cdot d\tau. \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Nehmen wir nun die Kurve Γ als durch die magische Gleichung ihrer Tangente dargestellt an

$$x \cos\tau + y \sin\tau - f(\tau) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

und kombinieren diese Gleichung mit ihrer Abgeleiteten

$$-x \sin\tau + y \cos\tau - f'(\tau) = 0,$$

so bekommen wir

$$x = f \cos\tau - f' \sin\tau, \qquad y = f \sin\tau + f' \cos\tau,$$

und dann werden die Gleichungen (11) zu

$$2\pi x_0 = \int f \cos\tau \cdot d\tau - \int f' \sin\tau \cdot d\tau,$$
$$2\pi y_0 = \int f \sin\tau \cdot d\tau + \int f' \cos\tau \cdot d\tau.$$

Integrieren wir aber teilweise

$$\int f' \sin\tau \cdot d\tau = f \sin\tau - \int f \cos\tau \cdot d\tau,$$
$$\int f' \cos\tau \cdot d\tau = f \cos\tau + \int f \sin\tau \cdot d\tau,$$

so verschwinden, da die Integration sich über die ganze Kurve erstrecken soll, die integrierten Teile, und es bleibt nur

$$\pi x_0 = \int f \cos\tau \cdot d\tau, \qquad \pi y_0 = \int f \sin\tau \cdot d\tau.$$

Betrachten wir nun, nachdem dies vorausgeschickt, einen beliebigen Punkt $P(\alpha, \beta)$ in der Ebene der durch Gleichung (11) definierten Kurve, so hat das von P auf die durch diese Gleichung dargestellte Gerade gefällte Lot die Länge

$$l = \alpha \cos\tau + \beta \sin\tau - f(\tau)$$

und bildet mit der x-Axe den Winkel $\frac{\pi}{2} + \tau$. Demnach wird die Fläche S der Fufspunktkurve von Γ in Bezug auf P gegeben durch

$$S = \frac{1}{2}\int (\alpha \cos\tau + \beta \sin\tau - f)^2 \cdot d\tau,$$

wobei die Integration sich wieder über alle Punkte von Γ zu erstrecken hat. Daraus folgt

$$2S = \alpha^2 \int \cos^2\tau \cdot d\tau + \beta^2 \int \sin^2\tau \cdot d\tau + 2\alpha\beta \int \sin\tau \cdot \cos\tau . d\tau$$
$$- 2\alpha \int f \cos\tau \cdot d\tau - 2\beta \int f \sin\tau \cdot d\tau + \int f^2 \cdot d\tau.$$

Nun ist im allgemeinen

$$\int \cos^2\tau \cdot d\tau = \frac{1}{2}\left(\tau + \frac{\sin 2\tau}{2}\right), \qquad \int \sin^2\tau \cdot d\tau = \frac{1}{2}\left(\tau - \frac{\sin 2\tau}{2}\right),$$
$$2\int \sin\tau \cdot \cos\tau \cdot d\tau = -\frac{\cos 2\tau}{2},$$

wenn wir daher zwischen $\tau = \tau_0$ und $\tau = \tau_0 + 2\pi$ integrieren, erhalten wir bezw. die Resultate π, π, 0. Daher können wir schreiben

$$2S = \pi(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha x_0 - 2\beta x_0) + \int f^2 \cdot d\tau \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Aus dieser bemerkenswerten Formel ergeben sich mehrere Folgerungen. Schreiben wir sie in folgender Weise

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha x_0 - 2\beta x_0 + \frac{\int f^2 \cdot d\tau - 2S}{\pi} = 0, \quad . \quad . \quad (14)$$

so erkennen wir: **Diejenigen Punkte, in Bezug auf welche die Fläche der Fufspunktkurve einer gegebenen geschlossenen und konvexen Linie konstant ist, liegen auf einem Kreise, dessen Centrum der Krümmungsschwerpunkt jener Linie ist.** — Wir schreiben nun die Gleichung (13) in folgender Weise:

$$S = \pi \frac{(\alpha - x_0)^2 + (\beta - y_0)^2}{2} + \frac{\int f^2 \cdot d\tau - \pi(x_0^2 + y_0^2)}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (13')$$

Da die Fläche S ihren kleinsten Wert erhält, wenn der Punkt P mit dem Krümmungsschwerpunkte M zusammenfällt, so ist dieses Minimum

$$S_0 = \frac{\int f^2 \cdot d\tau - \pi(x_0^2 + y_0^2)}{2}$$

und daher wird die Gleichung (13′) zu

$$S = \frac{\pi}{2} \overline{PM}^2 + S_0 .$$

Dies besagt: **Die Fläche der Fufspunktkurve einer geschlossenen konvexen Linie in Bezug auf einen Punkt P ihrer Ebene ist gleich der Fläche der Fufspunktkurve in Bezug auf den Krümmungsschwerpunkt, vermehrt um die Fläche des Halbkreises, der den Abstand dieses Punktes von P zum Radius hat.** Wenn z. B. die betrachtete Kurve ein Kreis mit dem Centrum C und dem Radius r ist, so ist die Fläche der Fufspunktkurve eines beliebigen Punktes P gleich der Fläche des gegebenen Kreises vermehrt um den Halbkreis, dessen Radius PC ist; im speziellen, wenn P auf der Peripherie liegt, ist die Fläche der Fufspunktkurve, die eine Kardioide ist, gleich $\frac{3}{2}\pi r^2$.

272. Andere Formeln, die sich auf die Fläche der Fufspunktkurven beziehen, erhält man unschwer, wenn man die Kurve Γ, von der man ausgeht, als durch eine Polargleichung dargestellt annimmt, also durch $\varrho = f(\omega)$, wobei man den festen Punkt O als Pol nimmt. Wir wollen allgemein mit ϱ_m, ω_m die Koordinaten des Punktes M_m der m^{ten} Fufspunktkurve Γ_m bezeichnen, der dem Punkte $M(\varrho, \omega)$ von Γ entspricht und mit A_m die Fläche dieser Fufspunktkurve. Da der Winkel OM_1M ein rechter ist, so geht der Kreis mit dem Durchmesser OM durch M_1; betrachten wir ein ebensolches Punktepaar $M'M_1'$ und Γ und Γ_1, so erkennt man, dafs der Kreis mit dem Durchmesser OM' durch M_1' gehen mufs. Wenn nun M' dem M unendlich

nahe kommt, so wird auch M_1' mit M_1 zusammenrücken, und die Gerade $M_1 M_1'$ wird sowohl mit der in M_1 an Γ_1 als auch mit der Tangente in M_1 an den Kreis OM_1M zusammenfallen. Demnach berührt die Tangente t_1 in M_1 an Γ_1 den Kreis OM_1M, infolgedessen geht die Normale in M_1 zu Γ_1 durch den Mittelpunkt C der Strecke OM [1]). Der Fufspunkt M_2 des von O auf die Tangente des Kreises über OM in M_1 gefällten Lotes gehört also der zweiten Fufspunktkurve Γ_2 an. Ähnlich findet man den Punkt M_3 u. s. w. alle die dem Punkte M entsprechenden Punkte der successiven Fufspunktkurven.

Ist nun (Taf. XVII, Fig. 140) μ der Winkel, den die Tangente in M an Γ mit dem Vector bildet, so hat man bekanntlich,

$$\operatorname{tg}\mu = \varrho : \frac{d\varrho}{d\omega}, \qquad \text{oder} \qquad \mu = \operatorname{arc\,tg}\frac{\varrho}{\varrho'}, \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

wobei die Accente immer die Ableitungen in Bezug auf Γ bedeuten. Aufserdem ergiebt sich aus der einfachen Betrachtung der Figur, dafs

$$\mu = \omega_1 - \omega + \frac{\pi}{2},$$

daher

$$\frac{d\omega_1}{d\omega} = \frac{d\mu}{d\omega} + 1$$

und wegen der obigen Gleichung (15)

$$\frac{d\omega_1}{d\omega} = \frac{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''}{\varrho^2 + \varrho'^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Überdies hat man $\varrho_1 = \varrho \sin\mu$, und deshalb wegen Gleichung (15)

$$\varrho_1 = \frac{\varrho^2}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Kombiniert man die Gleichungen (16) und (17), so bekommt man folgenden Ausdruck für die Ableitung der Fläche der ersten Fufspunktkurve

$$\frac{dA_1}{d\omega} = \frac{1}{2}\varrho_1{}^2 \frac{d\omega_1}{d\omega} = \frac{\varrho^4}{2}\,\frac{\varrho^2 + 2\varrho' - \varrho\varrho''}{(\varrho^2 + \varrho'^2)}.$$

Ebenso findet man

$$\omega_2 = 2(\omega_1 - \omega) + \omega, \qquad \varrho_2 = \varrho_1 \sin\mu,$$

oder zufolge des Vorhergehenden

$$\omega_2 = 2\left(\mu - \frac{\pi}{2}\right) + \omega, \qquad \varrho_2 = \varrho \sin^2\mu.$$

Ähnlich findet man dann, dafs im allgemeinen

$$\omega_m = m\left(\mu - \frac{\pi}{2}\right) + \omega, \qquad \varrho_m = \varrho \sin^m \mu \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

und daher ist

$$\frac{dA_m}{d\omega} = \frac{\varrho^2}{2}\left(\frac{\varrho^2}{\varrho^2 + \varrho'^2}\right)^m \cdot \left(m\,\frac{\varrho'^2 - \varrho\varrho''}{\varrho^2 + \varrho'^2} + 1\right) \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

1) Bertrand, *Calcul différentiel* (Paris 1864) S. 10 und 73; Peano, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (Torino 1887) S. 91; Lie-Scheffers, a. a. O. S. 17.

als bemerkenswerter Ausdruck für die Fläche der m^{ten} Fufspunktkurve[1]). Diesen z. B. für die Sinusspiralen anzuwenden, überlassen wir dem Leser.

273. Die Reihe der aufeinander folgenden Fufspunktkurven einer gegebenen Kurve Γ kann man auch rückwärts fortsetzen und somit die Kurve Γ_{-m} betrachten, von welcher Γ die m^{te} Fufspunktkurve sein würde. Sie wird als die m^{te} negative Fufspunktkurve bezeichnet, und auf sie kann man auch die Gleichung (19) anwenden, wenn man das Vorzeichen von m wechselt. Insbesondere handelt es sich meistens um die erste dieser Kurven, die man schlechthin als die negative Fufspunktkurve von Γ bezeichnet. Ein Beispiel hiervon liefert uns die Trisektrix von Catalan (Nr. **49**), welche die negative Fufspunktkurve einer Parabel in Bezug auf den Brennpunkt ist. Es ist klar, dafs die Γ_{-1} die Enveloppe derjenigen Geraden ist, die in den Punkten von Γ auf den Verbindungslinien derselben mit dem festen Punkte O senkrecht stehen. Hieraus ergiebt sich ein einfaches Verfahren, die Gleichung der negativen Fufspunktkurve zu erhalten für eine Kurve Γ, die durch die Polargleichung $\varrho = f(\omega)$ dargestellt ist, unter der Annahme, dafs der feste Punkt O mit dem Pole zusammenfällt. Da in diesem Falle

$$x \cos \omega + y \sin \omega - f(\omega) = 0$$

die allgemeine Gleichung der genannten Senkrechten ist, so hat man nur aus dieser und ihrer Ableitung $-x \sin \omega + y \cos \omega - f'(\omega) = 0$ ω zu eliminieren, um die Enveloppe zu erhalten.

Man hat weiterhin auch bemerkt, dafs das analytische Problem der Auffindung der Gleichung der negativen Fufspunktkurve nicht verschieden ist von dem, die Parallelkurve zu bestimmen. Um diese Beobachtung zu beweisen, betrachten wir eine beliebige Kurve Γ mit der Gleichung $f(x, y) = 0$, sowie diejenige Γ', die man erhält, wenn man die vom Anfangspunkte ausgezogenen Vectoren von Γ verdoppelt, dann ist die Gleichung von Γ' offenbar $f\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) = 0$. Die Parallelkurve von Γ' im Abstande k ist die Enveloppe des Kreises $(X - x)^2 + (Y - y)^2 = k^2$; wenn man nun $x = 2\xi$, $y = 2\eta$ setzt, so wird ihre Gleichung das Resultat der Elimination von ξ, η aus den drei folgenden Gleichungen sein

$$f(\xi, \eta) = 0, \quad (X - 2\xi)^2 + (Y - 2\eta)^2 = k^2, \quad \frac{X - 2\xi}{\frac{\partial f}{\partial \xi}} = \frac{Y - 2\eta}{\frac{\partial f}{\partial \eta}}. \quad (20)$$

---

1) Betreffs weiterer Entwickelungen über diesen Gegenstand s. man die Note von Barisien, *Sur les podaires successives d'une courbe* (Nouv. Ann. 3. Ser. XIV, 1895) und für die Untersuchung einer speziellen Klasse von Fufspunktkurven die Abh. von F. P. Ruffini, *Delle pedali delle parabole cubiche divergenti* (Bologna Mem. 5. Ser. V, 1896).

Nun ist aber die negative Fufspunktkurve von Γ, wenn der Pol im Anfangspunkte liegt, die Enveloppe der ∞^1 durch die Gleichung

$$(X-x)x+(Y-y)y=0$$

dargestellten Geraden, wobei der Punkt (x, y) auf Γ variiert; demnach ist deren Gleichung das Resultat der Elimination von x, y aus den dreien

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y)=0, \quad (X-2x)^2+(Y-2y)^2=4(X^2+Y^2), \\ \dfrac{X-2x}{\dfrac{\partial f}{\partial x}}=\dfrac{Y-2y}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (21)$$

Vergleichen wir die beiden Systeme (20) und (21) mit einander, so sehen wir sogleich, dafs das letztere aus den ersteren hervorgeht, indem man $\frac{k}{2}$ an Stelle von $\sqrt{X^2+Y^2}$ setzt; daher kann man folgenden Schlufs ziehen: **Es sei eine ebene Kurve Γ gegeben; man konstruiere eine zweite Γ', indem man die von einem festen Punkte P ausgehenden Vectoren von Γ verdoppelt. Hat man nun die Gleichung der Parallelkurve von Γ' im Abstande k gefunden, so erhält man die der negativen Fufspunktkurve von Γ in Bezug auf P, wenn man in jener Gleichung k durch $2\sqrt{x^2+y^2}$ ersetzt** [1]).

Die Definition der negativen Fufspunktkurve einer Kurve Γ als Enveloppe aufgefafst ist so einfach, dafs sie uns gestattet, durch geometrische Überlegungen ganz leicht viele von den Eigenschaften jener Kurve abzuleiten, insbesondere wenn Γ algebraisch ist; dies soll im Folgenden gezeigt werden [2]).

Um anzudeuten, dafs die Ausgangskurve von der Ordnung n sein soll, wollen wir sie im Folgenden mit Γ^n bezeichen und ihre negative Fufspunktkurve in Bezug auf den Pol O mit Π. Bemerken wir zunächst, dafs einem r-fachen Punkte von Γ^n eine r-fache Tangente von Γ entspricht, insbesondere einem Doppelpunkte von Γ^n eine Doppeltangente von Π, einer Spitze aber ein Wendepunkt. — Greifen wir in der Ebene der beiden Kurven einen beliebigen Punkt P heraus und beschreiben über OP als Durchmesser einen Kreis, so wird dieser die Γ^n in $2n$ Punkten schneiden; jeder von diesen ist Ausgangspunkt einer durch P gehenden Tangente von Π; somit giebt es $2n$ Tangenten derselben die durch P gehen, und da es andere nicht giebt, so folgt: **Die negative Fufspunktkurve Π von Γ^n ist im allgemeinen von der Klasse $2n$.** Aus den gemachten Überlegungen geht auch hervor, dafs, wenn P ein k-facher Punkt von Γ^n wäre und diese i-mal

1) Dieser Satz ist von Strebor (d. i. W. Roberts) ausgesprochen in der Note: *Théorème sur les courbes planes* (Nouv. Ann. XIX, 1860).

2) Ameseder, *Theorie der negativen Fufspunktkurven* (Archiv der Math. LXIV, 1879).

durch die unendlich fernen Kreispunkte ginge, die Klasse von Π auf $2(n-i)-k$ sinken würde. Wenn z. B. n gerade und $i=k=\frac{n}{2}$ wäre, so würde die Klasse von der negativen Fufspunktkurve $=\frac{n}{2}$ sein, was im Falle $n=2$ offenbar zutrifft.

Es sei U ein unendlich ferner Punkt von Γ^n, der nicht mit einem der Kreispunkte zusammenfällt; das von u auf PU gefällte Lot fällt dann mit der unendlich fernen Geraden zusammen, daher wird diese eine Tangente von Π, und sie ist dies so oft, als es unendlich ferne Punkte auf Γ^n giebt, die nicht Kreispunkte sind. Demnach: **Wenn eine Kurve Γ^n durch jeden der Kreispunkte geht, so hat ihre negative Fufspunktkurve Π die unendlich ferne Gerade als $(n-2i)$-fache Tangente.** Wenn in diesem Falle P ein k-facher Punkt von Γ^n ist, so schneidet die Gerade, welche ihn mit einem der Kreispunkte verbindet, aufserdem die Kurve Γ^n in $n-k-i$ Punkten Q; die von Q auf PQ gefällten Lote fallen bekanntlich mit diesen Geraden selbst zusammen; daher: **Die negative Fufspunktkurve eines k-fachen Punktes P einer Kurve, die i-mal durch jeden der beiden unendlich fernen Kreispunkte geht, hat die Geraden, welche P mit den Kreispunkten verbinden, als $(n-k-i)$-fache Tangenten.**

Wir beschreiben einen beliebigen Kreis über OP als Durchmesser, und betrachten zwei seiner Schnittpunkte M_1 und M_2 mit der gegebenen Kurve. $PM_1\equiv t_1$ und $PM_2\equiv t_2$ werden dann Tangenten der negativen Fufspunktkurve von O sein. Stellen wir uns nun vor, dafs dieser Kreis sich in der Weise verschiebe, dafs M_1 und M_2 zusammenrücken; alsdann kommt t_2 der t_1 unendlich nahe, und der Punkt P, in welchem sich t_1 und t_2 schneiden, strebt dahin, mit dem Berührungspunkte der Geraden t_1 mit ihrer eigenen Eveloppe zusammenzufallen, d. h. mit einem Punkte von Π. Greifen wir daher auf Γ^n beliebig den Punkt M heraus und beschreiben den Kreis, der durch O geht und Γ^n in M berührt; der zweite Endpunkt des durch O gehenden Durchmessers ist ein Punkt der negativen Fufspunktkurve von Γ^n in Bezug auf O, und die Gerade PM ist die zugehörige Tangente. Damit haben wir eine Punktkonstruktion für die negative Fufspunktkurve Π.

Es sei t eine der von O an Γ^n gezogenen Tangenten, T der zugehörige Berührungspunkt; die in T zu t errichtete Senkrechte n wird dann eine Tangente von Π sein. Konstruieren wir jetzt den Berührungspunkt nach dem oben angegebenen Verfahren, so sehen wir, dafs er ins Unendliche fällt. **Die negative Fufspunktkurve hat also so viele Asymptoten, als es Tangenten vom Pole O an die Fundamentalkurve giebt;** sie entsprechen den Normalen der Fundamentalkurve selbst. Ist Γ^n eine allgemeine Kurve ihrer Ordnung, und der Punkt O gehört dieser nicht an, so ist die Zahl der Asymptoten

$n(n-1)$, und da in diesem Falle die unendlich ferne Gerade eine n-fache Tangente von Π ist (s. oben), so hat diese insgesamt $n(n+1)$ Schnitte mit der unendlich fernen Geraden; das zeigt, **dafs die negative Fufspunktkurve einer Kurve von der Ordnung n im allgemeinen von der Ordnung $n(n+1)$ ist.** Die Veränderungen, die diese Zahl in speziellen Fällen erleidet, lassen sich leicht durch einfache Modifikationen der hier angewendeten Schlüsse ermitteln.

Wenn ein durch O gehender Kreis Γ^n sowohl in M als auch in $\overline{M}$ berührt, so ist der dem Punkte O diametral gegenüberliegende Punkt P ein Berührungspunkt der negativen Fufspunktkurve Π sowohl mit der Geraden PM, als anch mit $P\overline{M}$, demnach ist P ein Doppelpunkt von Π. **Die Kurve Π hat also soviele Doppelpunkte, als es doppeltberührende Kreise Γ^n giebt, die durch O gehen**; ähnlich erkennt man, **dafs Π soviele Spitzen hat, als es Schmiegungskreise von Γ_n giebt, die durch P gehen.** Wenn Γ^n eine allgemeine Kurve ist, die zum Punkte P keine spezielle Lage hat, so hat die Kurve Π $4(n-1)(2n-3)$ Doppelpunkte und $6(n-1)$ Spitzen.

Nehmen wir z. B. an, dafs Γ^n ein centrischer Kegelschnitt sei[1]), so wird die negative Fufspunktkurve Π im allgemeinen sechster Ordnung sein, von der vierten Klasse und mit 4 Doppelpunkten und 6 Spitzen; Doppeltangenten derselben sind die unendlich ferne Gerade und die Geraden, welche den festen Punkt P mit den Kreispunkten verbinden. Ist aber Γ^n eine Parabel, so ist ihre negative Fufspunktkurve auch von der vierten Klasse, aber nur von der fünften Ordnung; sie hat 4 Spitzen, der unendlich ferne Punkt der Parabelaxe ist für sie ein Wendepunkt mit der unendlich fernen Geraden als zugehöriger Tangente u. s. w.

Wenn insbesondere Γ^n die Ellipse ist mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

so heifst die erste negative Fufspunktkurve die Talbot'sche Kurve, von dem Namen des Geometers, der zuerst bemerkt hat[2]), dafs ihre Rektifikation von elliptischen Integralen abhängt. Setzt man zur Abkürzung $a^2+b^2=2s^2, \quad a^2-b^2=2d^2,$

so lautet die Gleichung dieser Kurve[3])

$$[3(a^2x^2+b^2y^2)-4(s^4+3d^4]^3$$
$$+[9(s^2-3d^2)a^2x^2+9(s^2+3d^2)b^2y^2-8d^2(s^4-9d^4)]^2=0,$$

---

1) Ameseder, *Negative Fufspunktkurven der Kegelschnitte* (Archiv der Math. LXIV, 1879).

2) Annales de math. XIV, 1823—24, S. 380.

3) Tortolini, *Sopra l'equazione di una curva del sest' ordine, che s'incontra in un problema riguardante l'ellissi* (Raccolta di lettere etc. II, Roma 1846; Crelle's Journ. XXXIII, 1846); *Inviluppo d'una perpendicolare condotta a un diametro dell' ellisse all' estremità di questo diametro* (Nouv. Ann. V, 1846).

sie ist also von der sechsten Ordnung in Übereinstimmung mit der allgemeinen Theorie[1]).

274. Wenn man den Ort der Punkte aufsucht, die symmetrisch in Bezug auf die Tangenten einer Kurve Γ zu einem festen Punkte O sind, so erhält man eine neue Kurve, die offenbar homothetisch zur Fufspunktkurve von Γ in Bezug auf den Punkt O ist, indem das Homothetie-Verhältnis gleich 2 ist. Sie heifst die Podoide von Γ in Bezug auf O.[2]) Wenn man O als Anfang nimmt, und $f(x,y)=0$ als Gleichung von Γ, so ist die der Tangente im Punkte x, y

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

wo X, Y die laufenden Koordinaten sind. Sind nun x_1, y_1 die des entsprechenden Punktes M der Podoide, so wird die Gleichung der Geraden, welche die Strecke OM senkrecht halbiert,

$$Xx_1+Yy_1-\frac{x_1^2+y_1^2}{2}=0$$

sein; diese fällt aber nach der Annahme mit jener Tangente zusammen; daher mufs

$$\frac{x_1}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{y_1}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{x_1^2+y_1^2}{2\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)}$$

und folglich

$$x_1=\frac{2\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\frac{\partial f}{\partial x},\qquad y_1=\frac{2\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\frac{\partial f}{\partial y}\ .\ .\quad (22)$$

Diese Gleichungen stellen analytisch die podoidale Transformation dar. Bei dieser entspricht, in gleicher Weise wie bei der Fufspunkttransformation, jeder Tangente einer Kurve ein Punkt: wie jene, ist sie in gewissem Sinne analog zu derjenigen, welche jeder Tangente das Centrum des Kreises, in welchen sie sich durch eine gegebene Transformation durch reziproke Radien verwandelt, entsprechen läfst. Nehmen wir als Anfang das Centrum derselben, und nehmen

$$x\cos\varphi+y\sin\varphi-f(\varphi)=0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad (23)$$

---

1) Ändert man das Vorzeichen von b^2, so erhält man die Gleichung der ersten negativen Fufspunktkurve der Hyperbel, welche im Falle $b=a$ die Polargleichung $\varrho^{-\frac{2}{3}}=a^{-\frac{2}{3}}\cos\left(-\frac{2}{3}\omega\right)$ hat und eine Sinusspirale ist; s. Ann. de math. XII, S. 321 und XIII, S. 115 u. 142. Ein anderes Beispiel einer speziellen negativen Fufspunktkurve findet sich in der Abh. Ruffini's, *Delle linee piane algebriche le pedali delle quali possono essere curve che hanno potenza in ogni punto del loro piano* (Bologna Mem. 5. Ser. IV, 1895).

2) Brocard, *Notes de bibliographie des courbes géométriques* (Bar le-Duc 1897) S. 221.

als „magische Gleichung" der Tangente an die gegebene Kurve, und ist k^2 die Potenz jener Transformation, so verwandelt sich die Gerade (23) in den Kreis

$$x^2 + y^2 - \frac{k^2}{f(\varphi)}(x \cos\varphi + y \sin\varphi) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Da sein Mittelpunkt nun die Koordinaten hat

$$x_0 = \frac{k^2 \cos\varphi}{2 f(\varphi)}, \quad y_0 = \frac{k^2 \sin\varphi}{2 f(\varphi)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

so ist dies die parametrische Darstellung der Inversionskurve zur gegebenen[1]). — Die beiden angegebenen Transformationen haben bis jetzt keine Resultate geliefert, die uns veranlassen könnten, weiteres über sie anzuführen als diesen flüchtigen Hinweis.

Neuntes Kapitel.

Die isoptischen und orthoptischen Kurven.

275. Bewegt man einen Winkel α so, daſs seine beiden Schenkel immer dieselbe Kurve Γ berühren, so beschreibt der Scheitelpunkt A eine neue Kurve, welche die isoptische Kurve von Γ heiſst, weil sie offenbar der Ort der Punkte ist, von welchen aus die Kurve Γ unter dem gleichen Winkel α gesehen wird. Ist dieser Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so heiſst die Kurve die orthoptische[2]). Ist z. B. Γ ein centrischer Kegelschnitt, so ist die orthoptische Kurve ein Kreis, ist sie eine Parabel, so ist jene eine Gerade (nämlich die Direktrix); die isoptischen Kurven dagegen sind uns schon bekannte Kurven vierter Ordnung (s. Nr. **64**).

Es ist leicht zu beweisen, daſs die Tangente in einem Punkte A der isoptischen Kurve von Γ daselbst auch den Kreis berührt, der durch A und die beiden entsprechenden Berührungspunkte der Schenkel des bewegten Winkels mit Γ geht[3]).

Ist die Kurve Γ durch die magische Gleichung ihrer Tangente definiert

$$y \cos\tau - x \sin\tau - f(\tau) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

---

1) R. Raimondi, *Sulle curve d'inversione* (Giorn. di Matem. XXVI, 1888).

2) Diese Namen wurden von C. Taylor (*Note on a theory of orthoptic and isoptic loci,* Proc. of the R. S. London XXXVII, 1884; Rep. Brit. Ass. 1885; The Messenger XVI, 1886) vorgeschlagen. Für den Fall der Kegelschnitte wandte Laquière (*Théorie géométrique des courbes anallagmatiques, sections plans de la cyclide,* Nouv. Corr. math. VI, 1880) aus leicht begreiflichen Gründen den Namen parallaktische Kurven an, den man auch im allgemeinen benutzen könnte.

3) Bertrand, *Calcul différentiel* (Paris 1864) S. 13 u. 84.

so ist klar, dafs die isoptische Kurve durch das System der Gl. (1) und

$$y \cos(\tau + \alpha) - x \sin(\tau + \alpha) - f(\tau + \alpha) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

dargestellt wird. Leitet man nun hieraus die folgenden ab,

$$\left.\begin{array}{l} x \sin\alpha = \sin(\tau + \alpha) \cdot f(\tau) - \sin\tau \cdot f(\tau + \alpha), \\ y \sin\alpha = \cos(\tau + \alpha) \cdot f(\tau) - \cos\tau \cdot f(\tau + \alpha), \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (3)$$

so hat man eine parametrische Darstellung der isoptischen Kurve. Die Aufstellung der Kurvengleichung (das direkte Problem der isoptischen Kurve) erfordert also nur algebraische Operationen. Schwieriger ist das umgekehrte Problem der isoptischen Kurven: dahin gehört u. a. die Aufsuchung derjenigen Kurven, die mit den Kegelschnitten die Eigenschaft teilen, dafs ihre orthoptischen Kurven Kreise seien[1]).

Die Betrachtung der hier besprochenen Kurven geht bis in den Anfang des 18. Jahrhunderts zurück, indem schon De La Hire die isoptischen der Kegelschnitte[2]) und der Cykloiden[3]) bestimmt hat, und bald darauf Clairaut sich mit dem inversen Problem der isoptischen Kurven beschäftigte[4]) und Fontanes mit dem direkten[5]). Später entdeckte Chasles[6]), dafs die isoptische einer gemeinen Epicykloide eine verlängerte bezw. verkürzte Epicykloide ist, eine Erweiterung eines der von La Hire erhaltenen Resultate.

Wenn Γ eine algebraische Kurve ist, so werden es auch alle isoptischen sein; daher ergiebt sich die Aufgabe, die Plücker'schen Charakteristiken derselben zu bestimmen, wenn die von Γ bekannt sind; diese wurde teils von de Jonquières[7]), vollständiger von

1) Es ist dies die Question 1049 der Nouv. Ann., gestellt von Kiepert und gelöst von Bourget (Das. 2. Ser. XII, 1873, S. 328); vgl. auch die Bemerkungen von Doucet (Das. S. 571), aufserdem Nouv. Ann. 2. Ser. XVIII, 1878, S. 144.

2) *Construction générale des lieux où sont les sommets de tous les angles égaux, droits, aigus ou obtus qui sont formés par les touchantes des sections coniques* (Mém. de Paris 1704). Die isoptische eines Kegelschnittes in einer allgemeinen projektiven Mafsbestimmung ist der Ort der Punkte, von denen man an zwei Kegelschnitte zwei Paare von Tangenten ziehen kann, die ein gegebenes Doppelverhältnis haben; dieser ist eingehend von Cayley untersucht worden (*On a locus derived from a conic.* Quart. Journ. VIII, 1867).

3) *Déscription d'un lieu géométrique, où sont les sommets des angles égaux, formés par deux touchantes d'une cycloïde* (Mém. de Paris, 1704).

4) *Solution de plusieurs problèmes où il s'agit des courbes dont la propriété consiste dans une certaine rélation entre leurs branches, exprimée par une équation donnée* (Mém. de Paris, 1724). 5) Ebendaselbst.

6) *Aperçu historique* (2. Aufl. Paris 1875) S. 125 Note. Vgl. Loucher, *Sur le lieu des sommets des angles constantes circonscrits ou normaux à une épicycloïde* (Nouv. Ann. 2. Ser. XI, 1892).

7) *Lieu géométrique du sommet d'un angle de grandeur constante circonscrit à une courbe de classe n* (Nouv. Ann. XX, 1861).

Taylor[1]) behandelt, und mit Benutzung der Björling'schen Methoden von A. T. Ljungh[2]) vollständig gelöst.

Der Begriff der isoptischen Kurve läfst sich verallgemeinern: man kann den Ort der Scheitel eines Winkels von konstanter Gröfse betrachten, dessen Schenkel fortwährend zwei gegebene Kurven Γ', Γ'' berühren[3]). Wenn diese algebraisch sind, so ist es auch die resultierende Kurve und man kann auch ihre Charakteristiken erhalten, indem man die Resultate für die Plücker'schen Zahlen der isoptischen einer Kurve in Anwendung bringt. Wenn man nämlich die beiden Kurven Γ' und Γ'' als eine einzige Γ betrachtet, so wird die isoptische von Γ bestehen 1) aus der von Γ', 2) aus der von Γ'', 3) aus der von Γ' und Γ''; da man nun die Charakteristiken von $\Gamma', \Gamma'', \Gamma$ kennt und die der Kurven 1) und 2) bestimmen kann, so lassen sich die von 3) daraus ableiten. — Wenn der konstante Winkel ein rechter ist, so wird die erhaltene Kurve auch die Fufspunktkurve der einen Kurve in Bezug auf die andere genannt[4]). Reduziert sich nämlich die eine der beiden Kurven auf einen Punkt, so haben wir wieder die Fufspunktkurve der anderen im gewöhnlichen Sinne; damit ist eine Beziehung zwischen den orthoptischen und den Fufspunktkurven hergestellt.

Das Problem der orthoptischen Kurve zweier Kurven (sowie das der isoptischen) läfst sich ebenfalls umkehren. Sind nämlich zwei Kurven Γ' und Γ gegeben, so kann man eine dritte Kurve Γ'' aufsuchen, derart, dafs Γ die orthoptische der beiden Kurven Γ' und Γ'' wird. Γ'' ist dann offenbar die Enveloppe des zweiten Schenkels des rechten Winkels, dessen erster Schenkel fortwährend die Kurve Γ' berührt und dessen Scheitel Γ durchläuft. Die Aufsuchung von Γ'' bietet also keine theoretischen Schwierigkeiten. Wenden wir dies an auf den Fall, dafs Γ' die logarithmische Kurve mit der Gleichung

$$\frac{y}{a} = \log \frac{x}{a}$$

sei und die Kurve Γ ihre Asymptote $x = 0$[5]). Da nun

$$Y + a - a \log \frac{x}{a} - \frac{a}{x} X = 0$$

die allgemeine Gleichung der Tangente ist, so mufs die gesuchte

1) S. die in Note 2 S. 686 citierten Schriften.

2) S. die Diss. *Ueber isoptische und orthoptische Kurven* (Lund 1895), wo die allgemeinen Resultate auf einige bemerkenswerte Kurvenfamilien, wie die Parabeln höherer Ordnung, die Epicykloiden etc. angewandt sind.

3) H. G. S. Schotten, *Ueber Fufspunktskurven* (Progr. Hersfeld, 1887). — Auf derartige Kurven bezieht sich die Question 187, gestellt von Chasles in den Nouv. Ann.

4) Habich, *Annali di Matem.* 2. Ser. II, 1868—69, S. 141.

5) Die folgenden Sätze wurden dem Verfasser brieflich mitgeteilt von J. Finsterbusch in Zwickau.

Kurve Γ'' die Enveloppe der ∞^1 Geraden sein, die bei Variation von x dargestellt werden durch

$$Y + a - a \log \frac{x}{a} + \frac{x}{a} X = 0 .$$

Differenzieren wir nach x, so erhalten wir $x = \frac{a^2}{X}$, daher wird die vorige Gleichung

$$Y + 2a - a \log \frac{a}{X} = 0 ,$$

oder

$$-\frac{Y + 2a}{a} = \log \frac{X}{a} ;$$

diese Gleichung beweist, **dafs die gesuchte Kurve selbst eine der gegebenen gleiche Kurve ist.** Die beiden Kurven Γ' (die gegebene) und Γ'' (die gesuchte) entsprechen sich Punkt für Punkt; **die Gerade, welche zwei entsprechende Punkte P' und P'' verbindet, umhüllt eine Kettenlinie**, die, wie sich leicht zeigen läfst, die Gleichung hat

$$x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{y+a}{a}} + e^{-\frac{y+a}{a}}\right) ;$$

ebenso leicht läfst sich zeigen, **dafs dieselbe der geometrische Ort der Mittelpunkte der Strecken $P_1 P_2$ ist.**

Zehntes Kapitel.

Die Differenzial- und Integralkurven; ähnliche Ableitungsgesetze.

276. Ist die Gleichung einer Kurve in kartesischen Koordinaten,

$$y = f(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

gegeben, so kann man dem Beispiele Kästner's folgend, eine neue Kurve betrachten, die durch die Gleichung

$$y = f'(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

dargestellt wird. Diese heifst die Differenzialkurve[1]) oder Derivationskurve[2]) der gegebenen. Verfährt man nun mit der Kurve (2) wie mit (1), so erhält man eine zweite Differenzialkurve, dann eine dritte u. s. w.; das Verfahren würde nur dann zu einem Abschlusse kommen, wenn f ein ganzes Polynom von x wäre. Die Eigenschaften der abgeleiteten Kurve lassen sich mit Leichtigkeit aus denen der Originalkurve herleiten, wenn man die Beziehungen beachtet, die zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung bestehen: so entsprechen den Kulminationspunkten der ursprünglichen Kurve die Schnitte der

1) Cantor, *Vorlesungen über Gesch. d. Math.* III, 2. Aufl. (Leipzig 1901) S. 583.
2) E. Rehfeld, *Die Derivationskurve der Cykloide* (Diss. Marburg, 1884).

abgeleiteten mit der x-Axe, den Wendepunkten jener die Kulminationspunkte dieser u. s. w.

Die Betrachtung der Differenzialkurve bietet namentlich dann ein gewisses Interesse, wenn $f(x)$ eine transscendente Funktion, $f'(x)$ aber algebraisch ist, weil dann der Fall vorliegt, dafs eine transscendente Kurve mit einer algebraischen eng verknüpft ist. Dies trifft insbesondere zu bei der Cykloide. Diese hat nämlich die Gleichung

$$y = \arccos \frac{x-a}{a} + \sqrt{2ax - x^2};$$

ihre Differenzialkurve aber ist

$$y = \frac{x}{\sqrt{2ax - x^2}}$$

oder

$$(x - 2a)y^2 + x = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Sie ist daher eine Kurve dritter Ordnung, die symmetrisch in Bezug auf die x-Axe ist und ganz innerhalb des von den Geraden $x = 0$, $x = 2a$ begrenzten Streifens liegt, letztere Gerade ist eine Wendeasymptote derselben, die übrigen reellen Wendepunkte haben die Koordinaten $x = \frac{a}{2}$, $y \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$; sie hat also die Gestalt einer Serpentine. Ihre Hesse'sche hat zur Gleichung

$$xy^2 + 4ay^2 + x - 2a = 0;$$

setzt man hierin $2a - x = \xi$, so wird diese zu

$$(\xi - 6a)y^2 + \xi = 0,$$

die sich von (3) nur durch den Übergang von x in ξ und von a in $3a$ unterscheidet. Folglich: **Die Differenzialkurve der Cykloide ist eine Kurve dritter Ordnung, deren Hesse'sche eine dieser ähnliche Kurve ist;** es ist dies dies die hervorragendste Eigenschaft derselben.

Auch für Polarkoordinaten sind die Differenzialkurven betrachtet worden, und zwar von J. Sobotka[1]). Ist $\varrho = f(\omega)$ die Gleichung einer Kurve, so ist $\varrho' = f'(\omega)$ die der zugehörigen Differenzialkurve. Denkt man sich nun den Vector ϱ' von demselben Pole aus abgetragen, aber in senkrechter Richtung zu ϱ, so ist sein Endpunkt bekanntermafsen der Endpunkt der zugehörigen Subnormalen. Wir haben es also in diesem Falle mit dem geometrischen Orte Γ' der Endpunkte der Polarsubnormalen einer Kurve Γ zu thun[2]). Die Beziehung zwischen den Punkten $P(\varrho, \omega)$ von Γ und den Punkten $P'(\varrho', \omega')$ von Γ' wird durch die Formeln

$$\varrho' = \frac{d\varrho}{d\omega}, \qquad \omega' = \omega + \frac{\pi}{2} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

1) S. § II des *Beitrag zur infinitesimalen Geometrie der Integralkurven* (Wiener Ber. CVII, 1898).

2) Vgl. Schlömilch, *Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis* I. (III. Aufl. 1878) S. 124.

ausgedrückt. Ist Γ algebraisch, so wird es auch Γ' sein, und es entsteht dann die Frage, welche Beziehung zwischen den Ordnungen der beiden Kurven bestehe. Nehmen wir daher an, dafs $f(x, y) = 0$ die Gleichung von Γ in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten sei, so hat man, um den Punkt $P'(x', y')$ von Γ' zu finden, der dem Punkte $P(x, y)$ entspricht, den Schnittpunkt der Tangente in P an Γ mit der in O zu OP errichteten Senkrechten aufzusuchen. Nun haben die genannten Geraden, wenn X, Y die laufenden Koordinaten sind, bezüglich die Gleichungen

$$X\frac{\partial f}{\partial y} - Y\frac{\partial f}{\partial x} = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad Xx + Yy = 0;$$

infolgedessen ist

$$x' = y\frac{x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}}{x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}}, \qquad y' = -x\frac{x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}}{x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}}. \quad . \quad . \quad (5)$$

Diese Formeln liefern für jedes Wertepaar x, y, das der Gleichung (4) genügt, die Koordinaten des entsprechenden Punktes x', y'. Um die Ordnung von Γ' zu finden, müssen wir aufsuchen, wie viele ihrer Punkte sich auf der beliebigen Geraden r

$$Ax + By + C = 0$$

befinden. Es mufs dann auch

$$Ax' + By' + C = 0$$

sein, oder wegen Gleichung (5)

$$(Ay - Bx)\left(x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}\right) + C\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0.$$

Nun stellt diese Gleichung im allgemeinen eine Kurve von der Ordnung $n+1$ dar, welche die Kurve n^{ter} Ordnung $f(x, y) = 0$ in denjenigen Punkten P schneidet, deren entsprechende Punkte P' auf der Geraden r liegen; also: **Der Ort der Endpunkte der Polarsubnormalen einer Kurve n^{ter} Ordnung ist im allgemeinen von der Ordnung $n(n+1)$.**[1]) Jeder p-fache Punkt vermindert diese Zahl im allgemeinen um $p(p-1)$ Einheiten[2]); für eine rationale Kurve n^{ter} Ordnung reduziert sie sich daher auf $n(n+1) - (n-1)(n-2) = 2(2n-1)$.

---

1) Z. B. für einen Kegelschnitt ist sie eine Kurve sechster Ordnung; vgl. Schlömilch, a. a. O. S. 124.

2) Als Kontrolle betrachte man eine Kurve Γ von der Ordnung n, die aus zwei Kurven Γ_1, Γ_2 von den Ordnungen n_1 bezw. n_2 zusammengesetzt ist. Der Ort der Endpunkte der Polarsubnormalen von Γ besteht alsdann aus den beiden Γ_1 und Γ_2 entsprechenden Orten, ist daher von der Ordnung $n_1(n_1+1)+n_2(n_2+1)$. Diese Zahl mufs man auch erhalten, wenn man den obigen Satz auf Γ, welches die Ordnung n_1+n_2 hat, anwendet, als $(n_1+n_2)(n_1+n_2+1) - 2n_1n_2$; dies ist aber gleich $n_1(n_1+1)+n_2(n_2+1)$, wie eben gefunden.

Wenn ferner der Pol ein p-facher Punkt ist, so vermindert sich die Ordnung um p^2 Einheiten.

Die Analogie führte auch zur Betrachtung des Ortes Γ_1 der Endpunkte der Polarsubtangenten[1]). Sind $P(\varrho, \omega)$ und $P_1(\varrho_1, \omega_1)$ zwei entsprechende Punkte der beiden Kurven, so hat man

$$\varrho_1 = \varrho_2 : \frac{d\varrho}{d\omega}, \qquad \omega_1 = \omega + \frac{\pi}{2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

welche Beziehungen uns die Gleichung von Γ_1 finden lassen, wenn die von Γ gegeben ist. Wenn hingegen Γ durch eine Gleichung in kartesischen rechtwinkligen Koordinaten gegeben wäre, so hätte man, um die von Γ_2 zu finden, folgende Formeln anzuwenden:

$$x_1 = -y \frac{x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}}{x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}}, \qquad y_1 = x \frac{x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}}{x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}}, \quad . \quad . \quad (7)$$

die man durch ähnliche Rechnungen wie die Gleichungen (5) findet. Aus (7) ergiebt sich durch eine der obigen ähnliche Betrachtung, dafs **der Ort der Endpunkte der Polarsubtangenten einer Kurve n^{ter} Ordnung von der Ordnung $n(n+1)$ ist**; jeder p-fache Punkt vermindert diese um $p(p-1)$ Einheiten [für eine rationale Kurve ist sie daher $2(2n-1)$], wenn aber dieser Punkt mit dem Pole zusammenfällt, so beträgt die Verminderung p^2 Einheiten.

277. Aus der durch Gleichung (1) dargestellten Kurve lassen sich noch andere unzählig viele durch ein dem vorigen entgegengesetztes Verfahren ableiten, indem man aus (1) die Gleichung

$$y = \int_0^x f(x) \cdot dx + c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

ableitet. Hierbei bedeutet c eine beliebige Konstante, durch deren Variation man Kurven erhält, von denen die eine aus der anderen durch eine blofse Verschiebung in der Richtung der y-Axe hervorgeht; es genügt daher von diesen eine einzige zu betrachten z. B. die durch den Anfangspunkt gehende, die dem Falle $c = 0$ entspricht. Die neuen Kurven Γ_i heifsen Integralkurven und bieten mancherlei Interesse, insbesondere durch ihre praktischen Anwendungen[1]). Ihre hauptsächlichsten Eigenschaften drücken geometrisch aus, welche Beziehung zwischen einer Funktion und ihren Integralen besteht: so erkennt man z. B. dafs den Schnitten von Γ mit der x-Axe die Kul-

---

1) Schlömilch, a. a. O. S. 121.

2) Abdank-Abakanowicz, *Die Integraphen. Die Integralkurven und ihre Anwendungen,* deutsch bearbeitet von E. Bitterli (Leipzig 1889). Bezüglich des Begriffes und der Eigenschaften der inversen Integralkurven und der Integralkurven in Bezug auf eine gegebene Kurve verweisen wir den Leser auf die o. a. Arbeit von Sobotka.

minationspunkte von Γ_i entsprechen, dagegen den Kulminationspunkten von Γ die Wendepunkte von Γ_i, u. s. w. Wir wollen die Reihe solcher Sätze nicht weiter verfolgen, sondern lieber den Satz von d'Ocagne beweisen, der uns das Krümmungscentrum für einen beliebigen Punkt der Integralkurve zu konstruieren lehrt[1]). Dieser Satz lautet: **Ist R der Krümmungsradius der Integralkurve Γ_i, σ die Subtangente der gegebenen Kurve Γ, und θ der Winkel, den die Tangente von Γ_i mit der x-Axe bildet, so ist**

$$\sigma = R \cos^2\theta \cdot \sin\theta \,. \qquad (10)$$

Es seien (Taf. XVII, Fig. 141) M und M_i zwei entsprechende Punkte von Γ und Γ_i, P der Schnittpunkt von Ox mit der Ordinate MM_i, MT die Tangente von Γ, dann ist

$$PT = \sigma = y\frac{dx}{dy}.$$

Setzen wir aber $M_iP = Y$, so ist

$$\frac{dY}{dx} = \operatorname{tg}\theta,$$

also $\operatorname{tg}\theta = y$, und daher

$$\sigma = \operatorname{tg}\theta\frac{dx}{dy}.$$

Wenn nun ds_i das Differenzial des Bogens der Integralkurve ist, so hat man bekanntlich

$$R = \frac{ds_i}{d\theta};$$

es ist aber

$$ds_i = \frac{dx}{\cos\theta}, \qquad \operatorname{tg}\theta = y, \qquad \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = dy;$$

folglich

$$R = \frac{dx}{\cos\theta} : dy \cdot \cos^2\theta = \frac{dx}{dy}\cdot\frac{1}{\cos^3\theta}.$$

Eliminieren wir hieraus $\frac{dx}{dy}$ vermittelst der vorigen Gleichungen, so finden wir in der That die Relation (10). — Hieraus läfst sich eine Konstruktion der Krümmungscentrums C ableiten: Die Normale M_i an Γ_i schneide die Ordinate von T in T', die in T' auf der Normalen errichtete Senkrechte schneide die Ordinate von M_i in Q; die durch Q zur x-Axe gezogene Parallele schneidet die Normale in dem gesuchten Punkte C. Den Beweis mit Hilfe der Gleichung (10) zu führen, überlassen wir dem Leser.

Die Konstruktion von d'Ocagne könnte man auch aus einer Eigenschaft der Integralkurven herleiten, die J. Sobotka geometrisch bewiesen hat[2]), zu der man jedoch auch schnell durch folgende Rechnung gelangen kann.

Wir wollen annehmen, dafs die Kurve Γ, deren Gleichung $y = f(x)$

---

1) Vgl. Abdank-Abakanowicz a. a. O. S. 160—161.

2) S. § I. des in Note 1, S. 690 citierten *Beitrags*.

sei, durch den Punkt $P(a, b)$ gehen möge; die Tangente t in diesem Punkte hat dann die Gleichung

$$\eta = f(a) + (x - a) f'(a),$$

wo x und η die laufenden Koordinaten auf der Tangente selbst sind. Nehmen wir nun an, dafs Γ_i, die Integralkurve von Γ, durch $P_i(A, B)$ gehe, so wird deren Gleichung lauten

$$Y - B = \int_A^x f(x) \cdot dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Konstruieren wir jetzt die Integralkurve T der Tangente t unter der Voraussetzung, dafs sie durch den Punkt P_i gehe, so wird deren Gleichung

$$\mathsf{H} - B = \int_A^x [f(x) + (x - a) f'(a)]\, dx$$

oder

$$\mathsf{H} - B = (x - A) f(a) + \frac{(x - A)^2}{2} f'(a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

T ist also eine Parabel. Aus den Gleichungen (α) und (β) ergiebt sich nun sofort, dafs für den Punkt P_i ist $Y = \mathsf{H}$, $Y' = \mathsf{H}'$, $Y'' = \mathsf{H}''$, und dies beweist, dafs die Kurven Γ_i und T sich nicht nur in dem gemeinsamen Punkte A berühren, sondern daselbst eine Berührung zweiter Ordnung haben. Somit ergiebt sich: **Der Tangente t der Kurve Γ in irgend einem Punkte P derselben entspricht als Integralkurve eine Parabel T, welche die Integralkurve Γ_i von Γ in den dem Punkte P entsprechenden Punkte P_i oskuliert.**

278. Eine gewisse Analogie mit den Differenzialkurven bieten solche Linien, die man aus der Kurve $y = f(x)$ erhält, wenn man y gleich einer Funktion von $f'(x)$ setzt[1]). Auf die hauptsächlichsten derselben soll hingewiesen werden, sowie auf einige neuen Kurven, die man durch solches Verfahren erhält.

I. Wir betrachten wieder eine Kurve Γ mit der Gleichung $y = f(x)$, sowie in ihrer Ebene einen beliebigen festen Punkt K (Taf. XVII,

---

1) Elementarer, jedoch weniger wichtig und fruchtbar ist das Verfahren, aus einer Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ eine neue $y_1 = F(f(x))$ abzuleiten, wo F eine neue gegebene Funktion ist. Z. B. kann man als neue Kurve ableiten $y_1 = \frac{1}{f(x)}$; eine einfache Rechnung zeigt, dafs die beiden Kurven in zwei derselben Ordinate entsprechenden Punkten gleiche Subtangenten aber von entgegengesetzten Vorzeichen haben (W. Rulf, *Ueber eine allgemeine Eigenschaft der Kurve der reziproken Ordinaten*, Archiv der Math. 2. Ser. XIII, 1894; vgl. auch den § VI des o. a. *Beitrags* von J. Sobotka). — Ähnlich kann man die Kurve $y_1 = f(x)^2$ bilden; die Subtangente in einem beliebigen Punkte der neuen Kurve ist gleich der Hälfte der Subtangente im entsprechenden Punkte der gegebenen (W. Rulf, *Bemerkung zu den aus einer Curve abgeleiteten Curven*, Das.). Im allgemeinen Falle hat man, wenn S und S_1 die Subtangenten in entsprechenden Punkten der beiden Kurven $y = f(x)$, $y_1 = F(f(x))$ sind,

$$S_1 : S = F(f) : f F'(f).$$

Fig. 142), den wir als auf der x-Axe gelegen mit der Abscisse $-k$ annehmen wollen, und eine beliebige Gerade g, die wir der Einfachheit halber als mit der y-Axe zusammenfallend annehmen. In einem beliebigen Punkte P von Γ ziehen wir die Tangente und durch K zu ihr die Parallele, bis sie die Gerade g in Q schneidet; die in Q zu g errichtete Senkrechte schneide die Ordinate von P in P'. Variiert man nun P auf Γ, so beschreibt der Punkt P' eine neue Kurve Γ', die von A. Hochheim die Differenzialkurve von Γ genannt wird[1]). Um deren Gleichung zu finden, beachte man, dafs die Gleichung der Tangente im Punkte $P(x, y)$ lautet

$$Y = f'(x)(X - x),$$

die zu ihr durch K gezogene Parallele aber hat die Gleichung

$$Y = f'(x)(X + k);$$

wenn man nun $X = 0$ macht, so erhält man $k \cdot f'(x)$ als Wert für die gemeinsame Ordinate der Punkte Q und P'. Daraus folgt, dafs

$$y_1 = k \cdot f'(x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

die Gleichung von Γ' ist; diese Kurve ist also affin zu der Differenzialkurve von Γ in Kästner'schem Sinne (Nr. **276**). Wiederholen wir für Γ' dieselbe Operation wie bei Γ und fahren so fort, so erhalten wir nach r Operationen die Kurve

$$y_r = k^r f^{(r)}(x), \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

die nach Hochheim die r^{te} Differenzialkurve von Γ heifst.

Falls Γ durch eine Gleichung, die nicht nach y auflösbar, gegeben ist, etwa durch

$$F(x, y) = 0,$$

so würde man die Differenzialkurve erhalten, indem man y aus dieser Gleichung und der folgenden

$$\frac{\partial F}{\partial y} y_1 + k \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

eliminiert; ist also F eine algebraische Funktion n^{ten} Grades in x, y, so ist die abgeleitete Kurve im allgemeinen von der Ordnung $2n(n-1)$; sie ist ferner von immer demselben Geschlechte wie Γ.

Welches auch die Natur der Funktion f sein möge, immer hat man

$$\int_{x=\alpha}^{x=\beta} y_1 \cdot dx = \int_{x=\alpha}^{x=\beta} k \cdot f'(x) \cdot dx = k[f(\beta) - f(\alpha)],$$

und daher ist die abgeleitete Kurve immer quadrierbar.

Als Beispiel nehmen wir zunächst die Parabel $y^2 = 2px$; dann ist die Gleichung von Γ'

$$y_1 = k\sqrt{\frac{p}{2x}} \quad \text{oder} \quad 2xy_1^2 = k^2 p.$$

1) *Ueber die Differentialkurve der Kegelschnitte* (Halle 1874).

Demnach ist Γ' eine Kurve dritter Ordnung symmetrisch zur x-Axe und ganz auf der positiven Seite derselben gelegen; der unendlich ferne Punkt von Ox ist eine Spitze der Kurve, der unendlich ferne von Oy ein Wendepunkt. Die Tangentialgleichung dieser Kurve lautet

$$uv^2 + \frac{8}{27k^2p} = 0,$$

und bezeugt, dafs sie von der dritten Klasse ist.

Als zweites Beispiel nehmen wir die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{oder} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Γ' hat dann die Gleichung

$$y_1 = \mp \frac{kb}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \text{oder} \quad a^2x^2y_1{}^2 - k^2b^2x^2 - a^4y_1{}^2 = 0,$$

und ist demnach (vgl. Nr. **97**) eine Kohlenspitzkurve.

Wechseln wir das Vorzeichen von b^2, so erkennt man, dafs die von der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ abgeleitete Kurve die Gleichung hat

$$a^2x^2y_1{}^2 + k^2b^2x^2 - a^4y_1{}^2 = 0;$$

diese ist also eine Kreuzkurve (s. Nr. **97**).

***279.** **II.** Die Daten seien dieselben wie im Falle I, auf die Kurve Γ werde dieselbe Konstruktion angewendet mit dem Unterschiede, dafs an Stelle der Tangente die Normale in P tritt und dafs $k, 0$ die Koordinaten des festen Punktes seien. Durch eine Rechnung, die ähnlich wie im Vorigen auszuführen ist, läfst sich zeigen, dafs, wenn der Punkt P die Kurve Γ $y = f(x)$ durchläuft, der Punkt P' eine Kurve Γ' beschreibt, deren Gleichung ist

$$y_1 = \frac{k}{f'(x)}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

sie heifst die erste abgeleitete Kurve in Bezug auf Γ[1]; ihre unendlich fernen Punkte entsprechen den Kulminationspunkten von Γ. Verfährt man mit Γ' ebenso wie mit Γ, so erhält man die zweite abgeleitete Kurve; ihre Gleichung lautet

$$y_2 = \frac{k}{\frac{d}{dx}\left(\frac{k}{f'(x)}\right)} = -\frac{f'^2(x)}{f''(x)}, \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

daher ist Γ'' unabhängig von k; ihre unendlich fernen Punkte entsprechen den Wendepunkten von Γ. In ähnlicher Weise kann man

1) C. Völker, *Ueber die Relation zwischen einer gegebenen Curve $y = f(x)$ und einer daraus abgeleiteten Kurve $y = k\frac{dx}{dy} = \frac{k}{f'(x)}$ mit specieller Anwendung auf die Ellipse* (Diss. Marburg, 1880). Vgl. auch Azzarelli, *Alcuni luoghi geometrici* (Atti dell' Accad. dei Nuovi Lincei XLVI, 1893).

die dritte abgeleitete Kurve betrachten, u. s. w. — Wenn Γ durch eine Gleichung von der Form

$$F(x, y) = 0$$

dargestellt wäre, so würde man die von Γ' erhalten, indem man y aus dieser und der folgenden

$$y_1 \frac{\partial F}{\partial x} + k \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

eliminiert; wenn daher Γ von der Ordnung n ist, so mufs Γ' im allgemeinen von der Ordnung $2n(n-1)$ sein; beide Kurven sind ferner vom selben Geschlecht.

Aus der Gleichung (14) geht hervor, dafs, wenn Γ' mit Γ zusammenfallen soll, es notwendig und hinreichend ist, dafs

$$y = k\frac{dx}{dy} \quad \text{oder} \quad y^2 = 2kx + l; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

mit Variation der beliebigen Konstanten l stellt (10) ∞^1 selbst abgeleitete Parabeln dar.

Ähnlich ergiebt sich aus (15), dafs Γ'' mit Γ übereinstimmt, wenn y der Differenzialgleichung

$$-\frac{y'^2}{y''} = y \quad \text{oder} \quad \frac{y''}{y'} + \frac{y'}{y} = 0$$

Genüge leistet. Wird die erste Integration ausgeführt, so ergiebt sich

$$y \cdot y' = a \qquad \text{(wo } a \text{ eine Konstante bedeutet)}$$

und nochmals integriert, so erhält man

$$y^2 = 2ax + b, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

welche Gleichung ∞^2 Parabeln darstellt, deren jede mit ihrer eigenen zweiten abgeleiteten Kurve übereinstimmt. Offenbar sind in dieser neuen Serie die ∞^1 durch (16) dargestellten Parabeln mit einbegriffen.

Wenden wir das hier beschriebene Ableitungsverfahren auf einen centrischen Kegelschnitt an, so gelangen wir zu zwei bemerkenswerten Kurven vierter bezw. sechster Ordnung. Ist nämlich die Gleichung von Γ

$$\frac{y^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{oder} \quad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

so hat Γ' die Gleichung

$$y = \mp \frac{ak\sqrt{a^2 - x^2}}{bx} \quad \text{oder} \quad b^2x^2y^2 + k^2a^2x^2 - k^2a^4 = 0; \quad . \quad (18)$$

sie ist demnach eine rationale Kurve vierter Ordnung, die symmetrisch in Bezug auf die Koordinataxen ist, durch die Endpunkte der Fokalaxe der Ellipse geht, im unendlich fernen von Ox einen isolierten Punkt, und im unendlich fernen von Oy einen Berührungsknoten mit dieser Axe als zugehöriger Tangente hat. Die Kurve

besitzt keine anderen vielfachen Punkte, aber die vier Punkte mit den Koordinaten

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}, \qquad y = \pm \frac{ka\sqrt{2}}{b}$$

sind Wendepunkte (vgl. Taf. XVII, Fig. 143).

Die zweite abgeleitete Kurve hingegen hat die Gleichung

$$y = \pm \frac{bx^2\sqrt{a^2 - x^2}}{a^3} \quad \text{oder} \quad a^6y^2 + b^2x^6 - a^2b^2x^4 = 0; \quad . \ . \ (19)$$

sie ist eine rationale Kurve sechster Ordnung (Taf. XVII, Fig. 144), die durch die Endpunkte der Fokalaxe der Ellipse geht, und im Mittelpunkte einen Berührungsknoten mit dieser Axe als zugehöriger Tangente hat. Die Punkte mit den Koordinaten

$$x = \pm a\sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad y = \pm \frac{2b}{3\sqrt{2}}$$

sind Kulminationspunkte; sie liegt ganz innerhalb der Ellipse, hat keine reellen unendlich fernen Punkte aufser den auf der y-Axe, u. s. w.[1]).

280. III. Nehmen wir wieder die Kurve Γ als durch die Gleichung $y = f(x)$ bestimmt an; wir betrachten die Ordinate eines beliebigen Punktes P derselben und ziehen durch den Koordinatenanfang eine Parallele zu der Tangente und zu der Normale in P an Γ, diese mögen die Ordinate in P_1 bezw. P_2 schneiden. Variieren wir nun P, so beschreiben die Punkte P_1 und P_2 zwei neue Kurven, von denen die erste die Tangentenkurve, die zweite die Normalkurve von Γ heifst[2]). Eine kurze Rechnung lehrt uns, dafs jene beiden Kurven resp. die Gleichungen haben

$$y_1 = x \cdot f'(x), \qquad y_2 = \frac{x}{f'(x)} \cdot \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (20)$$

---

1) Vgl. die Programmabhandlung (Berlin 1884) von C. Völker, *I. Die derivierten Curven der Hyperbel. II. Die Lemniskate zweiter Art.* Mit letzterem Namen bezeichnet Völker folgende Kurve: Eliminiert man aus obiger Gl. (18) und ihrer Abgeleiteten die Konstante k, so erhält man

$$a^2y \cdot dx + x(a^2 - x^2) \cdot dy = 0.$$

Folglich lautet die Differenzialgleichung der orthogonalen Trajektorien des Systems der ∞^1 Kurven (18)

$$a^2y \cdot dy - x(a^2 - x^2) \cdot dx = 0.$$

Integriert man unter der Voraussetzung, dafs für $x = 0$ auch $y = 0$ ist, so bekommt man

$$y = \frac{x}{a\sqrt{2}}\sqrt{2a^2 - x^2}.$$

Die Diskussion dieser Gleichung offenbart uns leicht die Gestalt dieser Kurve, und zeigt, dafs der Name, den sie erhielt, berechtigt ist: es ist eben die Lemniskate zweiter Art.

2) L. Henkel, *Ueber die aus einer Curve* $y = f(x)$ *abgeleitete Curve* $y_1 = x\frac{dy}{dx} = xf'(x)$ *(Tangentencurve) und* $y_2 = -x\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{f'(x)}$ *(Normalcurve) mit spezieller Anwendung auf die Parabel* (Dissert. Marburg, 1882).

Wenden wir diese Verwandlung anstatt auf die Kurve Γ, auf die Kurve $\overline{\Gamma}$ an, die durch

$$y = -\int \frac{dx}{f'(x)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

dargestellt ist, so erkennt man leicht, dafs die Tangentenkurve Γ mit der Normalkurve von $\overline{\Gamma}$ zusammenfällt und umgekehrt; man nennt daher solche Kurven konjugiert. — Wir bemerken aufserdem, wenn man teilweise integriert, so erhält man

$$\int y_1 \cdot dx = \int x \cdot f'(x) \cdot dx = x \cdot f(x) - \int f(x) \cdot dx = x \cdot f(x) - \int y \cdot dx,$$

daher ist

$$\int_a^b y_1 \cdot dx + \int_a^b y \cdot dx = b \cdot f(b) - a \cdot f(a); \quad \ldots \quad (22)$$

wenn man also Γ quadrieren kann, so kann man auch Γ_1 quadrieren und umgekehrt.

Dieses Ableitungsverfahren soll jetzt auf die Parabel

$$y^2 = 2p(x - \alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

angewendet werden, wobei $p > 0$ angenommen wird. Wir bemerken zunächst, dafs sie als konjugierte Kurve die semikubische Parabel besitzt

$$9py^2 = 8(x - \alpha)^3.$$

Ihre Tangentenkurve dagegen ist

$$y_1 = \frac{px}{\sqrt{2p(x - \alpha)}} \quad \text{oder} \quad y_1^2(x - \alpha) = \frac{p}{2} x^2 \ldots \quad (24)$$

Die hierdurch dargestellte Kurve dritter Ordnung ist symmetrisch in Bezug auf Ox, der Anfang ist ein Doppelpunkt, genauer ein Knoten oder isolierter Punkt, je nachdem $\alpha \lesseqgtr 0$ (Taf. XVII, Fig. 145 a, b); die reellen Punkte der Kurve erhält man für $x > \alpha$. Wenn $\alpha > 0$, so sind die Punkte mit $x = 2\alpha$ Kulminationspunkte (bezw. mit zu Ox paralleler Tangente), die mit $x = 4\alpha$ sind Wendepunkte. In allen Fällen ist die Gerade $x = \alpha$ Wendeasymptote der Kurve. In dem bislang ausgeschlossenen Falle $\alpha = 0$ zerfällt die Gleichung (24) in $x = 0$, $y_1 = \frac{1}{2} y$, d. h. in die y-Axe und die Parabel, deren Ordinaten die Hälfte der gegebenen sind. Durch Anwendung der Gleichung (24) erhalten wir ferner

$$\int_a^b y_1 \cdot dx = b\sqrt{2p(b - \alpha)} - a\sqrt{2p(a - \alpha)} - \int_a^b \sqrt{2p(x - \alpha)} \cdot dx$$
$$= \sqrt{2p(b - \alpha)} \frac{b + 2\alpha}{3} - \sqrt{2p(a - \alpha)} \frac{a + 2\alpha}{3};$$

wenn $\alpha < 0$, hat man im besonderen

$$\int_\alpha^0 y_1 \cdot dx = \sqrt{-2p\alpha} \frac{2\alpha}{3},$$

als bemerkenswerten Ausdruck für die Fläche zwischen der Kurve und der Asymptote.

Bestimmen wir hingegen die Normalkurve derselben Parabel (23), so erhalten wir

$$y_2 = x\sqrt{\frac{2(x-\alpha)}{p}} \quad \text{oder} \quad \frac{p}{2}y^2 + \alpha x^2 - x^3 = 0;$$

diese ist ebenfalls eine zur x-Axe symmetrische Kurve dritter Ordnung, deren reelle Punkte man für $x > \alpha$ erhält (Taf. XVII, Fig. 146, *a*, *b*); sie hat im Anfang einen Knoten-, Rückkehr- oder isolierten Punkt, je nachdem $\alpha \gtreqless 0$; im zweiten Falle ist die Kurve nichts anderes als die semikubische Parabel. Wenn $\alpha < 0$, so sind die beiden Punkte mit der Abscisse $\frac{2\alpha}{3}$ Kulminationspunkte, wenn $\alpha > 0$, die mit $x = \frac{4\alpha}{3}$ Wendepunkte; in allen Fällen ist der unendlich ferne von Oy ein Wendepunkt mit der unendlich fernen Geraden als zugehöriger Tangente.

Die Transformation, durch welche man von einer Kurve zu ihrer Tangentenkurve gelangt, wurde später auch von H. Brocard wieder aufgefunden[1]) und von ihm pseudo-Newton'sche Transformation genannt. Indem er sie auf spezielle transscendente Kurven anwandte, leitete er aus ihnen algebraische Kurven ab, und gelangte so zu einer neuen Verbindungsbrücke zwischen diesen beiden grofsen Kategorien, in welche sich alle ebenen Kurven verteilen. Wendet man sie aber auf algebraische Kurven an, so erhält man immer wieder Kurven derselben Art; die Beziehungen zwischen diesen und den ursprünglichen Kurven findet man in einer speziellen Arbeit von V. Retali niedergelegt[2]).

281. **IV.** Brocard hat jedoch noch eine zweite Methode erdacht, von einer Kurve andere abzuleiten; diese, die er die Roberval'sche Transformation nannte, besteht in Folgendem: Es sei wieder eine Kurve Γ gegeben, dargestellt durch Gleichung (1), sowie eine beliebige Gerade r, die man als durch den Anfang gehend annehmen kann,

$$\frac{X}{a} = \frac{Y}{b}.$$

Man betrachte die Tangente in einem beliebigen Punkte P von Γ und bestimme ihren Schnittpunkt M mit r; die durch P zu Oy gezogene Parallele schneide die durch M zu Ox gezogene in P': der Ort der Punkte P' ist die Roberval'sche Kurve von Γ. — Da nun

$$\frac{Y - f(x)}{X - x} = f'(x)$$

1) *Sur une transformation géométrique (Transformation pseudonewtonienne)* (Belgique Mém. LIX, 1899).

2) *Sur une transformation géométrique* (Mém. de la Soc. de Liège, 3. Ser. II, 1900).

die Gleichung der genannten Tangente, so ist die Ordinate des Punktes M, in welchem sie die r schneidet,

$$Y = b\frac{xf'(x) - f(x)}{af'(x) - b}; \quad \ldots \quad (25)$$

sie ist zugleich die Ordinate von P'; die Abscisse dieses Punktes ist dieselbe wie von P, und daher ist (25) die Gleichung der Roberval-schen Kurve. Die Roberval'sche sowie die pseudo-Newton'sche Transformation sind Spezialfälle einer dritten von V. Retali[1]) untersuchten geometrischen Transformation.

282. V. Auf der Tangente in einem beliebigen Punkte P der durch die Gleichung $y = f(x)$ dargestellten Kurve Γ bestimme man einen Punkt P' derart, daſs das von den Ordinaten der beiden Punkte P, P' abgeschnittene Stück der x-Axe eine bestimmte Länge k habe, und auſserdem PP' die positive Richtung der Tangente bezeichnet. Der Ort des Punktes P' ist eine neue Kurve Γ', welche die Tangentialkurve von Γ genannt wird[2]). Es ist klar, daſs die Gleichung von Γ' erhalten wird, wenn man x, y aus

$$x - x' = k, \qquad y - y' = (x - x')\frac{dy}{dx}, \qquad y = f(x)$$

eliminiert; sie lautet daher

$$y' = f(x' + k) - kf'(x' + k). \,^{3)} \quad \ldots \quad (26)$$

Als Kurve Γ nehmen wir einmal die Parabel

$$y^2 = p(x - k),$$

dann wird die Γ' sein

$$y' = \frac{\sqrt{p}(2x' - k)}{2\sqrt{x'}} \qquad \text{oder} \qquad 4x'y' = p(2x' - k)^2.$$

Die Tangentialkurve einer Parabel ist demnach eine Kurve dritter Ordnung, die symmetrisch zu deren Axe liegt, den Punkt $\left(\frac{k}{2}, 0\right)$ als Doppelpunkt, den unendlich fernen von Oy als Wendepunkt hat mit dieser Axe als zugehöriger Tangente; im unendlich fernen Punkte von Ox wird die Kurve von der unendlich fernen Geraden berührt (s. Taf. XVII, Fig. 147).

Wird dieselbe Ableitung auf die Ellipse

$$\frac{(x - k - a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{oder} \qquad y = \frac{b}{a}\sqrt{2a(x - k) - (x - k)^2}$$

---

1) *Sopra una corrispondenza* $[m, n]$ (Lomb. Ist. Rendic. 2. Ser. XXXII, 1899).

2) Hochheim, *Tangentialkurven der Kegelschnitte* (Zeitschrift f. Math. XV, 1870). S. auch das schon in Note 1 S. 695 citierte Werk, S. 100 ff.

3) Eine ähnliche Konstruktion für die Normalen ausgeführt, liefert eine Kurve, deren Gleichung
$$y = f(x' + k) + \frac{k}{f'(x' + k)}$$
lautet.

angewendet, so erhält man die Gleichung

$$y' = \frac{2ax' - x'^2 - k(a - x')}{\sqrt{2ax' - x'^2}} \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

für die Tangentialkurve der betrachteten Ellipse. Sie ist also eine in Bezug auf die grofse Axe symmetrische Kurve vierter Ordnung, die ganz innerhalb des von $x' = 0$ und $x' = 2a$ begrenzten Streifens liegt. Auf der Abscissenaxe hat sie einen Doppelpunkt und einen isolierten, dessen Abscissen bezw. $\frac{1}{2}\left(2a + k \pm \sqrt{4a^2 + k^2}\right)$ sind; ein dritter Doppelpunkt ist der unendlich ferne von Oy, mit den Geraden $x' = 0$, $x' = 2a$ als entsprechenden Tangenten (Taf. XVII, Fig. 148).

Ähnlich läfst sich zeigen, dafs die Tangentialkurve der Hyperbel $\frac{(x - k - a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dargestellt wird durch

$$y' = \frac{b}{a} \frac{2ax' - x'^2 - k(a - x')}{\sqrt{x'^2 - 2ax'}}.$$

Sie ist eine mit denselben projektiven Eigenschaften wie (27) ausgestattete Kurve vierter Ordnung, hat aber eine ganz andere Gestalt, die uns Fig. 149 wiedergiebt.

VI. Schliefslich sei noch eine von M. d'Ocagne[1]) vorgeschlagene Ableitung besprochen. „Gegeben seien zwei feste Punkte O und P sowie eine Kuve Γ; M sei ein beliebiger Punkt derselben, M_1 dagegen derjenige Punkt, in welchem der Radius vector OM von der durch P zu der Normalen in M parallel gezogenen Geraden geschnitten wird. Variiert man M auf Γ, so beschreibt M_1 eine Kurve Γ_1, welche die von d'Ocagne betrachtete ist.“ Fällt M in den Fufspunkt einer von P gezogenen Normalen, so fällt M_1 mit M zusammen; folglich **enthält die Kurve Γ_1 die Fufspunkte der von P auf Γ gefällten Normalen.** Wenn hingegen M in den Fufspunkt einer von O auf Γ gefällten Normalen fällt, so befindet sich M_1 im Unendlichen; **also geht Γ_1 durch die unendlich fernen Punkte der von O zu Γ gezogenen Normalen.** Nehmen wir an, dafs die Kurve Γ_1 vollständig gezeichnet vorliegt, so ist klar, dafs man in jedem beliebigen Punkte von Γ die Normale zeichnen kann und d'Ocagne hat gezeigt, dafs man damit auch das Krümmungscentrum finden kann. Ohne uns hiermit aufzuhalten, gehen wir zu der Bemerkung über, dafs das angegebene Verfahren zwei Methoden liefert, die eine invers zur anderen, um aus einer Kurve eine andere abzuleiten. Um dies klar zu legen, wollen wir die Koordinaten von M mit x, y,

---

1) *Sur certaines courbes qu'on peut ajoindre aux courbes planes pour l'étude de leurs propriétés infinitésimales* (Amer. Journ. XI, 1889). In dem *Extrait d'une lettre de M. d'Ocagne à M. Craig* (Amer. Journ. XIV, 1892) ist ein zweifelhafter Punkt jener Abhandlung richtig gestellt worden.

die von M_1 mit x_1, y_1 bezeichnen, O als Anfangspunkt und OP als x-Axe nehmen. Setzen wir $OP = a$, so bestehen dann die Gleichungen

$$\frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a - x_1}{y_1}. \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

Ist also die Gleichung von Γ als $f(x, y) = 0$ gegeben, so kann die von Γ_1 durch einfache Differenziationen und Eliminationen erhalten werden. Ist hingegen die Gleichung von Γ_1 als $F(x_1, y_1) = 0$ gegeben, so erkennt man, indem aus (28) sich ergiebt

$$x_1 = \frac{ax \cdot dx}{x \cdot dx + y \cdot dy}, \quad y_1 = \frac{ay \cdot dx}{x \cdot dx + y \cdot dy},$$

dafs Γ die Integralkurve folgender homogenen Differenzialgleichung ist

$$f\left(\frac{ax \cdot dx}{x \cdot dx + y \cdot dy}, \frac{ay \cdot dx}{x \cdot dx + y \cdot dy}\right) = 0,$$

somit kann die Aufsuchung von Γ immer auf Quadraturen zurückgeführt werden.

Als Beispiel nehmen wir für Γ_1 die Gerade $y_1 = mx_1 + n_1$; Γ wird dann eine Integralkurve von folgender Gleichung sein

$$ay \cdot dx = max \cdot dx + n(x \cdot dx + y \cdot dy).$$

Setzen wir nun $y = tx$, so wird diese Gleichung zu

$$\frac{dx}{x} + \frac{t \cdot dt}{t^2 - \frac{a}{n}t + \frac{ma}{n} + 1} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

wo die Variabelen schon getrennt sind. Wird die Integration ausgeführt, so erhält man je nach der Beschaffenheit der Wurzeln der Gleichung

$$t^2 - \frac{a}{n}t + \left(\frac{ma}{n} + 1\right) = 0$$

verschiedene Resultate.

<u>1. Fall.</u> Es sei $t^2 - \frac{a}{n}t + \left(\frac{ma}{n} + 1\right) = (t - p)(t - q)$ und $p > q$. Dann ist

$$\frac{t}{t^2 - \frac{a}{n}t + \frac{ma}{n}t + 1} = \frac{p}{(p-q)(t-p)} - \frac{q}{(p-q)(t-q)},$$

daher bekommt man durch Integration von (2)

$$\log x + \frac{p}{p-q}\log(t-p) - \frac{q}{p-q}\log(t-q) = \frac{1}{p-q}\log c,$$

oder

$$x^{p-q}\frac{(t-p)^p}{(t-q)^q} = c,$$

und, wenn für t wieder sein Wert gesetzt wird,

$$(y - px)^p = c(y - qx)^q. \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

In diesem Falle ist Γ also eine Parabel oder Hyperbel, die algebraisch oder interscendent ist, je nachdem p und q beide rational sind oder nicht.

2. Fall. $t^2 - \frac{a}{n} t + \left(\frac{ma}{n} + 1\right) = (t-p)^2$. In diesem Falle hat

$$\frac{t}{t^2 - \frac{a}{n} t + \left(\frac{ma}{n} + 1\right)} = \frac{p}{(t-p)^2} + \frac{1}{(t-p)};$$

daraus ergiebt sich bei der Integration von (2)

$$\log x - \frac{p}{t-p} + \log(t-p) = \log c,$$

oder
$$x(t-p) - c e^{\frac{p}{t-p}}$$

bezw.
$$y - px = c e^{\frac{px}{y-px}} \qquad (4)$$

Γ ist demnach immer eine transscendente Kurve.

3. Fall. $t^2 - \frac{a}{n} t + \left(\frac{ma}{n} + 1\right) = (t+\alpha)^2 + \beta^2$. Setzt man $t + a = \tau$, so ist

$$\frac{t \cdot dt}{(t+\alpha)^2 + \beta^2} = \frac{(\tau - \alpha) \cdot d\tau}{\tau^2 + \beta^2} = \frac{1}{2} \frac{d(\tau^2 + \beta^2)}{\tau^2 + \beta^2} - \frac{\alpha}{\beta} \frac{d\frac{\tau}{\beta}}{1 + \left(\frac{\tau}{\beta}\right)^2};$$

folglich liefert Gleichung (2)

$$\log x + \log\sqrt{\tau^2 + \beta^2} - \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{arc\,tg} \frac{\tau}{\beta} = \log c,$$

oder
$$x\sqrt{(t+\alpha)^2 + \beta^2} = e e^{\frac{\alpha}{\beta} \operatorname{arc\,tg} \frac{\tau}{\beta}},$$

und endlich
$$\sqrt{(y+\alpha x)^2 + \beta^2 x^2} = c e^{\frac{\alpha}{\beta} \operatorname{arc\,tg} \frac{y+\alpha x}{\beta x}} \qquad (5)$$

Dieses Beispiel läfst hinreichend erkennen, dafs der Übergang von Γ_1 zu Γ in der Regel zu ziemlich komplizierten Kurven führen dürfte.

Die für Γ_1 angegebene Konstruktion führt von selbst zu einer anderen Kurve Γ_2, die in folgender Weise konstruiert wird. Die Daten seien dieselben, man läfst aber dem Punkte M denjenigen Punkt M_2 entsprechen, in welchem der Radius vector OM die durch P zur Tangente in M gezogene Parallele schneidet; Γ_2 ist dann der Ort des Punktes M_2, wenn M die Kurve Γ durchläuft. Γ_2 mufs ersichtlich durch die Berührungspunkte der von P an Γ gezogenen Tangenten gehen. Die neue Kurve kann, wenn sie gezeichnet vorliegt, nicht blofs zur Konstruktion der Tangenten an Γ dienen, sondern ebenfalls zur Bestimmung der Krümmungsmittelpunkte. Werden

dieselben Bezeichnungen und Axen beibehalten, so finden zwischen den Koordinaten der Punkte M und M_2 die Beziehungen statt

$$\frac{y}{x} = \frac{y_2}{x_2}, \qquad y_2 = (x_2 - a)\frac{dy}{dx}$$

oder

$$x_2 = \frac{ax \cdot dy}{x \cdot dy - y \cdot dx}, \qquad y_2 = \frac{ay \cdot dy}{x \cdot dy - y \cdot dx},$$

wenn also $f(x_2, y_2) = 0$ die Gleichung von Γ_2 ist, so wird Γ eine Integralkurve der folgenden homogenen Differenzialgleichung sein:

$$f\left(\frac{ax \cdot dy}{x \cdot dy - y \cdot dx}, \frac{ay \cdot dy}{x \cdot dy - y \cdot dx}\right) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Nehmen wir als Γ_2 wieder die Gerade $y_2 = mx_2 + n$; dann hat Γ der Gleichung zu genügen

$$ay \cdot dy = max \cdot dy + n(x \cdot dy - y \cdot dx).$$

Setzen wir wieder

$$y = tx,$$

so erhalten wir

$$\frac{dx}{x} + \frac{ma + n - at}{at(m - t)}\,dt = 0$$

oder

$$\frac{dx}{x} + \frac{ma + n}{ma}\left[\frac{dt}{t} - \frac{dt}{t - m}\right] + \frac{dt}{t - m} = 0;$$

wir integrieren und erhalten

$$\log x + \frac{ma + n}{ma}\log\frac{t}{t - m} + \log(t - m) = \log k,$$

oder auch

$$x\left(\frac{t}{t - m}\right)^{\frac{ma + n}{ma}}(t - m) = k,$$

und schließlich

$$y^{ma + n} = c(y - mx)^n,$$

wo c und k beliebige Konstanten sind; die gesuchte Kurve ist demnach eine Parabel oder Hyperbel, die algebraisch oder interscendent ist, je nachdem die beiden Größen $ma + n$ und n beide rational sind oder nicht.

Die Integration der Gleichung (6) läſst sich auch in dem Falle ausführen, daſs Γ_2 ein Kreis mit dem Centrum O ist. Alsdann kann Γ betrachtet werden als der Ort eines Punktes, der mit konstanter Geschwindigkeit auf einen festen Punkt zustrebt, während er zugleich von einem anderen nach Richtung und Kraft konstanten Zuge beeinfluſst wird. Sie ist demnach die Kurve, die von einem Schwimmer beschrieben wird, der auf einen Punkt des Fluſsufers zustrebt; man könnte sie daher die Schwimmerkurve nennen. Vor d'Ocagne wurde sie schon von Collignon[1]) betrachtet.

1) Assoc. française pour l'avanc. des sciences, Compte rendu 1887.

Elftes Kapitel.

Die Gegenkurven.

283. Es liege ein recht- oder schiefwinkliges kartesisches Koordinatensystem vor; will man einen Punkt P konstruieren, dessen Koordinaten x, y gegeben sind, so verfährt man gewöhnlich in der Weise, dafs man auf der Abscissenaxe $OM = x$, auf der Ordinataxe $ON = y$ abträgt und durch M zu der letzteren Axe, durch N zu der ersten die Parallele zieht; diese schneiden sich dann in dem gesuchten Punkte P. Man kann aber die Konstruktion auch anders ausführen. Nachdem man wie oben die Punkte M und N gezeichnet hat, beschreibe man um M mit $|y|$, und um N mit $|x|$ als Radius einen Kreis; die beiden schneiden sich in P. Sie schneiden sich aber noch in einem zweiten, eindeutig bestimmten Punkte P_1. Auf diese Weise wird jedem Punkte P der Ebene ein zweiter P_1 eindeutig zugeordnet, welchen man den Gegenpunkt des ersteren nennen könnte; und wenn P eine Kurve Γ durchläuft, beschreibt P_1 die Gegenkurve Γ_1 [1]).

Die Konstruktion des Punktes P_1 läfst sich praktisch in bequemerer Weise ausführen. Es sei ω der Winkel der beiden Axen (Taf. XVII, Fig. 150), α der Winkel an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks NPP_1, β der an der Grundlinie von MPP_1; verbindet man nun die in der Figur gezeichneten Punkte miteinander, so lassen sich die Werte der entstehenden Winkel leicht berechnen. (Die Resultate dieser Berechnung sind in der Figur selbst angegeben.) Aus ihnen ergiebt sich dann, dafs die Geraden NM und OP_1 zueinander parallel sind, dafs PP_1 senkrecht zu diesen beiden ist, und (was weniger von Bedeutung) dafs OP_1 und PM sich in einem Punkte Q des um M mit MP als Radius beschriebenen Kreises schneiden. Hieraus ist ersichtlich, dafs man auch, um den Punkt P_1 aus P zu erhalten, folgendermafsen verfahren kann: Man konstruiere das Parallelogramm $OMPN$, welches zwei Seiten auf Ox und Oy, und als Gegenecken O und P hat, ziehe die Diagonale MN und zu ihr durch O die Parallele, auf diese lote man den Punkt P; der erhaltene Punkt P_1 ist der Gegenpunkt von P. Diese Konstruktion bietet den Vorteil, dafs sie uns leichter zu den Formeln gelangen läfst, welche die Koordinaten x, y von P mit denen von $P_1 (x_1, y_1)$ verknüpfen. Da $OM = x$, $ON = y$, so ist nämlich die Gleichung der Geraden MN, wenn X, Y laufende Koordinaten sind,

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} = 1$$

1) K. Glänzer, *Die Gegenkurve der geraden Linie* (Progr. Forbach, 1874).

die der zu ihr parallelen Geraden OQ ist demnach

$$yX + xY = 0.$$

Dagegen hat das von P auf MN gefällte Lot die Gleichung

$$\frac{X - x}{Y - y} = \frac{y - x\cos\omega}{x - y\cos\omega}.$$

Lösen wir nun die beiden letzten Gleichungen nach X, Y auf, so erhalten wir die Koordinaten x_1, y_1 des Punktes P_1, nämlich

$$x_1 = x\frac{x^2 - y^2}{x^2 - 2xy\cos\omega + y^2}, \qquad y_1 = -y\frac{x^2 - y^2}{x^2 - 2xy\cos\omega + y^2}. \quad (1)$$

Umgekehrt dagegen findet man, dafs

$$x = x_1\frac{x_1{}^2 + y_1{}^2 + 2x_1y_1\cos\omega}{x_1{}^2 - y_1{}^2}, \qquad y = -y_1\frac{x_1{}^2 + y_1{}^2 + 2x_1y_1\cos\omega}{x_1{}^2 - y_1{}^2}. \quad (2)$$

Aus diesen ergiebt sich dann die nützliche Relation

$$\frac{x^2 + y^2 \mp 2xy\cos\omega}{x^2 - y^2} = \frac{x_1{}^2 + y_1{}^2 \pm 2x_1y_1\cos\omega}{x_1{}^2 - y_1{}^2}. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Die Gleichung (1) sowohl wie (2) lassen erkennen, dafs die Beziehung zwischen den Punkten P und P_1 eine Cremona'sche Transformation dritten Grades ist, in welcher den Geraden der einen Ebene cirkulare Kurven dritter Ordnung entsprechen, die O als Doppelpunkt mit den Halbierungslinien der Axenwinkel als zugehörigen Tangenten haben; es sind also ∞^2 Strophoiden (vgl. Nr. **35** ff.). Man hat es also hier mit einer speziellen kubischen Transformation De Jonquières' zu thun, bei welcher zwei einfache Fundamentalpunkte in die Kreispunkte, die beiden anderen aber dem Doppelpunkte in zueinander senkrechten Richtungen unendlich nahe liegen.

Setzt man zur Abkürzung

$$x_1{}^2 - y_1{}^2 = D_1, \qquad x_1{}^2 + y_1{}^2 + 2x_1y_1\cos\omega = T_1,$$

so sieht man, dafs für die Kurve Γ, deren Gleichung

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k(x, y) = 0$$

ist, die Gegenkurve Γ_1 dargestellt wird durch

$$\sum_{k=0}^{k=n} D_1^{n-k}\, T_1^k\, u_k(x_1, -y_1) = 0.$$

Die Gegenkurve einer Kurve n^{ter} Ordnung ist also im allgemeinen von der Ordnung $3n$, hat die unendlich fernen Kreispunkte als n-fache und den Anfangspunkt als $2n$-fachen Punkt; von den Tangenten in diesem Punkte fallen n mit der einen, n mit der anderen Halbierungslinie der Axenwinkel zusammen.

Die Gegenkurve einer Geraden ist, wie schon gesagt, eine Strophoide, die eines Kegelschnittes eine Kurve sechster Ordnung, die K. Glänzer im allgemeinen sowohl, als auch für spezielle Fälle genau untersucht hat[1]). Aus seinen Untersuchungen ergiebt sich, dafs jene Kurve auf den vierten Grad zurückgeht, wenn der Kegelschnitt ein durch den Anfang gehender Kreis, oder eine gleichseitige Hyperbel mit dem Centrum im Anfange (alsdann ist die Gegenkurve eine Bernoulli'sche Lemniskate) oder eine Parabel mit dem Scheitel im Anfangspunkte ist. Alle diese Kurven vierter und sechster Ordnung sind ziemlich bekannte Kurven.

Da die betrachtete Transformation nicht involutorisch ist, so wird man, wenn sie auf Γ_1 angewendet wird, eine Kurve Γ_2 erhalten, die von Γ verschieden ist, sie heifst die zweite Gegenkurve von Γ; aus ihr läfst sich in derselben Weise die dritte ableiten u. s. w. Ist nun $P_2(x_2, y_2)$ der Gegenpunkt von $P_1(x_1, y_1)$, so erhalten wir zufolge Gleichung (2)

$$x_1 = x_2 \frac{x_2^2 + y_2^2 + 2x_2 y_2 \cos\omega}{x_2^2 - y_2^2}, \qquad y_1 = -y_2 \frac{x_2^2 + y_2^2 + 2x_2 y_2 \cos\omega}{x_2^2 - y_2^2}, \quad (2')$$

und die Gleichung (3) ergiebt

$$\frac{x_1^2 + y_1^2 \mp 2x_1 y_1 \cos\omega}{x_1^2 - y_1^2} = \frac{x_2^2 + y_2^2 \pm 2x_2 y_2 \cos\omega}{x_2^2 - y_2^2}. \quad . \quad . \quad (3')$$

Multiplizieren wir die Ausdrücke (2) mit den homologen (2′) und benutzen (3′), so entstehen, wenn D_2 und T_2 die analoge Bedeutung wie oben D_1 und T_1 haben, und noch $x_2^2 + y_2^2 - 2x_2y_2\cos\omega = U_2$ gesetzt wird, die Gleichungen

$$x = x_2 \frac{U_2 \cdot T_2}{D_2^2}, \qquad y = y_2 \frac{U_2 \cdot T_2}{D_2^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

diese bestimmen die Koordinaten des zweiten Gegenpunktes P_2 von P. Betrachtet man in ähnlicher Weise P_2, den dritten Gegenpunkt von P, so erhält man die Gleichungen

$$x_2 = x_3 \frac{T_3}{D_3}, \qquad y_2 = -y_3 \frac{T_3}{D_3}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2'')$$

und

$$\frac{x_2^2 + y_2^2 \mp x_2 y_2 \cos\omega}{x_2^2 - y_2^2} = \frac{x_3^2 + y_3^2 \pm 2x_3 y_3 \cos\omega}{x_3^2 - y_3^2}. \quad . \quad . \quad (3'')$$

Kombinieren wir diese mit (4), so ergiebt sich

$$x = x_3 \frac{U_3 \cdot T_3^2}{D_3^3}, \qquad y = -y_3 \frac{U_3 \cdot T_3^2}{D_3^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

---

1) *Die Gegenkurven der Kegelschnitte* (Progr. Hamburg, 1889).

und diese Beziehungen geben analytisch die Beziehung zwischen den Koordinaten des Punktes P und denen seines dritten Gegenpunktes wieder. Wird nun dieses Verfahren wiederholt, so gelangt man zu dem Ergebnis, dafs zwischen den Koordinaten x, y des Punktes P und denen seines r^{ten} Gegenpunktes $P_r(x_r, y_r)$ die Beziehungen bestehen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{wenn } r \text{ ungerade,} & x = x_r \dfrac{T_r^{\frac{r+1}{2}} \cdot U_r^{\frac{r-1}{2}}}{D_r^r}, \quad y = -y_r \dfrac{T_r^{\frac{r+1}{2}} \cdot U_r^{\frac{r-1}{2}}}{D_r^r} \\ \text{wenn } r \text{ gerade,} & x = x_r \dfrac{T_r^{\frac{r}{2}} \cdot U_r^{\frac{r}{2}}}{D_r^r}, \quad y = y_r \dfrac{T_r^{\frac{r}{2}} \cdot U_r^{\frac{r}{2}}}{D_r^r} \end{array}\right\} \quad (6)$$

Zwischen P und P_r besteht also eine Cremona'sche Transformation $(2r+1)^{\text{ten}}$ Grades. Den Geraden der einen Ebene entsprechen in der anderen Kurven $(2r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, die man als Verallgemeinerungen der Strophoide ansehen kann (und zwar der geraden, wenn $\omega = 90^0$, der schiefen, wenn $\omega \neq 90^0$ ist).

Zwölftes Kapitel.

Die von einer Kurvengruppe abgeleiteten Kurven.

284. Die bisher in diesem Abschnitte behandelten Kurven sind alle nur von einer einzigen Kurve abgeleitet; das Beispiel der Jacobischen Kurve dreier gegebenen zeigt aber, dafs man auch aus einer Kurvengruppe eine neue Kurve ableiten kann. Auf andere derartige Ableitungsgesetze soll nun in diesem Schlufskapitel hingewiesen werden, wir wollen uns in der Regel jedoch darauf beschränken, ihre Definition zu geben und die bezüglichen Arbeiten anzuführen, da es sich um Linien handelt, die nur von minderer Wichtigkeit sind.

I. Es seien m Kurven Γ_k durch ihre Polargleichungen $\varrho_k = f_k(\omega)$ gegeben (wo $k = 1, 2, \ldots m$), und m Zahlkoeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$, dann stellen die beiden Gleichungen

$$\varrho = \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k f_k(\omega) \;\ldots\; (1) \quad \text{und} \quad \frac{1}{\varrho} = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\lambda_k}{f_k(\omega)} \;\ldots\; (2)$$

zwei neue Kurven dar; da die beiden rechten Seiten dieser Gleichungen Funktionen sind, die man als eine Verallgemeinerung des arithmetischen bezw. harmonischen Mittels der m Gröfsen f_k ansehen kann, und demnach als hyperarithmetisches bezw. hyperharmonisches Mittel genannt

werden können[1]), so heifsen die entsprechenden durch (1) und (2) dargestellten Linien die hyperarithmetische[2]) bezw. hyperharmonische Kurve der gegebenen in Bezug auf das System der Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m$.

Wenn man an die gegebenen Kurven Γ_k $(k = 1, 2, 3, \ldots, m)$ die Tangenten ziehen kann, so kann man es auch an die abgeleiteten Kurven. Sind nämlich $S_n^{(1)}, S_n^{(2)}, \ldots S_n^{(m)}$ die Polarsubnormalen der Kurven $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_m$ und S die der Kurve (1), so hat man, da $S_n = \frac{d\varrho}{d\omega}$, die Beziehung

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k S_n^{(k)},$$

welche uns die Normale und demnach die Tangente an (1) zu konstruieren gestattet.

Bezeichnen wir ähnlich mit $S_t^{(1)}, \ldots S_t^{(m)}$ die Polarsubtangenten der Kurven $\Gamma_1, \ldots \Gamma_m$ und mit S_t die der Kurve (2) und beachten, dafs

$$\frac{1}{S_t} = \frac{d\varrho}{\varrho^2 \cdot d\omega} = -\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{\varrho}\right),$$

so erhalten wir

$$\frac{1}{S_t} = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\lambda_k}{S_t^{(k)}},$$

vermittelst welcher Beziehung wir die Subtangente und damit die Tangente von (2) erhalten können.

II. In gleicher Weise seien m durch die Gleichungen $y = f_k(x)$ definierte Kurven gegeben, so kann man aus diesen zwei neue ableiten, wenn man setzt

$$y = \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k f_k(x) \quad \ldots (3) \qquad \frac{1}{y} = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\lambda_k}{f_k(x)} \quad \ldots\ldots (4)$$

Insbesondere ist der Fall betrachtet worden, dafs nur zwei Kurven gegeben sind, und $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$; die resultierende Kurve

$$y = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2} \quad \ldots\ldots (5)$$

---

1) Schlömilch, *Hyperarithmetische und hyperharmonische Mittel, nebst geometrischen Anwendungen* (Zeitschrift für Math. XXXIV, 1889).

2) Unter hyperarithmetischen Kurven versteht man auch in einem anderen Sinne solche, deren Gleichung eine derartige Mischung algebraischer und transscendenter Funktionen darstellt, dafs sie sich den gewöhnlichen arithmetischen Berechnungen meist ganz entziehen, z. B.

$$y = x^{\operatorname{tg} x}, \qquad \log(y^2 + ay) = \sin(x^2 - bx).$$

heifst dann kurz die Mittelkurve[1]). Sind z. B. die beiden logarithmischen Linien $y = ae^{\frac{x}{a}}$, $y = ae^{-\frac{x}{a}}$ gegeben, so ist ihre Mittelkurve die Kettenlinie $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$; hat man zwei Ellipsen mit denselben Fokalaxen, so entsteht die sogenannte Bérard'sche Kurve[2]), u. s. w.

Aus denselben beiden Gleichungen $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ kann man auch ableiten

$$y = \sqrt{f_1(x) \cdot f_2(x)}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

da nun die (6) ergiebt

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)}\right),$$

so besteht zwischen den Subtangenten der drei Kurven die Beziehung

$$\frac{1}{S_t} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{S_t^{(1)}} + \frac{1}{S_t^{(2)}}\right),$$

die uns die Tangente an die dritte Kurve zu ziehen lehrt, wenn wir die Tangente der beiden ersten zu konstruieren wissen[3]).

III. Es seien zwei beliebige Kurven gegeben (die eine kann auch auf einen Punkt reduziert sein), dann heifst der Ort der Mittelpunkte derjenigen Kreise, welche beide Kurven berühren, die Äquidistante der beiden gegebenen[4]); sind die letzteren z. B. Kreise, so ist die Äquidistante bekanntlich ein Kegelschnitt. Allgemeiner kann man den Ort der Punkte betrachten, deren Abstände von zwei gegebenen Kurven in einem bestimmten Verhältnisse stehen[5]). In ähnlicher Weise hat man den Ort der Punkte erforscht, von denen die Tangenten an zwei gegebene Kurven ein gegebenes Verhältnis haben, insbesondere einander gleich sind[6]).

IV. Bewegen sich zwei Punkte A und B auf zwei gegebenen Kurven derart, dafs die Tangenten in A und B mit AB als Grundlinie immer ein gleichschenkliges Dreieck bilden, so beschreibt der Mittelpunkt der Strecke AB eine Kurve, die in der angewandten

---

1) Brocard, *Notes de bibliographie des courbes géométriques (Partie complémentaire)* (Bar-le-Duc 1899) S. 208.

2) Brocard, Das.

3) De Lisleferme, *Construction de la tangente à certaines courbes* (Mathésis III, 1883).

4) Frolov, *Sur les courbes équidistantes* (Ass. fr. Caen, 1894).

5) Mannheim, *Construction du centre de la courbure, lieu des points dont les distances à deux courbes données sont dans un rapport constant* (Ann. di Matem. I, 1858).

6) Laguerre, *Sur le lieu des points tels que les tangentes menées de ces points à deux courbes planes soient égales entre elles* (Bull. de la Soc. math. de France, V, 1876—77).

Mathematik auftritt: früher wurde sie wohl als Longitudinalaxe bezeichnet, heute nennen sie die französischen Mathematiker nach einem Vorschlage von M. d'Ocagne[1]) fibre moyenne[2]), die Deutschen Mittelfaserkurve.

285. V. Es seien zwei Kurven Γ_1, Γ_2 durch die Gleichungen $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$ gegeben; der Ort eines Punktes A von der Beschaffenheit, dafs das zwischen den beiden Kurven gelegene Stück $A_1 A_2$ seiner Normalen den Punkt A als Mittelpunkt hat, heifst die Axoide der beiden gegebenen Kurven[3]). Sind x, y; x_1, y_1; x_2, y_2 die Koordinaten von A, A_1, A_2, so hat man

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad (x_1 - x_2)dx + (y - y_2)dy = 0.$$

Die Differenzialgleichung der Axoide wird demnach erhalten, wenn man x_1, y_1, x_2, y_2 aus diesen Gleichungen und den beiden folgenden

$$f_1(x_1, y_1) = 0, \qquad f_2(x_2, y_2) = 0$$

eliminiert; die Elimination von x_2, y_2 vollzieht sich leicht und ergiebt

$$f_1(x_1, y_1) = 0, \qquad f_2(2x - x_1,\ 2y - y_1) = 0,$$
$$(x - x_1)dx + (y - y_1)dy = 0;$$

um aber auch x_1, y_1 zu beseitigen, mufs man die Form der Funktionen f_1, f_2 kennen. Ist z. B. $f_1 = mx$, $f_2 = -mx$, so erhält man als Axoiden die Hyperbeln $xy^m = Const.$ — Es möge bemerkt werden, dafs bei der Definition der Axoiden die beiden gegebenen Kurven auch identisch sein können. Fallen die beiden z. B. mit der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ oder der Parabel $y^2 = 2px$ zusammen, so erhält man als Axoiden die beiden transscendenten Linien $y = xe^{\frac{a^2}{b^2}}$, $y = ce^{-\frac{x}{p}}$. Bemerkenswert ist noch „dafs die Evoluten der Axoiden ebenfalls Axoiden sind"[4]).

VI. Wenn zwei gegebene Kurven parallele Normalen haben, so hat Aoust eine dritte Kurve betrachtet, die er Resultantenkurve nannte, deren Normalen parallel zu den Normalen der beiden ersteren und deren Krümmungsradius in jedem Punkte gleich der Summe der Krümmungsradien in den entsprechenden Punkten der gegebenen ist[5]).

VII. Schliefslich seien zwei Kurven Γ_n und Γ_m von der Ordnung n bezw. m gegeben und ein Punkt O ihrer Ebene; man ziehe

---

1) *Cours de géométrie descriptive* (Paris 1896) S. 275.

2) G. de Longchamps, *Sur la courbe dite fibre moyenne* (Journ. de math. spéc. XXI, 1897); Mannheim, Das.

3) Résal, *Axoïdes de deux lignes planes* (C. R. CXX, 1895).

4) Mannheim, *Une propriété générale des axoïdes* (Das.).

5) *Analyse infinitésimale des courbes planes* (Paris 1873) S. 53—56.

durch O eine beliebige Gerade g, die Γ_n in n Punkten A, Γ_m in m Punkten B schneidet; dadurch entstehen auf g $n \cdot m$ verschiedene Strecken AB; trägt man nun diese von O aus auf g ab, so ist der Ort ihrer Endpunkte eine neue Kurve, die Sektorie genannt worden ist[1]. Benutzt man die Polargleichungen von Γ_n und Γ_m mit O als Pol, so ist die Auffindung der analogen Gleichung der Sektorie nur Sache einer einfachen Elimination.

---

1) O. Ježek, *Ueber Sectorien* (Prager Ber., 1882).

Note I.

Für die Anwendung der Polarkoordinaten auf die Diskussion der Kurven soll ihre gewöhnliche Definition modifiziert und durch folgende ersetzt werden, die der Verfasser in dem „Periodico die Matematica per l'insegnamento secondario“ XV, 1899 (*Osservazioni sopra le coordinate polari*) kundgegeben hat)[1].

Man betrachte in der Ebene einen festen Punkt O und einen festen, von ihm ausgehenden Halbstrahl a und stelle sich vor, dafs ein anderer Halbstrahl sich um O von der Lage a aus drehe und in dem als positiv angenommenen Sinne rotiere (oder im entgegengesetzten). Dann haben wir auf jeder seiner Lagen unendlich viele Punkte M und ebensoviele auf dem entgegengesetzten Halbstrahle, die wir mit $\overline{M}$ bezeichnen wollen. Um nun die Lage eines Punktes M festzulegen, nehmen wir die Gröfsen

$$\varrho = + \text{Länge } OM, \qquad \omega = \text{Winkel } (ar),$$

dagegen, um die Lage eines der Punkte $\overline{M}$ zu bestimmen, die Gröfsen

$$\varrho = - \text{Länge } O\overline{M}, \qquad \omega = \text{Winkel } (ar).$$

Infolge dessen haben alle Punkte eines Halbstrahles die erste Koordinate positiv, die des entgegengesetzten Halbstrahls aber negativ; und umgekehrt, wenn ein Punkt die erste Koordinate negativ hat, so liegt er auf dem entgegengesetzten Halbstrahle.

Diese Bestimmungen sind im Texte fortwährend angewendet worden, und hier soll eine nützliche Folgerung angeführt werden, zu der ihre Anwendung führt.

Die Konchoide des Nikomedes (Nr. **65**) pflegt man gewöhnlich durch die Gleichung

$$\varrho = \frac{a}{\cos\omega} \pm l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

darzustellen; das doppelte Vorzeichen, das in vielen Fällen unbequem ist, kann man nun unterdrücken, wenn man die Polarkoordinaten in unserem Sinne nimmt. Betrachten wir nämlich die Gleichung

$$\varrho = \frac{a}{\cos\omega} + l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und erteilen dem ω einen bestimmten Wert α, so folgt $\varrho_\alpha = \dfrac{a}{\cos\alpha} + l$,

1) Nach ihrer Veröffentlichung erfuhr Verf., dafs gleiche Ideen, wie die in seiner Abhandlung enthaltenen, schon von A. de Morgan und von Baltzer ausgesprochen seien; da diese jedoch noch nicht hinreichend in die Öffentlichkeit gedrungen zu sein scheinen, so mögen sie hier nochmal kurz entwickelt werden.

welches einen Punkt M_1 bestimmt auf dem Halbstrahle, für welchen $(ar) = \alpha$. Geben wir dem ω den Wert $\pi + \alpha$, so erhalten wir

$$\varrho_{\pi+\alpha} = -\frac{a}{\cos\alpha} + l = -\left(\frac{a}{\cos\alpha} - l\right);$$

dementsprechend erhalten wir einen Punkt M_2, der auf dem entgegengesetzten Halbstrahl mit der Anomalie $\pi + \alpha$ liegt, das ist also auf dem ursprünglichen im Abstande $\frac{a}{\cos\omega} - l$. Die Punkte M_1, M_2 sind also dieselben, die man durch Anwendung der gewöhnlichen Gleichung (1) erhält; man kann also an Stelle derselben durchaus (2) anwenden. — In ähnlicher Weise sieht man, daſs man zur Darstellung der Pascal'schen Schnecke besser die Gleichung $\varrho = 2a\cos\omega + l$ anwendet, als die übliche $\varrho = 2a\cos\omega \pm l$.

Note II.

Das Problem, von der natürlichen Gleichung einer Kurve zu der Darstellung in kartesischen Koordinaten überzugehen, ist zuerst von J. Riccati in folgender Weise gelöst worden[1]. Es sei $R = f(s)$ die gegebene Gleichung, so kann man setzen

$$\frac{ds^3}{dx\cdot d^2y - dy\cdot d^2x} = f(s).$$

Man nehme nun s als unabhängige Variabele; dann folgt aus $ds^2 = dx^2 + dy^2$, daſs $d^2x = -\frac{dy\cdot d^2y}{dx}$, und daher wird die vorige Gleichung zu

$$\frac{dx\cdot ds}{d^2y} = f(s);$$

oder, da $dx = \sqrt{ds^2 - dy^2}$,

$$\frac{\sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}}{\frac{d^2y}{ds^2}} = f(s).$$

Man setze nun $\frac{dy}{ds} = p$; dann verwandelt sich diese Gleichung in

$$\frac{dp}{\sqrt{1-p^2}} = \frac{ds}{f(s)},$$

daher ist

$$\text{arc}\sin p = \int\frac{ds}{f(s)}.$$

Setzt man demnach

$$\varphi = \int\frac{ds}{f(s)}, \quad \text{(I)}$$

so hat man $p = \sin\varphi$, $\sqrt{1-p^2} = \cos\varphi$; infolge dessen ist

---

1) S. die Abh. *Data in qualsivoglia modo per la curva, che deve descriversi, la espressione del raggio combaciante, determinare la curva medesima* (Opere del Conte Jacopo Riccati, III, Lucca 1764).

$$dx = \sqrt{ds^2 - dy^2} = ds\sqrt{1 - p^2} = ds \cdot \cos\varphi; \quad dy = p \cdot ds = ds \cdot \sin\varphi,$$

und daher $$x = \int \cos\varphi \cdot ds, \quad y = \int \sin\varphi \cdot ds. \quad \ldots \quad \text{(II)}$$

Die Gleichungen (I) und (II) lösen das Problem. Die Lösung ist nicht von derjenigen verschieden, die Boole[1]) dem Whewell zuschreibt. Wenn $f(s)$ sich auf eine Konstante reduziert, so ist die Kurve von konstanter Krümmung und wird von Krause Unicurva genannt (sie ist dann eine Gerade oder ein Kreis); im anderen Falle hat man eine Versicurva nach der Namengebung des genannten Geometers[2]).

1) *A treatise on differential equations*, 4. Aufl. (London 1882) S. 264.

2) *Nova theoria linearum curvarum* (München 1835) S. 24.

Nachwort.

Rückblick über die historische Entwickelung der Theorie der ebenen Kurven.

Das Bestreben, die vielgestaltigen Untersuchungen, die im Laufe von zwanzig Jahrhunderten (so alt ist schon jene Disciplin) über spezielle ebene Kurven aufgenommen und durchgeführt sind, in eine logische Ordnung zu bringen, veranlaſste uns häufig, in unserer Darlegung die chronologische Ordnung zu verlassen (vgl. Vorwort). Um diesem Übelstande abzuhelfen, halten wir es für das beste, zum Schlusse noch einen flüchtigen Rückblick zu halten über das, was auf den vorigen Seiten nur vereinzelt und verstreut dargelegt ist.

Der Ursprung der Theorie der ebenen Kurven verliert sich ins Dunkel der Zeiten; die Betrachtung der Bewegung der Gestirne und des Falles schwerer Körper, die Beobachtung des geradlinigen Weges des Lichtes und die des Schattens, den undurchsichtige Körper werfen, diese und viele andere Phänomene solcher Art muſsten bei jedem, der Augen hatte zu sehen, und den Verstand zum Nachdenken, den Begriff der Linie hervorrufen, sei es als die Spur, die ein bewegter Punkt hinterläſst, oder als eines gewissen Etwas, das den einen Teil einer Fläche von dem benachbarten scheidet. Und in der That, alle alten Bauwerke, die als Reste einer verschwundenen Kultur übrig geblieben sind, tragen auf ihren Wänden Zeichnungen von Kurven, oder sie setzen in ihrer Konstruktion Kenntnisse über solche Linien voraus. Wir werden jedoch nicht versuchen festzulegen, welcher Person, ebensowenig welchem Volke die Entdeckung des Begriffes der Linie zuzuschreiben ist; das groſse Buch der Geschichte würde stumm bleiben für jeden, der sich mit dieser Frage befassen würde. Wir begnügen uns mit der Bestätigung, daſs bei allen Völkerschaften, die es zu einer gewissen Kulturstufe gebracht haben, nicht bloſs der Begriff der Geraden und des Kreises vorhanden ist, sondern auch Versuche vorliegen, die Länge dieser Linie zu messen und die Gröſse der von ihr umschlossenen Fläche zu bestimmen.

Ein festerer Boden bietet sich aber demjenigen, der auf den Ursprung der Kegelschnitte zurückgehen will, da man nämlich die Entdeckung jener berühmten Triade dem Menaechmus, dem Lehrer Alexanders des Groſsen zuschreibt; mehr als zweitausend Jahre eifrigen und fast ununterbrochenen Studiums haben nicht ausgereicht, die Aufzählung aller ihrer Eigenschaften zu erschöpfen. Menaechmus erhielt diese Kurven, indem er einen geraden Kreiskegel mit einer Ebene schnitt, oder sollte er diese Kurven in der Ebene gezeichnet haben, in der Absicht, das Problem der Würfelverdoppelung zu lösen? Die Antwort ist zweifelhaft. Nicht un-

wichtig ist aber die Bemerkung, daſs zufolge seines Verfahrens die Geometrie wenigstens um eine Methode bereichert wurde, die der weitgehendsten Anwendung und vielfacher Verallgemeinerung fähig ist, um neue Kurven zu erzeugen und zu erforschen; sie besteht darin, eine bekannte Oberfläche durch Ebenen zu schneiden, oder eine Kurve mit ihrer Centralprojektion in Beziehung zu setzen, oder schlieſslich eine metrische Beziehung aufzustellen, der alle Punkte einer Kurve gehorchen. — Eine Anwendung des ersten Verfahrens findet sich bei Perseus, um eine interessante Gruppe von Kurven zu erhalten, nämlich die spirischen Linien (s. Nr. **62** ff.); das zweite Verfahren lieferte dem Newton seine Klassifikation der ebenen Kurven dritter Ordnung (Nr. **15**), und kann als Urquell der gesamten heutigen projektiven Geometrie betrachtet werden; in dem dritten schlieſslich erkennt man die ersten Anfänge der analytischen Geometrie. Dennoch enthüllten jene Methoden — wie sehr sie auch in verschiedener Weise angewendet, in mehrfacher Weise modifiziert und gewissermaſsen umgeändert wurden, durch Apollonius von Pergae in seinem berühmten Werke über die Kegelschnitte — ihre ganze Fruchtbarkeit erst viele Jahrhunderte später. Im allgemeinen waren es jedoch nicht jene Methoden, die von den alten Geometern angewendet wurden, um die Zahl der speziellen ebenen Kurven zu vermehren, vielmehr gaben sie den kinematischen Methoden den Vorzug. Und das darf uns nicht Wunder nehmen; ist es doch viel natürlicher, eine Linie dadurch zu definieren, daſs man die Gesetze der Bewegung des sie erzeugenden Punktes angiebt! So war es die Vereinigung der drehenden Bewegung einer Geraden mit der fortschreitenden eines Punktes (oder einer zweiten Geraden), welche die von dem Sophisten Hippias von Elea, einem Zeitgenossen des Sokrates, erdachte Quadratrix entstehen lieſs (Nr. **175**). Die Quadratrix des Hippias und des Dinostratus bilden die ersten Glieder in der Reihe der Kurven, die zum Zwecke der Quadratur des Kreises ersonnen wurden; unter ihnen finden sich sowohl algebraische Kurven, wie die virtuellen Parabeln (Nr. **82**), als auch transscendente Kurven, wie die Tschirnhausen'sche Quadratrix (Nr. **178**) und die Kochleoide (Nr. **181**).

Der Bewegung entstammen auch die von Archimedes erfundene Spirale (Nr. **182**) und die Konchoide des Nikomedes (Nr. **66**), dasselbe gilt von der Cykloide (Nr. **195**), die vielleicht auch schon den Alten bekannt gewesen; ebenso von den Kurven, die durch Erweiterung des Begriffes der Konchoide erhalten werden (Nr. **69—71**) und von den cyklischen Kurven (Nr. **203**), für die kartesische Parabel (Nr. **31**) und die Watt'sche Kurve (Nr. **106**).

Wenn nun auch die Konchoide des Nikomedes vermittelst der Bewegung definiert wurde, so war sie doch zu dem Zwecke erdacht, das berühmte Problem der Würfelverdoppelung und der Winkeldreiteilung zu lösen, welche Probleme bekanntermaſsen die Dämonen waren, welche den alten Geometern schlaflose Nächte bereiteten. Zu demselben Zwecke wurde die Cissoide des Diokles (Nr. **22**) erfunden, und es ist bemerkenswert, daſs durch die Erfindung der Cissoide — ebenso durch die der Konchoide — die Geometrie um ein treffliches Verfahren bereichert war, aus einer beliebigen Kurve eine andere abzuleiten, die man die cissoidale Kurve

der ersteren zu nennen pflegt (Nr. **29**). Konchoide und Cissoide gehören überdies einer zahlreichen Gruppe von Kurven an, die man wegen ihrer hauptsächlichsten Anwendungen als Multiplikatrix-, Mediatrix- und Sektrix Kurven bezeichnet hat (Nr. **47—51**, **98**, **141—152**).

Die Völkerwanderungen, die Einfälle der Barbaren, und die Religionskriege, die das Mittelalter erfüllten, wie auch humanistische Studien, die dazumal ihr Interesse beanspruchten, verursachten eine derartige Stagnierung bezw. Ablenkung der geistigen Thätigkeit des Menschengeschlechts, dafs ganz besonders die von den Mathematikern des goldenen Zeitalters der griechischen Geometrie gestreuten Keime schlummerten ohne Früchte zu zeitigen. Das überkommene Erbteil der Geometrie blieb nicht nur nicht auf seinem Bestande, sondern erlitt auch beklagenswerte Verluste; wir brauchen nur daran zu erinnern, dafs in jener Epoche der Barbarei, in welcher die rohe Gewalt über die Vernunft herrschte, Werke wie die Porismen des Euklides, die Ebenen Örter des Apollonius, und wer weifs wie viele andere Schriften, von denen nicht einmal der Titel oder der Name des Autors übrig geblieben, für immer vernichtet worden sind. Die von den Arabern nach Europa gebrachten Fragmente griechischer Wissenschaft, die sich aus dem gewaltigen geistigen Schiffbruche des Mittelalters gerettet hatten, erweckten alsbald auch bei den Abendländern den eingeschläferten Geist zur Erforschung der Wahrheit, und die ebenen Kurven gaben alsbald den Beweis von der geistigen Arbeit der Mathematiker. Die Theorie dieser interessanten Gebilde erfuhr alsbald durch die Verdienste eines Descartes und Fermat eine vollständige Umwandelung und eine ungeahnte Entwickelung. Die Koordinatenmethode ist die Zauberin, die mit einem Schlage eine derartige Umwandlung bewirkte! Sie liefert ja nicht blofs ein einheitliches Verfahren, jede Kurve symbolisch darzustellen, sondern sie bietet auch die Möglichkeit eine allgemeine Theorie der Kurven zu schaffen, und setzt jeden in den Stand, die Schar der speziellen ebenen Kurven um neue Elemente zu bereichern.

Mit der Entstehung der analytischen Geometrie ist die Untersuchung einer Kurve eigentlich identifiziert mit der einer Funktion; jeder Fortschritt in der Analysis macht sich auch in einem solchen der Geometrie bemerkbar; zwei Disziplinen, die zunächst in verschiedener Richtung und zu verschiedenen Zwecken streben, vereinigen sich und gehen für immer zusammen. Und dieser Vereinigung verdanken unzählige wichtige Kurven ihre Entstehung; wir erwähnen zunächst das Folium Cartesii (Nr. **32**), die Parabeln (Nr. **116**) und die Hyperbeln höherer Ordnung (Nr. **120**), die Perlkurven (Nr. **122**), die Lamé'schen Kurven (Nr. **124**) und die triangulär-symmetrischen (Nr. **125**); ebenso die Polyzomalkurven (Nr. **128**) und andere (Nr. **114**). In zweiter Linie heben wir hervor die trigonometrischen (Nr. **222**, **223**), die logarithmische, die hypergeometrische von Euler und die Kurve von Wallis (Nr. **224** u. **225**), sowie die aus der Theorie der Polynome entspringenden (Nr. **161** ff.) und die aufserordentlichen Kurven (Nr. **226**).

In der Epoche in der Descartes und Fermat herrschten, begannen auch die schon von Archimedes ausgestreuten Samen der Infinitesimalrechnung, die Hunderte von Jahren unfruchtbar im Boden gelegen hatten,

Keime zu treiben. Eben in dieser Epoche gelangen Ergänzungen zur Theorie einiger wichtiger Kurven von allergröfster Bedeutung, die man nach heutiger Bezeichnung als Bestimmung der analytischen Natur gewisser, in der Geometrie auftretender Funktionen bezeichnen kann. Denn, gehört nicht die Untersuchung hierher, die dazu führt, dafs jeder Bogen der Archimedischen Spirale gleich einem passend gewählten auf der Parabel sei? (vgl. Nr. **183**). Heute sind wenige Zeilen Rechnung erforderlich, um die Wahrheit dieses Satzes nachzuweisen, aber welcher grofse Scharfsinn war nicht erforderlich, um die Identität von Bogen solch verschiedener Kurven, wie die obigen, zu erkennen? Und das um so mehr, als das Problem der Rektifikation einer Kurve ein Hindernis war, dem die Waffen der alten Geometer nicht gewachsen waren, und vor dem selbst ein Archimedes sich als besiegt erklären mufste!

Dieses glänzende Resultat ermutigte die Mathematiker, den Versuch zu machen, auch andere gekrümmte Linien auszumessen oder sie mit anderen verschiedenen zu vergleichen. In der That verallgemeinerte Fermat den oben genannten Satz, indem er die Gleichheit zwischen dem Bogen einer Parabel höherer Ordnung und dem einer jener Spiralen erkannte, zu denen man durch Verallgemeinerung der Archimedischen gelangte (Nr. **185**). Nicht lange Zeit war verflossen, als auch schon (und zwar fast gleichzeitig und unabhängig voneinander) der Franzose Fermat, der Engländer Neil und der Holländer Heuraet eine algebraische Kurve entdeckten, die exakt rektifizierbar war: die semikubische Parabel; diesem Resultate kann die fast zur selben Zeit gelungene Rektifikation einiger transscendenter Kurven an die Seite gestellt werden, wie die der logarithmischen Spirale (Nr. **191**), der gemeinen Cykloide (Nr. **195**), der Epi- und Hypocykloiden (Nr. **203**), sowie einiger anderer (Nr. **197**). Diese schönen Ergebnisse führten später den Grafen von Fagnano zu einer ganzen Familie von Parabeln, die Bogen enthalten, deren Differenz rektifizierbar ist (Nr. **119**) und zu seinen berühmten Untersuchungen über die Rektifikation der Lemniskate (Nr. **94**), welche wichtige Vorarbeiten zur Theorie der elliptischen Funktionen bildeten. Von derselben Bedeutung sind auch die neueren Untersuchungen über die Kurven, deren Rektifikation von vorher bestimmten Funktionen abhängt; von den Früchten, die sie gezeitigt haben, weisen wir nur auf die Entdeckung der Serret'schen Kurven (Nr. **167**), sowie die der Sinusspiralen (Nr. **169**) hin.

Das durch die analytische Geometrie angewiesene Verfahren, unzählig viele spezielle Kurven zu erhalten (nämlich sie durch die entsprechenden Gleichungen zu definieren) läfst nicht immer ihre Gestalt erkennen und führt meistens nur mit grofser Umständlichkeit zu einer organischen Erzeugung derselben. Es ist daher nicht zu verwundern, wenn ein Geometer — Guido Grandi — sich die Aufgabe stellte, die Eigenschaften gewisser Kurven von vorher bestimmter Gestalt, nämlich der Rhodoneen (Nr. **134**) zu untersuchen, und wenn bald darauf die Gelehrten zu der Methode der Alten, d. h. zu der kinematischen Methode zurückkehrten, um neue Kurven zu erhalten. Dem Beispiele des genannten italienischen Geometers sind auch einige der neueren gefolgt: das zeigt uns die Erfindung der geometrischen Blätter (Nr. **138**), der dreieckigen und

orbiformen Kurven Euler's (Nr. **139**), einiger Ovale und des Trifolium pratense (Nr. **113**). Jene Rückkehr zu den älteren Methoden bezeugen uns weiter einige treffliche Arbeiten De la Hire's — es genüge die Anführung derjenigen, die sich auf die allgemeinen Konchoiden beziehen (Nr. **69**) — als neuere Ergebnisse dieser Methode haben wir die Cykloiden (Nr. **195**) und die glänzende Schar verwandter Linien, wie die Epi- und Hypocykloiden, die allgemeinen Trochoiden (**203**—**12**), insbesondere die Kurven von Delaunay und Sturm, die Olistoiden — insbesondere die Astroiden (Nr. **103**) — die Verfolgungskurven (Nr. **249**), die Reptorien Joh. Bernoullis (Nr. **214**), die syntrepenten und isotrepenten Kurven (Nr. **214**) anzuführen.

Derartige Studien führten zu wichtigen Untersuchungen und zur Aufstellung von Folgerungen, die in den Jahrbüchern der Mathematik niedergelegt worden sind. Aufser den unzähligen Sätzen über das Ziehen der Tangenten, über die Bestimmung der Kurvenbogen und Flächenberechnung (viele derselben, wenn sie auch heute in Vergessenheit geraten sind, sind dennoch würdig, den berühmten Resultaten, die Archimedes erzielte, an die Seite gestellt zu werden) möge noch eine Gruppe vollständig neuer Sätze und Aufgaben erwähnt werden, die aus derartigen Studien hervorgegangen sind. Entdeckt wurde der Tautochronismus der Cykloide (Nr. **200**), bemerkt wurde, dafs sie die Brachistochrone im leeren Raume sei, man ging an die Aufgabe, statt Kurven mit vorherbestimmten geometrischen Eigenschaften aufzusuchen, solche mit bestimmten mechanischen Eigenschaften zu bestimmen. So entstand das Problem der „curva descensus aequabilis", das von der semikubischen Parabel (Nr. **118**) gelöst wird, das der Seil- und Segelkurven, welches die Kettenlinie löst (Nr. **239**), das der Elastizitäts- und Muldenkurve, das durch dieselbe Kurve gelöst wird (Nr. **237**) und das der paracentrischen Isochrone von Leibniz (Nr. **238**). Nicht unerwähnt bleibe auch die Aufgabe, die zur Traktrix führt (Nr. **230**) und ein allgemeines, von Joh. Bernoulli gestelltes Problem, welches von den heute Tautobaryden und Barytropen genannten Kurven gelöst wird (Nr. **218**); ferner mögen denjenigen Kurven, die man als physikalisch-mathematische bezeichnen kann, noch die Cartesischen Ovale (Nr. **78**) hinzugefügt werden, indem man sie als aplanetische Linien betrachtet, und die Cassini'schen Ovale (Nr. **90**), angesehen als vorgebliche Bahnen der Planeten, die Äquitangentialkurven (Nr. **231**), die Isophanen (Nr. **255**), die Kettenlinie gleichen Widerstandes (Nr. **236**), die Konchospiralen (Nr. **193**), die elektromagnetische Kurve Em. Weyr's (Nr. **240**), die Lissajous'schen Kurven (Nr. **173**), die Galilei'sche Spirale, die Herpolhodie und die Poinsot'sche Spirale (Nr. **239**).

Das inverse Problem der Tangente ist in seinem Ursprunge mit einer bemerkenswerten Kurvenklasse verknüpft, welche als Debeaune'sche Kurven bezeichnet werden (Nr. **215**), während es in anderen Stadien seiner Entwickelung zu den Ribaucour'schen Linien (Nr. **217**), zur Spirale von Norwich (Nr. **220**) und zur Euler'schen Kurve führte (Nr. **221**).

Die Koordinatenmethode führt auch, abgesehen davon, dafs sie unzählig viele spezielle Kurven hervorspriefsen läfst, zu einem sehr einfachen Verfahren, eine Kurve in eine andere zu verwandeln, dessen Idee zuerst Varignon voll und klar erfafst hatte (Nr. **242**): man verwandelt nämlich

die kartesischen in Polarkoordinaten. Diesem einfachen Verfahren verdanken ihre Entstehung aufser der logarithmischen Spirale (zu der man allerdings auch auf anderem Wege gelangt) die hyperbolische (Nr. **188**) und die parabolische (Nr. **187**) Spirale und die höheren Grades (Nr. **185**); ferner der Lituus (Nr. **190**), sowie ein grofser Teil der algebraischen Spiralen (Nr. **188**). Indem man ein ähnliches Verfahren auf die gewöhnliche Traktrix anwandte, gelangte man zur Traktrix complicata (Nr. **232**).

Die geometrische Methode des Cartesius und Fermat, wenngleich sie von dem allerhöchsten und unbestreitbaren Nutzen ist, bietet dennoch unter Umständen ziemliche Unbequemlichkeiten, die man vergeblich zu leugnen oder zu beseitigen versuchen würde: die erste derselben ergiebt sich aus der Notwendigkeit, dafs man immer die Koordinataxen zu berücksichtigen hat, und zwar als fremde und häufig hinderliche Elemente. Die Versuche, diesen Unbequemlichkeiten auszuweichen, gehen bis zum Ende des 18. Jahrhunderts zurück. Dies zeigen folgende Worte, die Lacroix in der Vorrede seines grofsen *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral* (Paris 1797) S. XXV schrieb: „En écartant avec soin toutes les constructions géométriques, j'ai voulu faire sentir au lecteur qu'il existoit une manière d'envisager la Géométrie, qu'on pourroit appeler Géométrie analytique, et qui consisteroit à déduire les propriétés de l'étendue du plus petit nombre de principes, par des méthodes purement analytiques, comme Lagrange l'a fait dans sa Méchanique à l'égard des propriétés de l'equilibre et du mouvement.“ Diese Richtung in der Geometrie, meisterhaft innegehalten in den Werken besonders eines Hesse und Clebsch, hat schliefslich dazu geführt, das Studium der ebenen Kurven mit der Theorie der ternären algebraischen Formen zu identifizieren: ihr verdanken wir fast die ganze allgemeine Theorie der algebraischen Kurven, auf ihren ungeheueren Wert hinzuweisen, wäre daher überflüssig. Aber auch sie genügt noch nicht vollständig den Wünschen nach Befreiung von der unumgänglichen Betrachtung solch künstlicher Elemente, wie die Koordinaten sind, dem Bestreben eine analytische Geometrie zu besitzen, die ausschliefslich mit Elementen operiert, die mit der zu untersuchenden Kurve in engem Zusammenhange stehen. Diesem Bedürfnisse zu genügen, versuchte Leibniz mit seiner *Characteristica geometrica*, und dies gelang Grafsmann durch den in seiner *Ausdehnungslehre* enthaltenen geometrischen Kalkül. Dies zu erreichen waren auch diejenigen bemüht, die eine Kurve durch eine Gleichung darzustellen suchten, in welcher keine künstlichen Elemente, sondern nur solche vorkommen, die mit der Gestalt der Kurve zusammenhängen, wie Bogenlänge und Krümmungsradius. Die Anfänge dieser Methode sind schon mehr als ein Jahrhundert alt, und schon 1798 bemerkt Lacroix im II. Bande des vorhin rühmlichst erwähnten *Traité,* nachdem er davon eine Anwendung gemacht hat (S. 392): „cette manière de présenter l'équation d'une courbe, est remarquable en ce qu'elle n'emploie que des quantités absolument inhérentes à la courbe proposée et qu'elle ne laisse d'arbitraire que le choix du premier point.“ Andere Beiträge für denselben Gedankengang liefern die beiden Werke von C. F. Krause und A. Peters, die wichtigen Abhandlungen von Whewell,

Onnen und anderen[1]). Derjenige Geometer aber, dem dieser neue Zweig der analytischen Geometrie einen Kanon von Gesetzen verdankt, die einen richtigen Gebrauch desselben sichern, ist E. Cesàro, der dieser Disziplin, die er *Geometria intrinseca* nannte, zunächst eine Reihe von Abhandlungen, und dann ein vorzügliches Buch widmete, das kürzlich auch in deutscher Bearbeitung erschienen ist.

Wir haben auf diesen neuen Zweig der Geometrie besonders deswegen hingewiesen, weil aus ihm die Entdeckung vieler spezieller Kurven und Eigenschaften schon früher bekannter Kurven hervorgewachsen ist, ferner aber auch, weil er ein Mittel bietet — ähnlich dem von Varignon gelieferten — um wieder neue Kurven zu erhalten; man braucht nur in der Gleichung irgend einer Kurve die kartesischen oder Polarkoordinaten ganz oder teilweise durch natürliche Koordinaten zu ersetzen, um aus jener eine neue Kurve abzuleiten (vgl. Nr. **243**). Es möge auch nicht verschwiegen werden, dafs in vielen Fällen die natürliche Gleichung einer Kurve ganz von selbst zu Verallgemeinerungen führt, zu denen man wohl nie auf anderen Wegen gelangt sein würde; die Sternkardioiden (Nr. **72**), die Pseudocykloiden (Nr. **200**), die Pseudotraktrix (Nr. **231**) und die Pseudokatenarien (Nr. **235**) mögen zum Nachweise dafür dienen.

An diese Erzeugungs- oder Verallgemeinerungsarten analytischer Natur schliefsen wir diejenigen an, die in der Anwendung einer vorher bestimmten geometrischen Transformation auf eine gegebene Kurve bestehen, und wollen wir unter diese auch jene rechnen, die einer Kurve ihre Evolute, Evolvente (Nr. **251**), Parallelkurve (**261**), Kaustika oder Fufspunktkurve (Nr. **270**) entsprechen lassen. Erwähnen wir schliefslich noch die Untersuchung der Kurven, die durch eine geometrische Transformation wieder in sich selbst übergehen (Nr. **153** ff., **156**, **227**, **229**), so haben wir damit die Aufzählung der wichtigsten Wege erschöpft, auf denen die Gelehrten an der Aufstellung der reichen Scharen spezieller ebener Kurven gearbeitet haben, und die jederzeit von allen denen beschritten werden können, die ihnen nacheifern wollen.

Aber gerade die beträchtliche Ausdehnung, welche diese Scharen langsam und unaufhörlich annahmen, und die grofse Mannigfaltigkeit ihrer Elemente liefsen immer dringender den Wunsch hervortreten, sie in eine gute und gesetzmäfsige Ordnung zu bringen. Die Klassifikation der Kurven dritter Ordnung, die vor mehr als zweihundert Jahren ausgeführt wurde, dann die der Kurven vierter Ordnung, sowie die gegen 1750 von Euler und Cramer geschaffenen methodischen Bearbeitungen der algebraischen Kurven, bezeugen, wie alt dieser Wunsch schon ist. Derartige Arbeiten hat das verflossene Jahrhundert nicht weniger als vier von gröfster Bedeutung hinzugefügt: zwei von wesentlich analytischer Natur, durch Plücker und Clebsch, die dritte, die man als eklektisch bezeichnen kann, von Salmon, und schliefslich die vierte halb- oder pseudosynthetische von Cremona. Für eine streng synthetische Theorie der algebraischen Kurven haben schon R. de Paolis und

1) Wer sich spezieller hierüber informieren will, nehme den trefflichen *Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den natürlichen Koordinaten* von E. Wölffing zur Hand (Bibl. math. 3. Ser. I, 1900).

E. Kötter die wesentlichsten Elemente geliefert. Was uns durchaus noch fehlt, ist eine Theorie der nicht algebraischen Kurven, die, wenn sie auch nicht alle bekannten, so doch wenigstens die gröſste Zahl der transsscendenten Kurven umfassen möchte.

Manche und vielleicht wichtige Bausteine zur Ausfüllung dieser Lücke haben wir schon, wie uns eine eingehende Betrachtung der Darlegungen des Abschnittes VI insbondere und teilweise auch des Abschnittes VII lehren. Nämlich die meisten der dort betrachteten Kurven erfreuen sich der Eigenschaft, **daſs für jeden Punkt derselben der Neigungskoeffizient der Tangente** $\left(\frac{dy}{dx} = y'\right.$ in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten$\left.\right)$ **die Wurzel einer algebraischen Gleichung ist, deren Koeffizienten ganze Polynome in** x, y **sind**; mit anderen Worten: jede derartige Kurve ist die Integralkurve einer irreduzibelen Differenzialgleichung (erster Ordnung) von folgendem Typus

$$F(x, y, y') \equiv \sum_{r=0}^{r=n} f_r(x, y) \cdot y'^{n-r} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wo die $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n$ n Polynome ohne gemeinsamen Faktor sind; zu dieser Klasse gehören fast alle transsscendenten Kurven, die einen besonderen Namen erhalten haben, ausgenommen die Klothoide, die Euler'sche Kurve, die Linien von Mercator, die Kettenlinie gleichen Widerstandes, die Lemniskatrix und die Additions- und Subtraktions-logarithmische Kurve. Da sich nun der oben erwähnten Eigenschaft auch alle algebraischen Kurven erfreuen, so können jene transsscendenten Kurven als eine Verallgemeinerung derselben ausgssehen werden. Wir haben sie daher mit dem Namen panalgebraische Kurven bezeichnet; n wollen wir ihren Grad nennen, und ν, den höchsten Grad der Polynome $f_0, f_1, \ldots, f_n$, ihren Rang. Wir wollen nun zeigen, daſs die panalgebraischen Kurven eine Reihe von Eigenschaften besitzen, die ganz analog den bekannten der algebraischen Kurven sind[1]).

Mit u und v bezeichnen wir die Plücker'schen Koordinaten der Tangente im Punkte (x, y) einer panalgebraischen Kurve, die der Gleichung (1) genügt; die Ableitungen nach x wollen wir im allgemeinen durch Accente ausdrücken. Dann haben wir ersichtlich

$$u = \frac{y'}{y - xy'}, \qquad v = \frac{-1}{y - xy'};$$

daraus folgt:

$$y' = -\frac{u}{v}, \quad u' = \frac{yy''}{(y - xy')^2}, \quad v' = -\frac{xy''}{(x - xy')^2}; \quad \frac{v'}{u'} = \left(\frac{dv}{du}\right) = -\frac{x}{y},$$

und daher
$$x = -\frac{dv}{u \cdot dv - v \cdot du}, \quad y = \frac{du}{u \cdot dv - v \cdot du}.$$

Setzen wir nun in die Gleichung (1) für x, y, y' die eben als Funktionen von u und v gefundenen Werte ein, so erhalten wir:

---

1) Weitere Einzelheiten finden sich in der Abhandlung des Verf. *Le curve panalgebriche* (Prager Ber., 1901); wieder abgedruckt mit Berichtigungen und Zusätzen in *Le matematiche pure ed applicate* II, 1902.

$$\sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r u^{n-r} \cdot v^r \cdot f_r \left(\frac{-dv}{u \cdot dv - v \cdot du}, \frac{du}{u \cdot dv - v \cdot du}\right) = 0 \ldots \quad (2)$$

Nun ist dies eine Differenzialgleichung in u und v von analoger Beschaffenheit wie (1), aber vom Grade ν. Dies zeigt uns, dafs die panalgebraischen Kurven in ähnlicher Weise wie die algebraischen, zweier zu einander dualer Definitionen fähig sind, oder anders gesagt, man kann aussprechen den folgenden

Satz I. **Eine panalgebraische Kurve kann ebensowohl als Punktort, als auch als Enveloppe von Tangenten aufgefafst werden.**

Die Betrachtung der Differenzialgleichung (1) führt auch sehr leicht zur Erkenntnis der geometrischen Bedeutung der Zahlen n und ν; man findet nämlich als

Satz II. **In einer Schar panalgebraischer Kurven vom Grade n und vom Range ν finden sich n Kurven, die durch einen beliebigen Punkt der Ebene gehen und ν, welche eine gegebene Gerade der Ebene berühren.**

Dieser Satz ist schon enthalten in einem allgemeineren, der sich z. B. mit Hilfe der Methoden der abzählenden Geometrie leicht beweisen läfst[1]), nämlich in folgendem:

Satz III. **In einem System panalgebraischer Kurven vom Grade n und vom Range ν giebt es $m\nu + n\mu$ Kurven, die eine algebraische Kurve von der Ordnung m und der Klasse μ berühren.**

Aus den Entwickelungen in der Einleitung zum VI. Abschnitt folgt ferner (vgl. S. 408) der

Satz IV. **Die Berührungspunkte der von einem beliebigen Punkte an eine panalgebraische Kurve vom Grade n und vom Range ν gezogenen Tangenten liegen auf einer Kurve von der Ordnung $\nu + n$, die jenen Punkt als n-fachen Punkt hat.**

Satz V. **Die Tangenten in den Punkten einer panalgebraischen Kurve vom Range ν und vom Grade n, in denen sie von einer beliebigen Geraden geschnitten wird, gehören einer Kurve von der Klasse $n + \nu$ an, die jene Gerade als ν-fache Tangente hat.**

Eine interessante Eigenschaft der panalgebraischen Kurven ergiebt sich aus einem Fundamentalsatz über die singulären Lösungen der Differenzialgleichungen erster Ordnung, den man Darboux verdankt[2]). Dieser Satz besagt, dafs man durch Elimination von y' aus den beiden Gleichungen

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

die Gleichung des Ortes der Spitzen der Integralkurven der Gl. (1) erhält. Nun ist die resultierende Gleichung algebraisch, und auf dem Orte liegen

1) Vgl. Schubert, *Kalkül der abzählenden Geometrie* (Leipzig 1879) S. 51.

2) *Sur les solutions singulières des équations dérivées ordinaires du premier ordre* (Bull. des Sc. math. IV, 1873), vgl. E. Picard, *Traité d'analyse* III. (Paris 1896) S. 47.

insbesondere auch die Spitzen einer jeden beliebigen unter jenen Integralkurven; man schliefst daher den

Satz VI. **Die Spitzen einer panalgebraischen Kurve liegen auf einer algebraischen.**

Hieran können wir wegen der Dualität (vgl. Satz I) hinzufügen den

Satz VII. **Die Wendetangenten einer panalgebraischen Kurve berühren eine algebraische Kurve.**

Jede „algebraische“ Berührungstransformation, wie sie durch Gleichungen vom Typus

$$\varphi(x, y, y'; \; x_1, y_1, y_1') = 0, \qquad \chi(x, y, y'; \; x_1, y_1, y_1') = 0,$$
$$\psi(x, y, y'; \; x_1, y_1, y_1') = 0$$

definiert wird, wo φ, χ, ψ ganze, rationale algebraische Funktionen der Koordinaten x, y, y' und x_1, y_1, y_1' der beiden sich entsprechenden Linienelemente sind, verwandelt offenbar die Differenzialgleichung (2) in eine andere von demselben Typus, verwandelt daher jede Integralkurve von (2) in eine andere analoge; daraus geht hervor der

Satz VIII. **Jede panalgebraische Kurve wird durch eine Berührungstransformation in eine andere umgewandelt.**

So sind z. B. alle Parallelkurven Fufspunktkurven, Inversen einer panalgebraischen Kurve wieder panalgebraisch.

Die orthogonalen Trajektorien der ∞^1 Integralkurven der Differenzialgleichung (2) genügen der Differenzialgleichung

$$\sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r \cdot f_r(x, y) \left(\frac{dy}{dx}\right)^r = 0 \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

und da diese dieselbe Form hat wie (2), so besteht folgender

Satz IX. **Die orthogonalen Trajektorien einer Schar panalgebraischer Kurven sind ebenfalls panalgebraisch und von demselben Grade und Range.**

Die Para-Polarkurven der Punkte der Ebene in Bezug auf eine panalgebraische Kurve besitzen jede eine bestimmte Zahl singulärer (fester oder auch von Kurve zu Kurve variabeler) Punkte von bestimmter Vielfachheit. Es wird daher im allgemeinen ∞^1 Parapolaren geben, von denen jede wenigstens einen Doppelpunkt mehr hat; daher kann man (von der Analogie geleitet) den Ort der Punkte aufsuchen, die aufser dem gewöhnlichen noch einen Doppelpunkt haben, ebenso den geometrischen Ort dieser Doppelpunkte. Diese beiden Orte kann man, wegen der Analogie, die sie mit jenen Kovarianten einer algebraischen Kurve, die den Namen Steiner's und Hesse's tragen, als die Para-Steiner'sche und die letztere als Para-Hesse'sche bezeichnen. Dann kann man leicht beweisen den

Satz X. **Die Para-Steiner'sche und Para-Hesse'sche einer panalgebraischen Kurve sind algebraisch.** Damit nämlich die durch die Gleichung

$$\sum_{r=0}^{r=n} f_r(x, y)(Y-y)^{n-r} \cdot (X-x)^r = 0 \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

dargestellte Kurve, welche ja die Polare des Punktes (X, Y) ist, einen Doppelpunkt in (x, y) habe, müssen aufser der Gleichung (5) noch die beiden folgenden bestehen:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{r=0}^{r=n}\left\{\frac{\partial f_r}{\partial x}(Y-y)^{n-r}\cdot(X-x)^r - r f_r (Y-y)^{n-r}\cdot(X-x)^{r-1}\right\} = 0,\\ \sum_{r=0}^{r=n}\left\{\frac{\partial f_r}{\partial y}(Y-y)^{n-r}\cdot(X-x)^r - (n-r) f_r (Y-y)^{n-r-1}\cdot(X-x)^{r}\right\} = 0.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Eliminiert man aus (5) und (6) X und Y, so erhält man die Gleichung der Para-Hesse'schen, dagegen x, y, die der Para-Steiner'schen. Diese Elimination ist im allgemeinen zwar nicht ausführbar, jedenfalls aber ist sicher, dafs in beiden Fällen das Resultat eine algebraische Gleichung sein wird (von der man auch durch Anwendung bekannter Sätze aus der Algebra den Grad bestimmen kann), womit der Satz bewiesen ist. Die Elimination von X, Y aus (5), (6) läfst sich aber ausführen, wenn $f_1 = f_2 = f_3 = \cdots = f_{n-1} = 0$ ist; in dem Falle nämlich stellen sich jene Gleichungen in folgender Form dar

$$f_0(Y-y)^n + f_n(X-x)^n = 0; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5')$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f_0}{\partial x}(Y-y)^n + \frac{\partial f_n}{\partial x}(X-x)^n = n f_n (X-x)^{n-1},\\ \frac{\partial f_0}{\partial y}(Y-y)^n + \frac{\partial f_n}{\partial y}(X-x)^n = n f_0 (Y-y)^{n-1}.\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6')$$

Schreibt man die beiden letzteren wie folgt,

$$\frac{\partial f_0}{\partial x}\frac{(Y-y)^n}{(X-x)^n} + \frac{\partial f_n}{\partial x} = \frac{n f_n}{X-x}, \qquad \frac{\partial f_n}{\partial y}\frac{(X-x)^n}{(Y-y)^n} + \frac{\partial f_0}{\partial y} = \frac{n f_0}{Y-y},$$

so erkennt man, wenn man sie mit der ersteren kombiniert, dafs sie werden zu

$$\begin{vmatrix} f_0 & f_n \\ \frac{\partial f_0}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial x}\end{vmatrix} = \frac{n f_0 f_n}{X-x}, \qquad \begin{vmatrix} f_n & f_0 \\ \frac{\partial f_n}{\partial y} & \frac{\partial f_0}{\partial y}\end{vmatrix} = \frac{n f_n f_0}{Y-y};$$

erheben wir diese in die n^{te} Potenz, wenden von neuem Gleichung (6) an, so erhalten wir

$$H \equiv f_0 \begin{vmatrix} f_0 & f_n \\ \frac{\partial f_0}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial x}\end{vmatrix}^n + f_n \begin{vmatrix} f_n & f_0 \\ \frac{\partial f_n}{\partial y} & \frac{\partial f_0}{\partial y}\end{vmatrix}^n = 0 \quad \ldots \quad (7)$$

als Gleichung der Para-Hesse'schen der gegebenen panalgebraischen Kurve sowohl als auch aller derjenigen, welche der oben gekennzeichneten Differenzialgleichung erster Ordnung genüge leisten.

Wenn man, was noch spezieller ist, $n = 1$ setzt, und der Einfachheit wegen $f_n = \varphi$, $f_0 = \psi$ setzt, so wird die vorige Gleichung

$$H \equiv \begin{vmatrix} \varphi & \psi & 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \varphi \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \psi \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Man beachte nun, dafs man sich die Gleichung der Para-Hesse'schen einer panalgebraischen Kurve immer in dieser Form geschrieben denken kann. Löst man nämlich die Differenzialgleichung (2) auf nach $y' = \frac{dy}{dx}$, so erhält man ein Resultat von folgender Gestalt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi}{\psi}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

wo φ und ψ bestimmte, immer endliche Funktionen von x sind; sucht man nun die Bedingung dafür, dafs die Parapolare des Punktes (X, Y), nämlich die Kurve

$$\frac{X-x}{Y-y} = -\frac{\psi}{\varphi}$$

einen Doppelpunkt habe, so findet man in der That die Gleichung (8).

Diese Bemerkung führt uns zur Entdeckung einer anderen wichtigen Eigenschaft, die allen panalgebraischen Kurven gemeinsam ist. Differenzieren wir die Gleichung (9), so finden wir

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi\left(\varphi\frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) - \varphi\left(\varphi\frac{\partial \psi}{\partial y} - \psi\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\psi^3}$$

das will besagen, dafs

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{H}{\psi^3}.$$

Aus diesem Ausdrucke geht hervor, dafs für alle Punkte, in denen $H = 0$, $\psi \neq 0$, auch $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ist, daher sind diese Punkte für die Integralkurven der betrachteten Differenzialgleichung Wendepunkte. Umgekehrt hat man für einen Wendepunkt der Integralkurve $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, daher mufs, weil ψ immer eine endliche Funktion ist, $H = 0$ sein. Es liegen daher auf der Para-Hesse'schen die Wendepunkte aller (speziell einer jeden) der betrachteten Integralkurven. Wir schliefsen somit den

Satz XI. **Die Wendepunkte jeder panalgebraischen Kurve liegen auf einer algebraischen Kurve.**

Und wegen der Dualität (s. Satz I) können wir auch schliefsen auf den folgenden

Satz XII. **Die Spitzentangenten jeder panalgebraischen Kurve berühren eine algebraische Kurve.**

Aus XI ergiebt sich eine bequeme Methode, die Gleichung der Para-Hesse'schen einer panalgebraischen Kurve zu finden. Wenn diese nämlich

in kartesischen Koordinaten definiert ist, so braucht man nur einen Ausdruck für $\frac{d^2y}{dx^2}$ herzuleiten und gleich Null zu setzen, nachdem man die transscendenten Funktionen vermittelst der Kurvengleichung eliminiert hat. Ist dagegen die Kurve durch eine Gleichung in Polarkoordinaten definiert, so genügt es, die Gleichung

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{d}{d\omega^2}\left(\frac{1}{\varrho}\right) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

zu berechnen und dann so zu reduzieren vermittelst der Gleichung der gegebenen Kurve, dafs sie algebraisch erscheint.

Die bislang angestellten Betrachtungen zeigen uns, dafs die panalgebraischen Kurven enge mit der Betrachtung einer ziemlichen Zahl algebraischer Kurven verknüpft sind. Aber die angeführten sind nicht die einzigen, die man betrachten kann. Beachtet man, dafs uns der Satz VII beweist, dafs man in den meisten Fällen bei den dargelegten Entwickelungen an Stelle der Tangenten auch die Normalen setzen kann, so führt uns die gleichzeitige Betrachtung der einen sowohl wie der anderen zu wichtigen Bemerkungen, wie sich aus Folgendem ergiebt:

Wir nehmen in der Ebene einer panalgebraischen Kurve, die der Differenzialgleichung (2) genügt, einen beliebigen Punkt $P(x_0, y_0)$ an. Dann werden die Punkte der Kurve, deren Tangenten durch P gehen, durch die Gleichung

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = y' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

definiert werden. Die Normale in einem dieser Punkte (x, y) hat die Gleichung

$$(X - x) + (Y - y)y' = 0,$$

daher sind

$$u = -\frac{1}{x + yy'}, \qquad v = -\frac{y'}{x + yy'}$$

ihre Koordinaten. Demzufolge ist

$$y' = \frac{v}{u} \; . \; . \; . \; . \quad (12), \qquad ux + vy + 1 = 0; \; . \; . \; . \quad (13)$$

infolge von (12) wird dann Gleichung (11)

$$vx - uy = vx_0 - uy_0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

und diese kombiniert mit (13) liefert folgende Werte

$$x = -\frac{u + v(uy_0 - vx_0)}{u^2 + v^2}, \qquad y = -\frac{v + u(vx_0 - uy_0)}{u^2 + v^2} \; . \quad (15)$$

Setzen wir in (2) die Werte von (12) und (15) ein, so finden wir

$$\sum_{r=0}^{r=n} f_r\left(\frac{u + v(uy_0 - vx_0)}{u^2 + v^2}, \; -\frac{v + u(vx_0 - uy_0)}{u^2 + v^2}\right)\left(\frac{v}{u}\right)^{n-r} = 0 \; . \; . \quad (16)$$

Da nun diese Gleichung in u und v algebraisch ist, so ist der Beweis erbracht für folgenden

Satz XIII. **Die Normalen einer panalgebraischen Kurve in den Punkten, in denen sie von den Strahlen eines Strahlenbüschels**

berührt wird, sind sämtlich Tangenten einer und derselben algebraischen Kurve.

Ein Spezialfall dieses Satzes war zur Zeit schon bekannt, indem Juel bemerkte, daſs die Normalen einer Epi-(oder Hypo-)Cykloide in den Punkten, in denen sie von den Strahlen eines Strahlenbüschels berührt wird, alle denselben Kegelschnitt berühren (s. S. 494).

Ähnlich kann man beweisen den folgenden

Satz XIV. **Die Tangenten einer panalgebraischen Kurve in den Punkten von der Art, daſs die entsprechenden Normalen durch einen Punkt gehen, sind zugleich Tangenten einer algebraischen Kurve.**

Die bisher bekannten transscendenten Kurven, die nicht panalgebraisch sind, sind noch so wenig zahlreich, daſs er als verfrüht und unklug erscheinen muſs, schon jetzt ein Kriterium für ihre Klassifikation aufzustellen. Dennoch scheint es uns nützlich zu sein, bevor wir schlieſsen, auf einen Begriff hinzuweisen, auf den man zurückgreifen könnte, um wenigstens einige von diesen unterzubringen. Sowie man alle die transscendenten Kurven, bei denen die Berührungspunkte der von einem beliebigen Punkte der Ebene gezogenen Tangenten auf einer algebraischen Kurve liegen, in eine **erste Klasse** zusammenfaſst, so könnte man eine **zweite Klasse** bilden von solchen, bei denen jene Punkte auf einer panalgebraischen Kurve liegen; dann eine **dritte Klasse**, bei denen jene Punkte auf einer Kurve der zweiten Klasse liegen u. s. w. Diese neuen Kurven genügen einer Differenzialgleichung von höherer als der ersten Ordnung, deren Koeffizienten ganze, rationale Funktionen von x, y sind.

Möge das zwanzigste Jahrhundert, gewappnet mit allen ihm aus den vorigen Jahrhunderten überkommenen Hilfsmitteln, es dahin bringen, daſs die allgemeine Theorie der transscendenten Kurven aufhört, ein sehnlichst erwünschter und unerfüllter Traum der Geometer zu sein. Wenn für derartige Bestrebungen die vorliegende Schrift ein Vorbereitungs- und Hilfsmittel sein könnte, so würde der Verfasser für die Mühe, die ihm die Abfassung dieses Buches verursacht hat, reichlich entschädigt sein.

Berichtigungen und Zusätze.

S. 14, Z. 17 lies: 1637 statt: 1631.
„ 16, „ 31 „ Beziehung „ Bezeichnung.
„ 26, „ 12 „ $D = (k_0 k_3 - k_1 k_2)^2 - 4(k_0 k_2 - k_1{}^2)(k_1 k_3 - k_2{}^2)$.
„ 34, „ 29 „ Pericissoide statt: Percissoide.
„ 39, „ 15 $x = -\frac{p\eta^2}{p^2 + \eta^2}$, $y = \frac{\eta^3}{p^2 + \eta^2}$.
„ „ „ 34 lies: crunodal statt: connodal.
„ 45, „ 21 „ $-2r\cos(\omega - \alpha)$ „ $= 2r \ldots.$
„ 57, „ 25 „ $x^{2n-1} + y^{2n-1} = (2n-1)ax^n y^n$ statt $x^{2n-1} + y^{2n-1} = (2n+1)ax^n y^n$.
„ „ Zusatz: Es giebt übrigens zwei Monographieen über diese Kurve: Erdmann, *Das Descartes'sche Folium in seiner Verallgemeinerung* (Progr. Münster, 1871); Rychlicki, *Das Folium von Descartes* (Progr. Wongrowitz, 1884).
„ 63, Note 1) gehört als 2) auf die vorige Seite.
„ 66, Z. 33 lies: S. 236 und 238.
„ 75, Zusatz: Die Erfindung der Versiera, die man gewöhnlich der Maria Gaëtana Agnesi zuschreibt (1748), kommt Guido Grandi zu, der sie 1703 erdachte und ihr 1718 den heute üblichen Namen beilegte. S. die Note von G. Vacca, *Sulla versiera* (Boll. di bibl. e storia delle sc. mat. IV. 1901, S. 33).
„ 78, Z. 19 lies: $\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta - 2 = 0$ statt: $\ldots\ldots - 2a = 0$.
„ 80, Zusatz: Die hier Pseudo-Versiera genannte Kurve war schon 1684 von Ozanam unter dem Namen Geometrische Quadratrix untersucht worden: s. dessen *Géométrie pratique* sowie das *Dictionnaire mathématique* desselben Geometers (Amsterdam 1691, S. 108); vgl. den Aufsatz des Verf. *Pseudoversiera e quadratrice geometrica* in der Bibl. math. 3. Folge, III. 1902. S. 127—130.
„ 80, Z. 16 füge hinzu: *Leibniz,* ed. Gerhardt V, S. 91.
„ „ „ 25 lies: VII statt: VIII.
„ 82, „ 11 „ $\cdots + 3 = 0$ „ $\cdots + 3a$.
„ 91, Zusatz zu Note 1): C. Reuschle bezeichnet die Kurve mit der Gleichung $(x + y)(x^2 + y^2) = 3axy$ als cirkulares Folium (*Praxis der Kurvendiscussion,* I. Tl. Stuttgart 1886, S. 97).
„ 97. Z. 32 ist zu tilgen: (vgl. *Intermédiaire* IV. 1897, S. 222).
„ „ Zusatz zu Note 2): Die älteste Erwähnung der Kurve vierter Ordnung

$$y^4 - 96y^2 - x^4 + 100x^2 = 0,$$

welche die eigentliche „Teufelskurve" ist, findet sich in der *Introduction* von G. Cramer (Genf 1750), woselbst diese Gleichung (S. 19—23) sorgfältig diskutiert wird, um die Gestalt der Kurve festzulegen.
„106, Z. 16 lies: dritter Klasse statt: dritter Ordnung.
„117, „ 3 „ κρίκος „ κίρκος.
„138, „ 26 „ $(x^2 + y^2)^2 + \cdots$ „ $(x^2 + y^2) + \cdots$
„136, Zusatz: Die Konchoide einer Kurve n^{ter} Ordnung, die r-mal durch den Pol und s-mal durch die Kreispunkte geht, ist von der Ordnung $2[2n - (r + s)]$. S. eine Note des Verf. im *Intermédiaire* VIII. 1901, S. 297.
„181, Zusatz: Ebenfalls eine Polyzomal-Kurve vierter Ordnung ist die von G. Ritt in dem *Manuel des aspirants à l'Ecole polyt.* (Paris 1839, S. 161

u. 381) angegebene und von Brocard in der *Note sur la quartique* $y = \pm\sqrt{2ax} \pm \sqrt{a^2 - x^2}$ (*Le matematiche pure ed applicate* I. 1901) und dann noch genauer von V. Retali in der Abh. *Sopra una quartica binodale* (Ebendas.) untersuchte.

S. 188, Z. 27 lies: $\cdots = \frac{2}{b}\int\limits_0^a x \ldots$ statt: $\cdots \frac{2}{b}\int\limits_0^0 x \ldots$

„ 189, „ 24 „ nulla statt: nullo.
„ „ „ 25 „ delle „ della.
„ 209, „ 32 „ A_3 „ A_1.
„ „ „ 33 „ A_1 „ A_3.
„ „ „ 36 „ A_3 „ A_1.
„ 212, „ 8 „ *Underweysung* statt: *Underscheidung.*
„ 222, „ 15 „ Durchmessern „ Durchmesser.
„ 223, Zusatz: Ähnliche Kurven 3ter bis 9ter Ordnung finden sich nachgewiesen in der Dissertation von K. Dörholt, *Über einem Dreieck um- und eingeschriebene Kegelschnitte* (Münster 1884). Beispielsweise sei erwähnt: „Der Ort der Mittelpunkte zweier einander ähnlicher, konzentrischer Kegelschnitte, von denen der eine einem Dreiecke ABC umbeschrieben, der andere einem anderen $A_1B_1C_1$ einbeschrieben ist, besteht aus einer Kurve siebenter Ordnung und der unendlich fernen Geraden." Die Kurven selbst sind jedoch nicht weiter untersucht.
„ 233, Zusatz: Nach Chasles (Bull. de la Soc. math. de Fr. VI. 1877—78, S. 214) wurde der Name courbe à longue inflexion von Hachette in seiner *Histoire des machines à vapeur* vorgeschlagen.
„ 254, Zusatz: Weitere Anwendungen der Methode eine Kurve zu verallgemeinern, indem man ihre Gleichung verallgemeinert, finden sich bei E. N. Barisien, *Sur deux familles de courbes* (Mathésis, 3. Ser. I. 1901); daselbst wurden die Kurven mit der Gleichung

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{a^m}{a^m - x^m}, \qquad \frac{y^2}{x^2} = \frac{a^m + x^m}{a^m - x^m}$$

untersucht, die für $m = 1$ einer Cissoide resp. Strophoide angehören.
„ 281, Z. 3 lies: (vgl. Nr. **169**) statt: Nr. **170**.
„ 285, „ 16 „ reduzieren sich auf.
„ 305, „ 24 „ die Kurve (2) statt: (1).
„ „ „ 25 „ $\varpi = \omega_1$ „ ω.
„ 306, „ 3 „ heranging [1]) „ [2]).
„ 308, „ 20 „ $f(\omega) + f(\omega + \pi)$ „ $\varphi(\omega) + \varphi(\cdots$
„ 325, Zusatz: Der Fundamentalgedanke der Erzeugung der Ceva'schen Cykloiden wurde neuerdings von Perrin wieder aufgenommen und für einen Polysektor-Mechanismus verwendet; s. die *Note sur la division mécanique de l'angle* (Bull. de la Soc. math. de Fr. IV. 1875—76).
„ 337, Überschrift, lies: Die Sektrix-Kurven statt: Trisektrix-.
„ 338, Z. 3. Zusatz: Setzt man $OD_n = \varrho_n$, so findet man durch leichte Rechnung

$$\varrho_n = r\,\frac{\cos\frac{n+1}{2}\varphi}{\cos\frac{n-1}{2}\varphi} \quad \ldots (16) \qquad \text{oder} \qquad \varrho_n = r\,\frac{\sin n\varphi - \sin\varphi}{\sin(n-1)\varphi} \quad \ldots (16')$$

„ „ „ 9 u. 15 lies: (16) und (16′) statt: (12) und (12′).
„ 338, „ 19 lies im Nenner: $\cos\frac{n-1}{2n}\omega$ statt: $\cos\frac{n-1}{2}\omega$.
„ 343, „ 4 „ $2n + 1$ statt: $2^n + 1$.
„ 358, Zusatz: Über die autopolaren Kurven s. m. den wichtigen Aufsatz von C. Rabut, *Équations et propriétés fondamentales des courbes autopolaires dans le plan et dans l'espace* (C. R. CXXXII, 1901).

S. 380, Zusatz: Die Kurven von der Ordnung $3n$, die man aus den cirkularen Kurven dritter Ordnung durch eine isogonale Transformation vom Typus $w = \varphi(z)$ erhält (wo φ ein Polynom vom Grade n in z ist), wurden zu analytischen Zwecken von N. Perry untersucht in der Diss. *Das Problem der conformen Abbildung für eine spezielle Kurve von der Ordnung* $3n$ (München 1901).

„ 398, Zusatz: In der von der Société mathématique de France am 3. März 1875 abgehaltenen Sitzung machte Halphèn eine Mitteilung *Sur les courbes planes dont le rayon de courbure est proportionnel à la normale polaire* (Bull. de la Soc. m. de Fr. III. 1874—75, S. 182), die jedoch, soweit uns bekannt, nicht publiziert worden ist. Da nun die Differenzialgleichung einer derartigen Kurve offenbar lautet:

$$\frac{\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 - \varrho\frac{d^2\varrho}{d\omega^2} + 2\left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2} = k\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

so zeigen uns die auf S. 398—99 ausgeführten Rechnungen, dafs diese Sinusspiralen sind, oder im Ausnahmefall logarithmische Spiralen.

„ 411, Z. 33 lies: ... schneidet, und dafs die Durchschnittspunkte derselben mit der Geraden $y = \frac{2r}{\pi}$ Wendepunkte statt: ... schneidet, die alle Wendepunkte ...

„ 415, „ 16 „ wenn $\alpha = \frac{2k\pi}{p}$, und $\lambda = \frac{\sin 2\alpha}{2}$ ist.

„ 416, „ 11 „ wie wir (Nr. **222**) sehen statt: Nr. **218**.

„ 466, „ 15 „ $r \geqq d$ „ $r \leqq d$.

„ 543, „ 27 „ $x = x_1$, $y = y_1 \cdot \cos\alpha$.

„ „ „ 32 „ $\frac{x}{a} = -\log\cos\alpha + \log\frac{y}{b}$, $\frac{y}{b\cos\alpha} = \log\cos\alpha + \log\frac{x}{a\cos\alpha}$.

„ 551, „ 34 „ du Bois-Reymond statt: ... Raymond.

„ 567, Zusatz: Über die Traktrix-Kurven im allgem. sehe man L. Kleritj, *Traktoriograph und Construktion der transcendenten Zahlen „π" und „e" sowie Construktion der n-seitigen, dem Kreise eingeschriebenen regelmäfsigen Polygone* (Dinglers polyt. Journ. Bd. 305, 1897).

„ 573, „ 9 lies: in Nr. **232** untersuchte statt: ... Nr. **233**.

„ 575, „ 20 „ $e^{-\frac{x}{c}} = \frac{-s + \sqrt{s^2 - c^2}}{c}$ „ $= \frac{-s - \sqrt{s^2 - c^2}}{c}$.

„ 576, „ 2 „ $e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}} = \frac{2s}{c}$ „ $e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} = \cdots$

„ 579, „ 17 „ mufs $r < \frac{1}{\sqrt{2}}$ sein „ $r > \cdots$

„ 590, „ 4 „ $= Const.$ „ $- Const.$

„ 607, „ 20 „ aus zwei Wellenzügen.

„ „ „ 22 „ oberhalb und unterhalb der x-Axe.

„ 680, „ 2 „ wird sowohl mit der Tangente in M_1 ...

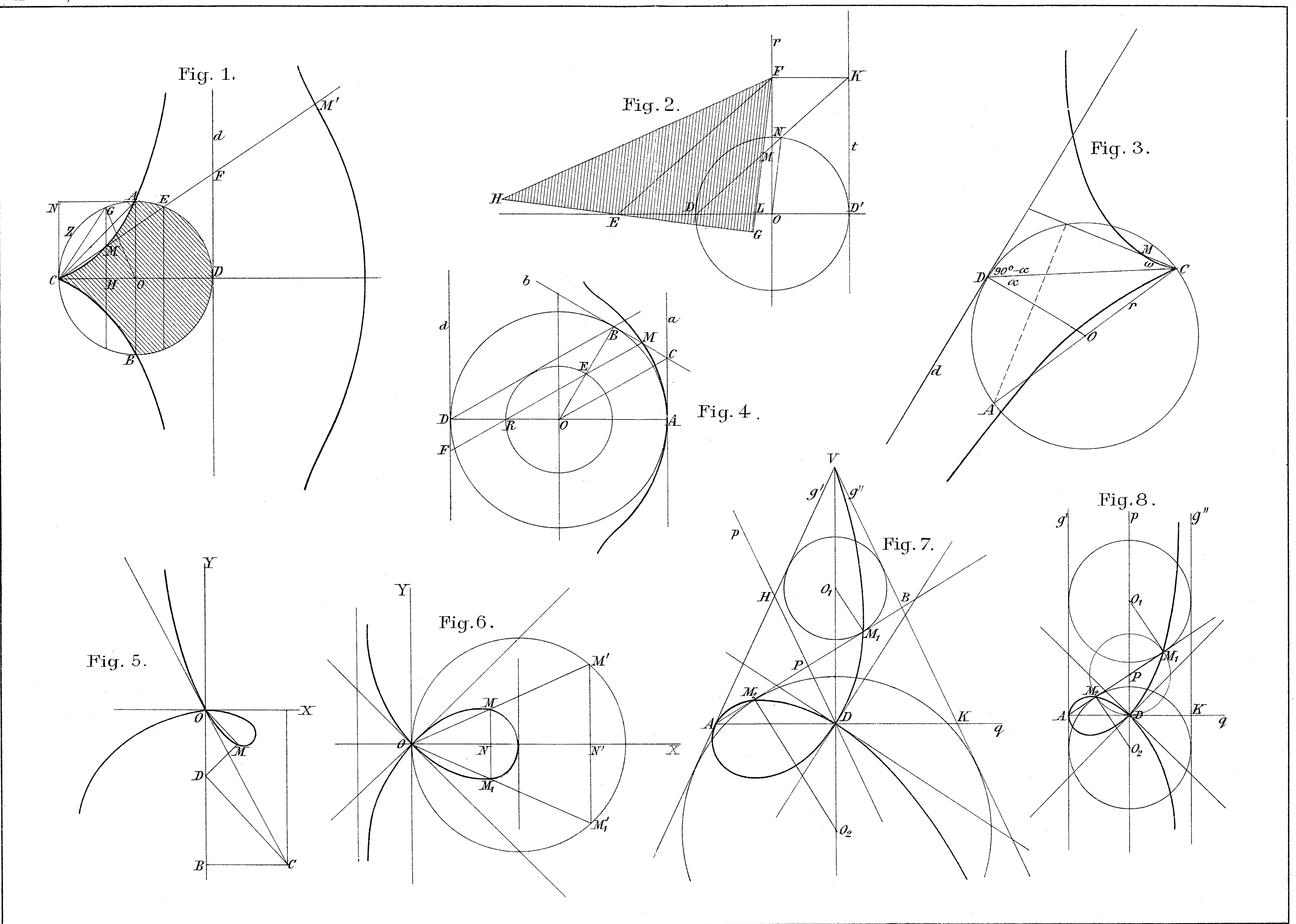
Namen-Register.

(Die Nummern bedeuten die Seitenzahlen.)

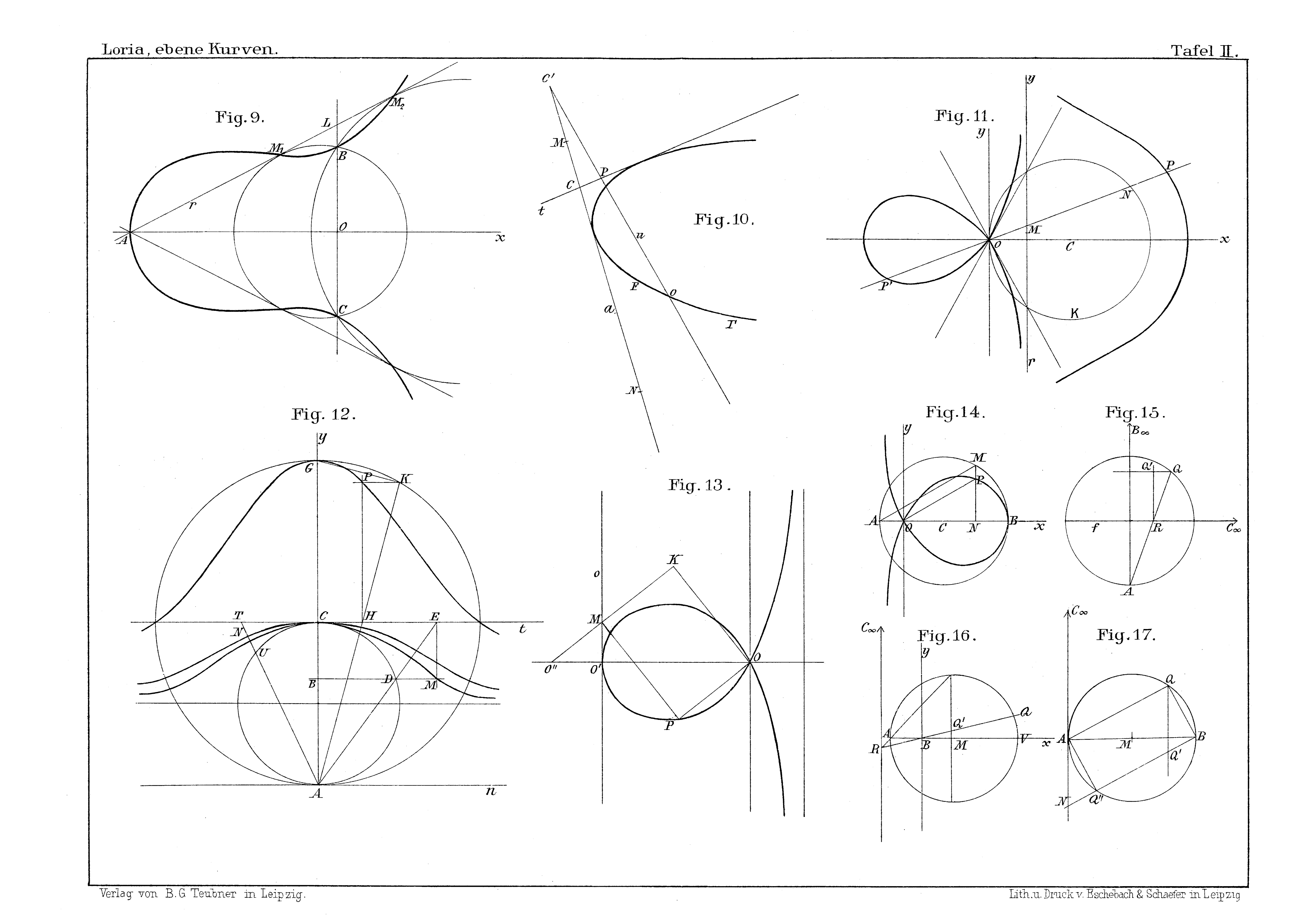
Sach-Register.

Die Nummern bedeuten die Seitenzahlen. Mit Ausnahme von Kurve, welches überall durch K. abgekürzt ist, suche man die Artikel immer unter dem Hauptworte, z. B. Archimedische Spirale unter Sp., aber Euler'sche Kurve unter E. Nach Eigennamen benannte Sätze und Formeln suche man vermittelst des Namen-Registers.

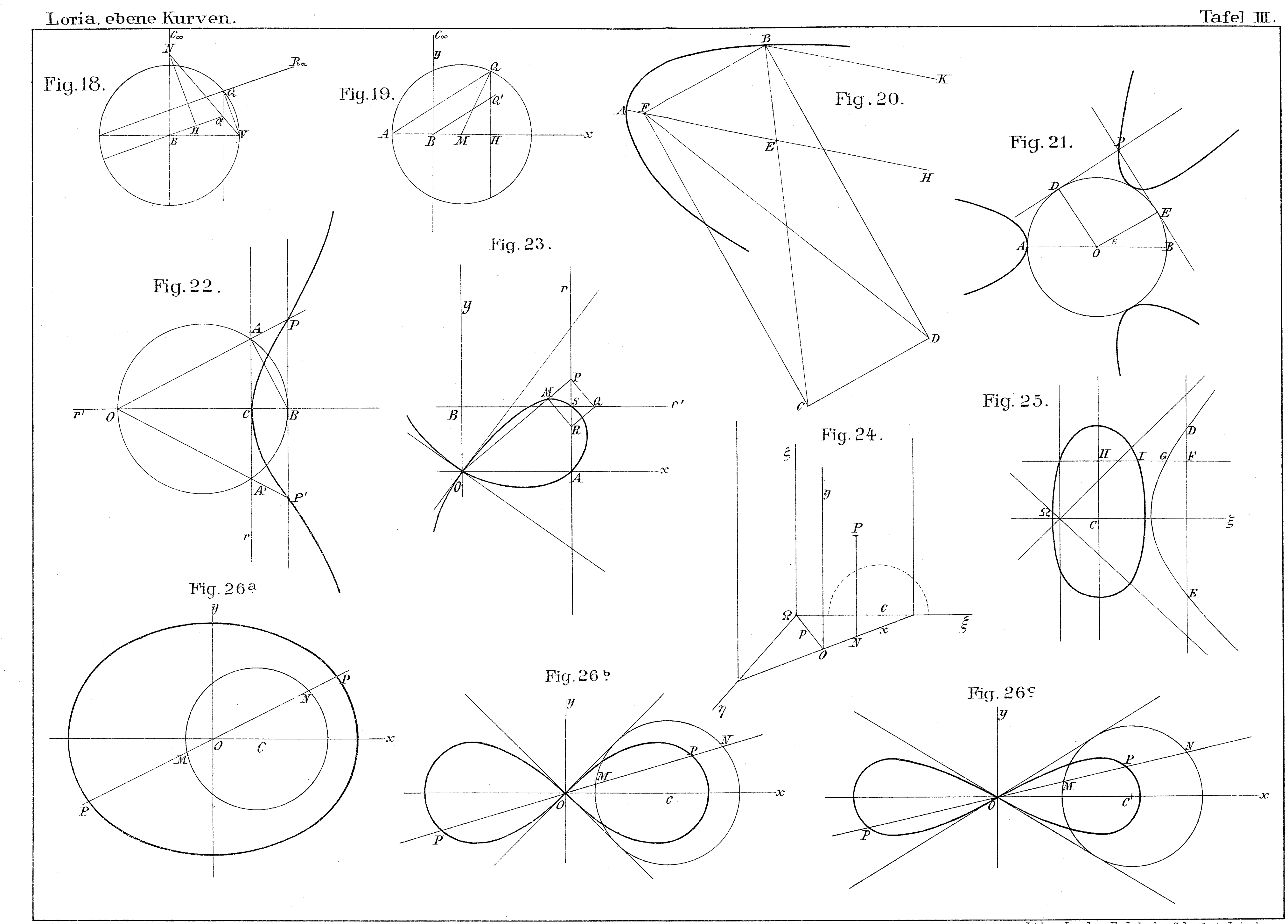
Nachweis für die Tafeln.



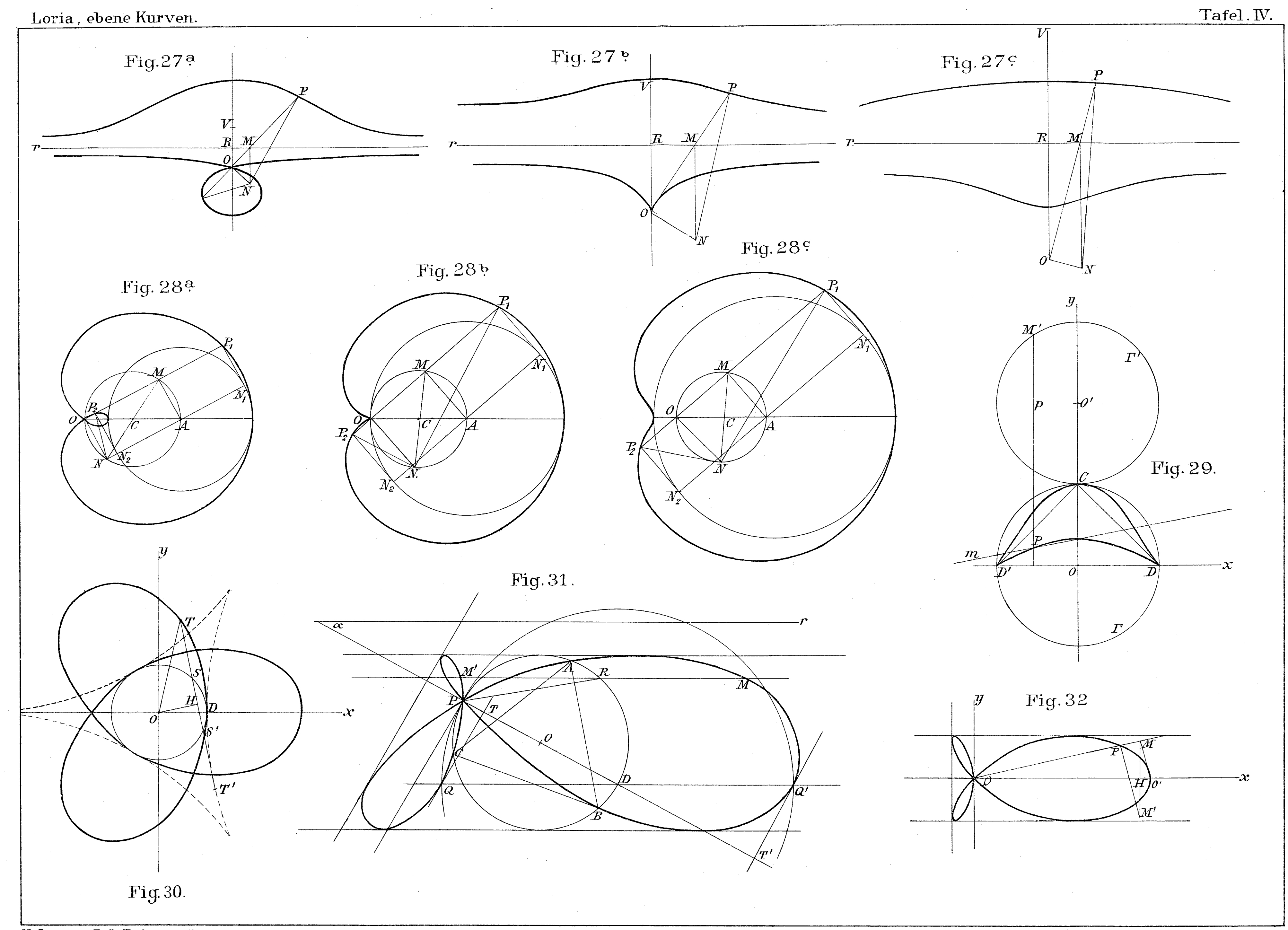
Verlag von B. G. Teubner in Leipzig
Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer in Leipzig.



Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.
Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer in Leipzig



Verlag von B. G. Teubner in Leipzig. Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer in Leipzig.



Verlag von B. G. Teubner in Leipzig
Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer in Leipzig.

Fig. 33.

Fig. 34.

Fig. 35.

Fig. 36.

Fig. 37.

Fig. 38.

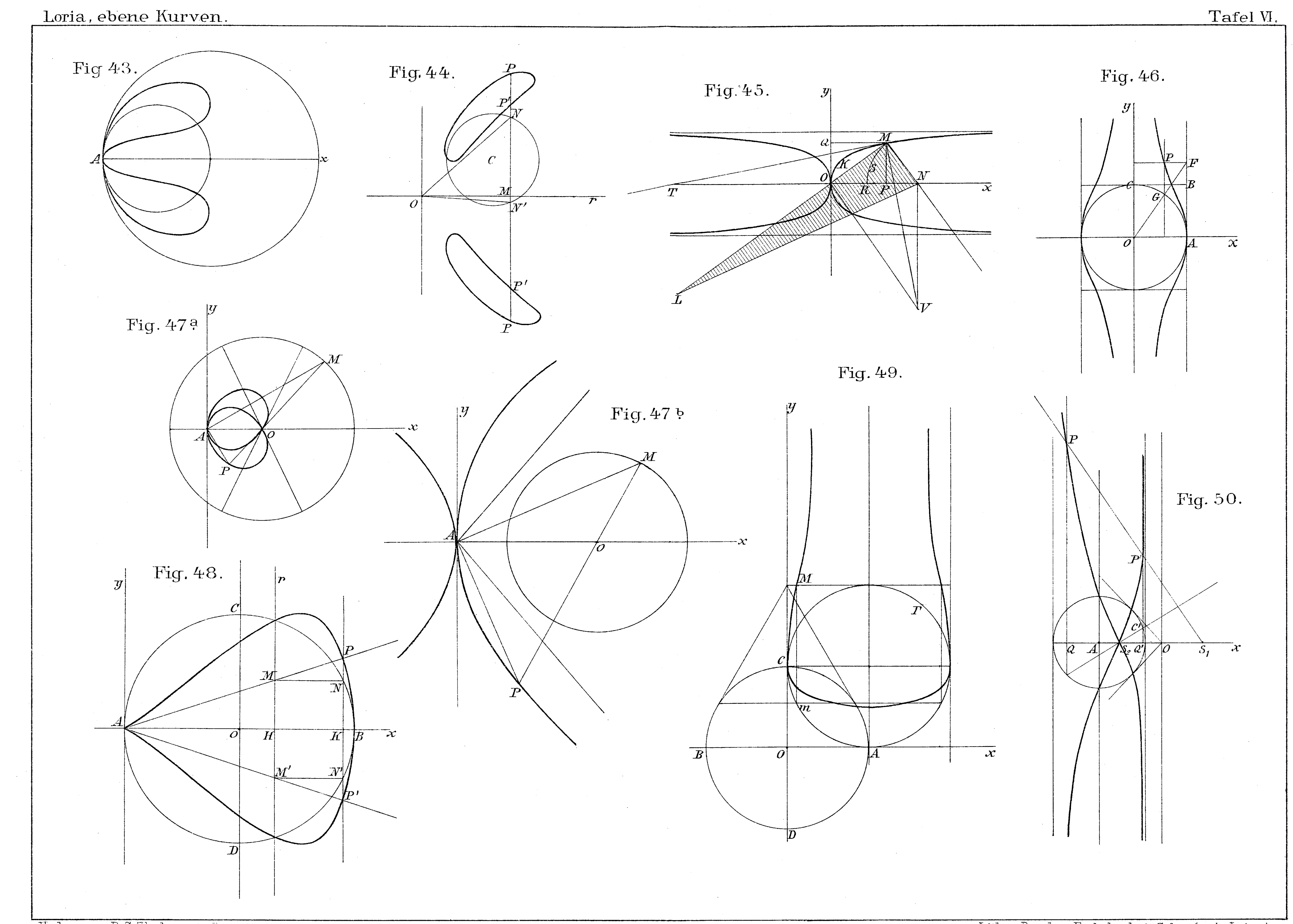
Fig. 39.

Fig. 40.

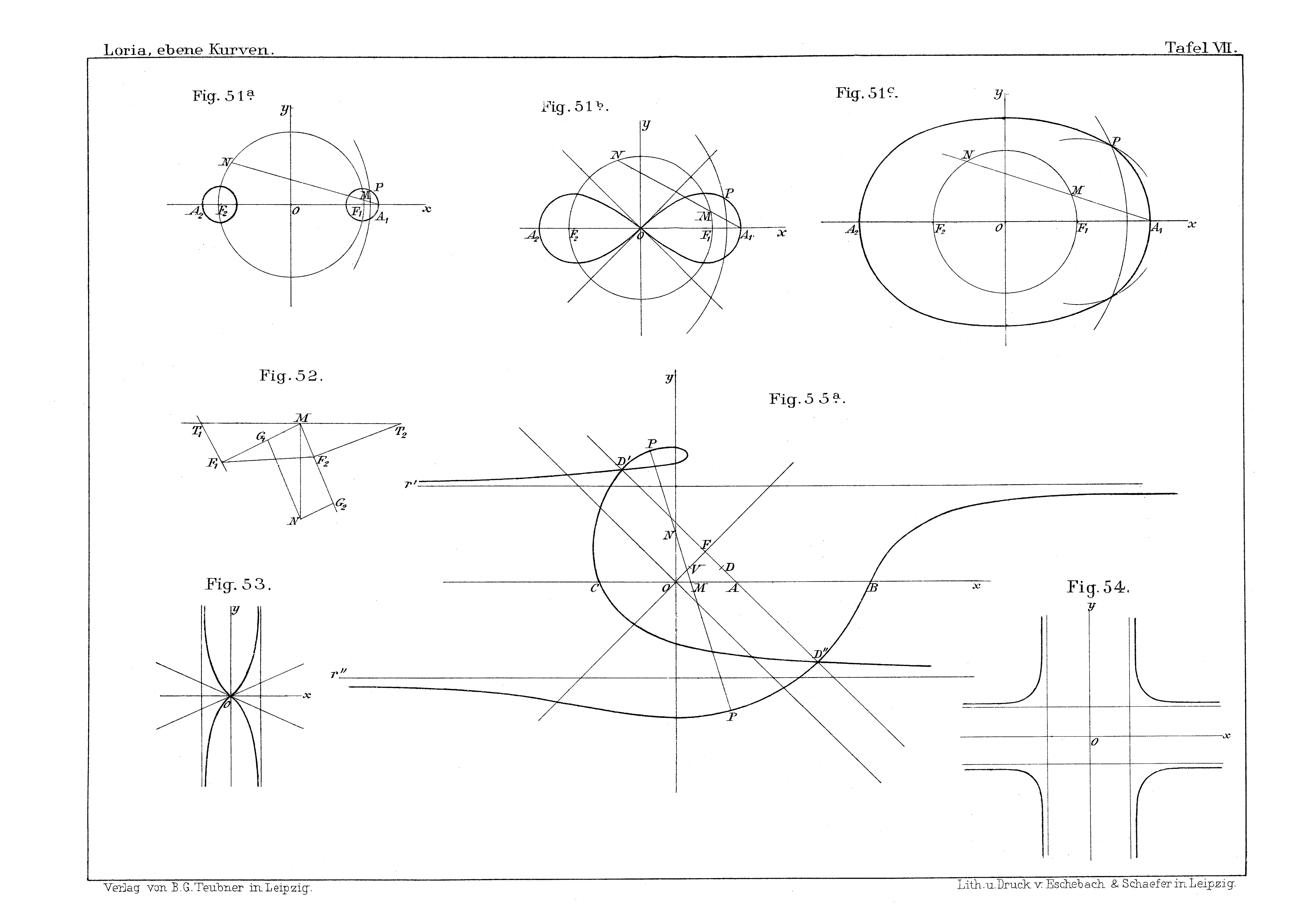
Fig. 41.

Fig. 42.

Verlag von B.G.Teubner in Leipzig. Lith.u.Druck v. Eschebach u.Schaefer in Leipzig.



Verlag von B. G. Teubner in Leipzig. Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer in Leipzig.



Verlag von B. G. Teubner in Leipzig. Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer in Leipzig.

Fig. 55b.

Fig. 56.

Fig. 55c.

Fig. 57a.

Fig. 57b.

Verlag v. B. G. Teubner in Leipzig.

Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer in Leipzig

Fig. 59a.

Fig. 59b

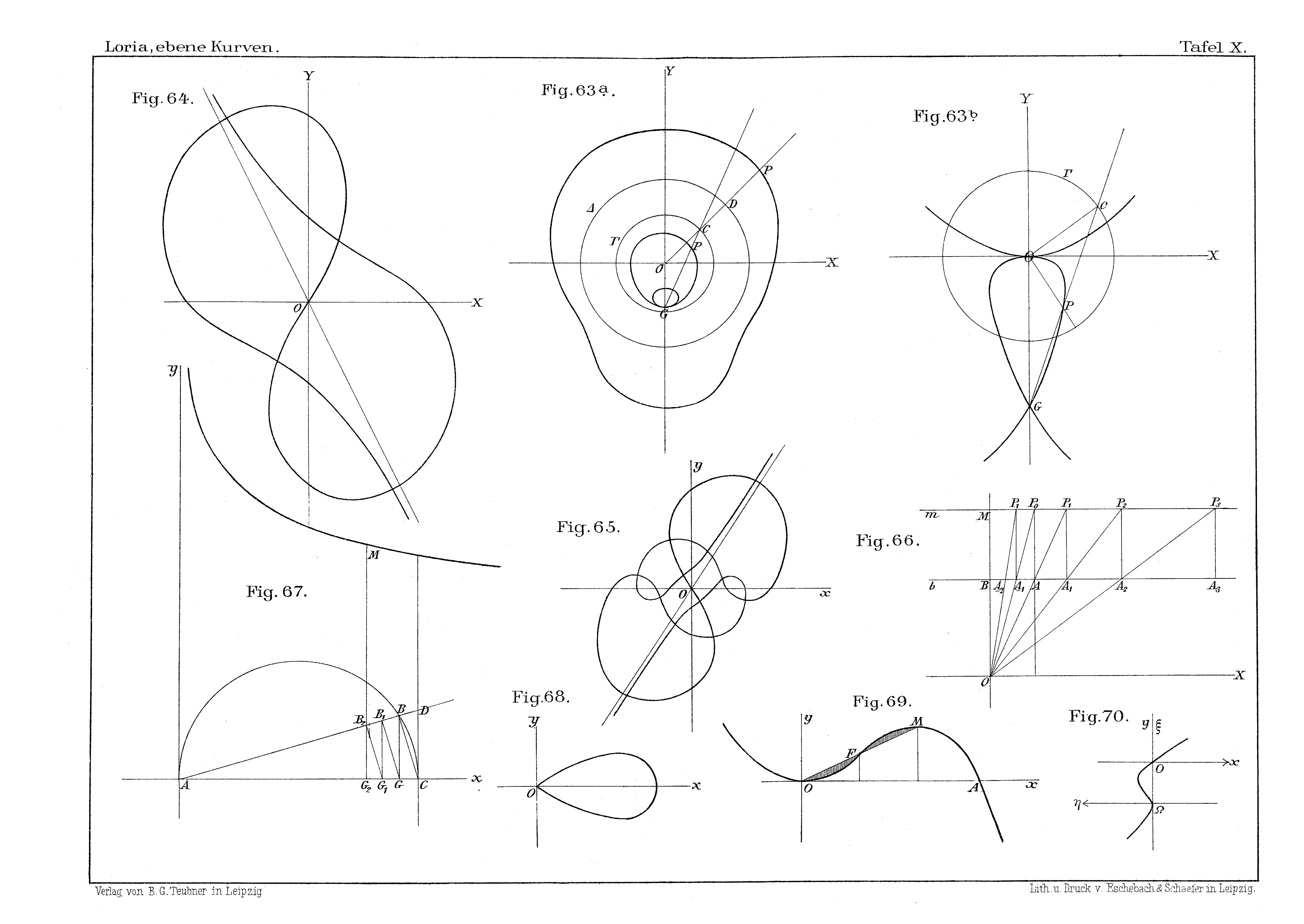
Fig. 62.

Fig. 58.

Fig. 60.

Fig. 61.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig. Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer in Leipzig.



Verlag von B. G. Teubner in Leipzig
Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer in Leipzig.

Fig. 71.

Fig. 72.

Fig. 73.

Fig. 74.

Fig. 75.

Fig. 76.

Fig. 77.

Fig. 78a

Fig. 78b

Fig. 78c

Fig. 79.

Fig. 80.

Fig. 81.

Fig. 82.

Fig. 83.

Fig. 84.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig

Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer in Leipzig.

Fig. 85.

Fig. 86.

Fig. 87.

Fig. 88.

Fig. 89.

Fig. 90.

Fig. 91.

Fig. 92.

Fig. 93.

Fig. 94.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig. Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer in Leipzig.

Fig. 95.

Fig. 96.

Fig. 97.

Fig. 98.

Fig. 99.

Fig. 100.

Fig. 101ª.

Fig. 101ᵇ

Fig. 102.

Fig. 103.

Fig. 104.

Fig. 105.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig. Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer in Leipzig.

Fig. 106. Fig. 107. Fig. 108. Fig. 109. Fig. 110. Fig. 111. Fig. 112. Fig. 113. Fig. 114. Fig. 115 a. Fig. 115 b. Fig. 115 c.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig. Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer in Leipzig.

Fig. 116.

Fig. 117.

Fig. 118.

Fig. 119.

Fig. 120 a

Fig. 120 b

Fig. 121.

Fig. 122.

Fig. 123.

Fig. 124.

Fig. 125.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig. Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer in Leipzig.

Fig. 126.

Fig. 127.

Fig. 128.

Fig. 129.

Fig. 130.

Fig. 131.

Fig. 132.

Fig. 133.

Fig. 134.

Fig. 135.

Fig. 136.

Fig. 137.

Fig. 138.

Fig. 139a.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.
Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer in Leipzig.

Fig. 139 b.

Fig. 140 2.

Fig. 141.

Fig. 142.

Fig. 140 1.

Fig. 143

Fig. 150.

Fig. 144.

Fig. 149.

Fig. 145 a.

Fig. 146 a.

Fig. 147.

Fig. 148.

Fig. 145 b.

Fig. 146 b.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig. Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer in Leipzig.